S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 1078–1098 (2016) УДК 517.95
DOI 10.17377/semi.2016.13.086 MSC 35R11

УРАВНЕНИЕ ДРОБНОЙ ДИФФУЗИИ С ОПЕРАТОРОМ ДИСКРЕТНО РАСПРЕДЕЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

А.В. ПСХУ

Abstract. We discuss an initial value problem for a fractional diffusion equation with discretely distributed fractional differentiation operator with respect to time variable. We construct a fundamental solution of the considered equation, give a solution of the problem under study, and prove a uniqueness theorem in the class of rapid growth functions. The fractional differentiation is given by the Dzhrbashyan–Nersesyan operator, and the corresponding results for equations with Caputo and Riemann–Liouville derivatives are particular cases of proved assertions.

Keywords: fractional diffusion equation, Cauchy problem, fractional derivative, discretely distributed fractional differentiation operator, multi-term fractional diffusion equation, Dzhrbashyan-Nersesyan fractional differentiation operator, Riemann–Liouville derivative, Caputo derivative, Tychonoff condition, Wright function.

1. Введение

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial^{\sigma_k}}{\partial y^{\sigma_k}} u(x,y) - \Delta_x u(x,y) = f(x,y), \tag{1}$$

где $\sigma_k \in (0,1)$, $\lambda_k > 0$, $k = \overline{1,m}$; $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $y > 0$; через $\partial^{\sigma_k}/\partial y^{\sigma_k}$ обозначена дробная производная порядка σ_k по переменной y с началом в точке $y = 0$; Δ_x — оператор Лапласа по переменной x, $\Delta_x = \sum_{j=1}^{n} \partial^2/\partial x_j^2$. Дробное

Pskhu, A.V., Fractional diffusion equation with discretely distributed differentiation operator.

Работа поддержана РФФИ (грант 16-01-00462).

Поступила 17 июля 2016 г., опубликована 1 декабря 2016 г.

дифференцирование задается оператором Джрбашяна-Нерсесяна, ассоциированного с упорядоченной парой $\{\alpha_k, \beta_k\}$, $\alpha_k, \beta_k \in (0,1]$, порядка $\sigma_k = \alpha_k+\beta_k-1$, т.е. $\partial^{\sigma_k}/\partial y^{\sigma_k} = D_{0y}^{\{\alpha_k,\beta_k\}}$.

Оператор дробного дифференцирования Джрбашяна-Нерсесяна, ассоциированный с последовательностью $\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_p\}$ ($\gamma_j \in (0,1]$, $j = \overline{0,p}$), порядка $\sigma = \sum_{j=0}^{p} \gamma_j - 1$, с началом в точке $y = t$ по переменной y, определяется соотношением [1]

$$D_{ty}^{\{\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_p\}} g(y) = D_{ty}^{\gamma_p-1} D_{ty}^{\gamma_{p-1}} \dots D_{ty}^{\gamma_1} D_{ty}^{\gamma_0} g(y), \tag{2}$$

где

$$D_{ty}^{0} g(y) = g(y), \qquad D_{ty}^{-\varepsilon} g(y) = \frac{\operatorname{sign}(y-t)}{\Gamma(\varepsilon)} \int_t^y g(s)|y-s|^{\varepsilon-1} ds, \quad \varepsilon > 0,$$

$$D_{ty}^{\delta} g(y) = \operatorname{sign}^q(y-t) \frac{\partial^q}{\partial y^q} D_{ty}^{\delta-q} g(y), \qquad \delta \in (q-1, q], \qquad q \in \mathbb{N},$$

— интеграл и производная дробного порядка Римана-Лиувилля [2, с. 11].

Дифференциальные уравнения с операторами дискретно распределенного дифференцирования

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial^{\sigma_k}}{\partial y^{\sigma_k}} \tag{3}$$

и операторами непрерывно распределенного дифференцирования

$$\int_\alpha^\beta \left(\lambda(y,t) \frac{\partial^t}{\partial y^t} \right) d\mu(t) \tag{4}$$

в настоящее время интенсивно исследуются, в том числе и в связи с различными приложениями в физике и механике [2, гл. 5], [3], [4]. Оператор (3) можно интерпретировать как оператор (4) с мерой сосредоточенной на дискретном множестве. Дифференциальные уравнения, содержащие операторы вида (4) относятся к классу непрерывных (континуальных) дифференциальных уравнений [5, с. 56], [6]. Кроме того, уравнения с операторами дискретно распределенного дифференцирования используются при поиске приближенных решений уравнений с операторами непрерывно распределенного дифференцирования [7].

В случае $m = 1$ уравнение (1) превращается в уравнение диффузии дробного порядка. Укажем работы [8]–[21], отражающие основные подходы к изучению дробных диффузионных и диффузионно-волновых уравнений, а также монографии [22] и [23], содержащие обширную библиографию по данному вопросу.

Начально-краевые задачи в ограниченных областях для диффузионных и диффузионно-волновых уравнений, содержащих операторы дискретно распределенного дифференцирования с производными Капуто, решались методом разделения переменных, [24], [25], [26], методами интегральных преобразований, [27], для с использованием принципов максимума и априорных оценок [28], [29], [30], а также численными методами [31], [32], [33].

В данной работе решена начальная задача (задача Коши) для уравнения (1) в слое $\mathbb{R}^n \times (0,T)$. В терминах функции Райта построено фундаментальное решение и исследованы его свойства, в частности доказана его положительность и получены оценки. Найдено представление решения исследуемой задачи и доказана теорема единственности решения в классе функций быстрого роста, удовлетворяющих аналогу условия А.Н. Тихонова [34]. Показано, что разрешимость исследуемой задачи, вообще говоря, зависит от распределения пар $\{\alpha_k, \beta_k\}$.

Производные Римана-Лиувилля D^{δ}_{0y} и Капуто $\partial^{\delta}_{0y} g(y) = D^{\delta-p}_{0y} \frac{\partial^p}{\partial y^p} g(y)$, относятся к частным случаям оператора (2):

$$D^{\delta}_{0y} = D^{\{\delta-p+1,1,\ldots,1\}}_{0y}, \qquad \partial^{\delta}_{0y} = D^{\{1,\ldots,1,\delta-p+1\}}_{0y}.$$

Поэтому следствием полученных для уравнения (1) результатов соответствующие результаты для уравнений с производными Римана-Лиувилля и Капуто.

Статья имеет следующую структуру. Постановка задачи и основные результаты сформулированы в разделах 2 и 3. В разделе 4 приведены основные сведения об операторах дробного интегрирования и дифференцирования, а также некоторых специальных функций, необходимые для дальнейшего изложения. Раздел 5 посвящен обсуждению свойств фундаментального решения уравнения (1). В разделах 6 и 7 проводится доказательство основных результатов — теорем 1 и 2 из раздела 3.

2. Постановка задачи

Далее будем обозначать

$$D = \mathbb{R}^n \times (0, T), \qquad D_0 = \mathbb{R}^n \times [0, T).$$

Регулярным решением уравнения (1) в области D назовем функцию $u(x, y)$ такую, что: $u(x, y)$ в области D дважды непрерывно дифференцируема по переменным x_j, $j = 1, 2, ..., n$; $y^{1-\gamma} u(x, y) \in C(D_0)$ для некоторого $\gamma > 0$, а функция $D^{\alpha-1}_{0y} u(x, y) \in C(D_0)$, где $\alpha = \max\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$, абсолютно непрерывна как функция переменной y в полуинтервале $[0, T)$, при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^n$.

Задача Коши. *Найти регулярное решение уравнение* (1), *удовлетворяющее условию*

$$\lim_{y \to 0} D^{\alpha-1}_{0y} u(x, y) = \tau(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

где $\tau(x)$ *— заданная непрерывная функция.*

3. Основные результаты

Рассмотрим функцию

$$\Gamma^{\mu}_{n}(x, y; \sigma_1, \ldots, \sigma_m; \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \tag{6}$$

$$= (4\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_0^{\infty} t^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) S^{\mu}_{m}(y; -\lambda_1 t, \ldots, -\lambda_m t; -\sigma_1, \ldots, -\sigma_m)\, dt,$$

где [35]

$$S^{\mu}_{m}(y; -\lambda_1, \ldots, -\lambda_m; -\sigma_1, \ldots, -\sigma_m) = (h_1 * h_2 * \ldots * h_m)(y), \tag{7}$$

$$h_j \equiv h_j(y) = y^{\mu_j - 1} \phi\left(-\sigma_j, \mu_j; -\lambda_j y^{-\sigma_j}\right), \qquad \phi(\varepsilon, \delta; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(\varepsilon k + \delta)}$$

— функция Райта [36]; $(h * g)(y) = \int_0^y h(y-t) g(t) dt$ — свертка Лапласа функций $h(y)$ и $g(y)$; $\mu_j \in \mathbb{R}$, $\mu = \sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j$.

Далее параметры λ_i и σ_i функций (6) и (7), как правило, меняться не будут. Поэтому, чтобы не загромождать запись, там, где это не вызовет разночтений, будем использовать обозначения

$$\Gamma_n^\mu(x,y)=\Gamma_n^\mu(x,y;\sigma_1,\,\dots,\sigma_m;\lambda_1,\,\dots,\lambda_m),\qquad \Gamma_n(x,y)=\Gamma_n^0(x,y);$$

$$w_\mu(t,y)=S_m^\mu(y;\,-\lambda_1\,t,\,\dots,-\lambda_m\,t;-\sigma_1,\,\dots,-\sigma_m). \tag{8}$$

Напомним, относительно параметров λ_k, σ_k, α_k и β_k на протяжении всей работы считается, что

$$\sigma_k\in(0,1),\quad \alpha_k,\,\beta_k\in(0,1],\quad \sigma_k=\alpha_k+\beta_k-1,\quad \lambda_k>0,\quad k=\overline{1,m}. \tag{9}$$

Кроме того, величины σ, α и λ определяются равенствами (и также не изменяются в дальнейшем)

$$\sigma=\max\{\sigma_1,...,\sigma_m\},\qquad \alpha=\max\{\alpha_1,...,\alpha_m\},\qquad \lambda=\max_{k\colon\sigma_k=\sigma}\{\lambda_k\}.$$

В последнем равенстве максимум берется только по тем индексам k, для которых $\sigma_k=\sigma$.

Теорема 1. *Пусть функция $\tau(x)$ непрервна в $\mathbb{R}^n$, если $n=1$ или $\beta_k=1$ для всех k; и удовлетворяет условию Гёльдера, в случае, если $n\ge 2$ и $\beta_k<1$ для некоторого k; функция $y^{1-\gamma}f(x,y)\in C(D_0)$ для некоторого $\gamma>\alpha-\sigma$ и удовлетворяет условию Гёльдера по переменной x; выполняются соотношения*

$$\lim_{|x|\to\infty}\tau(x)\exp\left(-\kappa|x|^{\frac{2}{2-\sigma}}\right)=0, \tag{10}$$

$$\lim_{|x|\to\infty}y^{1-\gamma}f(x,y)\exp\left(-\kappa|x|^{\frac{2}{2-\sigma}}\right)=0, \tag{11}$$

где $\kappa<(2-\sigma)\left(\frac{\sigma}{T}\right)^{\frac{\sigma}{2-\sigma}}\left(\frac{\lambda}{4}\right)^{\frac{1}{2-\sigma}}$.

Пусть также выполнено условие

$$\sigma>\max_{k\colon\alpha_k<\alpha}\{\sigma_k\}. \tag{12}$$

Тогда функция $u=u(x,y)$, определенная равенством

$$u(x,y)=\int_{\mathbb{R}^n}\tau(s)\sum_{k\colon\alpha_k=\alpha}\lambda_k\,\Gamma_n^{1-\beta_k}(x-s,y)\,ds+ \\ +\int_0^y\int_{\mathbb{R}^n}f(s,t)\Gamma_n(x-s,y-t)\,ds\,dt, \tag{13}$$

является регулярным решением уравнения (1) *и удовлетворяет начальному условию* (5).

В равенстве (13) суммирование ведется по всем k, для которых $\alpha_k=\alpha$, а в условии (12) максимум берется по тем k, для которых $\alpha_k<\alpha$. В случае, когда все α_k равны условие (12) считаем выполненным.

Теорема 2. *Существует не более одного регулярного решения задачи* (1), (5), *в классе функций, удовлетворяющих условию*

$$\lim_{|x|\to\infty}y^{1-\gamma}u(x,y)\exp\left(-\chi|x|^{\frac{2}{2-\sigma}}\right)=0 \tag{14}$$

для некоторых положительных констант γ и χ.

4. Вспомогательные утверждения

Здесь приводятся некоторые свойства операторов дробного интегрирования и дифференцирования, функции Райта, а также функции $w_\mu(t,y)$, заданной соотношением (8), необходимые для дальнейшего изложения.

Далее через C обозначены положительные постоянные, каждый раз, вообще говоря, разные, указывая в скобках, в случае необходимости, параметры, от которых они могут зависеть: $C = C(\alpha, \beta, ...)$.

4.1. **Операторы дробного интегро-дифференцирования.** Имеют место соотношения [1], [22, § 2.1]:

$$\int_\eta^y h(t) D_{\eta y}^{-\delta} g(t)\,dt = \int_\eta^y g(t) D_{y\eta}^{-\delta} h(t)\,dt, \qquad \delta > 0; \tag{15}$$

$$D_{\eta y}^{\varepsilon} D_{\eta y}^{\delta} h(y) = D_{\eta y}^{\varepsilon+\delta} h(y), \tag{16}$$

если $\varepsilon \in \mathbb{R}$ и $\delta \leq 0$ или $\varepsilon \in \mathbb{N}$ и $\delta \in \mathbb{R}$;

$$D_{\eta y}^{\varepsilon} D_{\eta y}^{\delta} h(y) = D_{\eta y}^{\varepsilon+\delta} h(y) - \sum_{j=1}^{p} \frac{|y-\eta|^{-\varepsilon-j}}{\Gamma(1-\varepsilon-j)} \left[D_{\eta y}^{\delta-j} h(y) \right]_{y=\eta} \tag{17}$$

при $\varepsilon \in \mathbb{R}$ и $\delta \in (p-1, p]$, $p \in \mathbb{N}$;

$$D_{\eta y}^{\varepsilon} \frac{|y-\eta|^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} = \frac{|y-\eta|^{\delta-\varepsilon-1}}{\Gamma(\delta-\varepsilon)} \tag{18}$$

если $\varepsilon \in \mathbb{R}$ и $\delta > 0$ или $\varepsilon \in \mathbb{N}$ и $\delta \in \mathbb{R}$.

Оператор D_{0y}^{δ} может быть записан в терминах свертки

$$D_{0y}^{\delta} h(y) = h * \frac{y^{-\delta-1}}{\Gamma(-\delta)}, \qquad \delta < 0. \tag{19}$$

С помощью (18) и (19), принимая во внимание ассоциативность и коммутативность свертки, получаем

$$\frac{1}{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(\varepsilon_j)} \left(y^{\varepsilon_1 - 1} * \, ... \, * y^{\varepsilon_m - 1} \right) = \frac{y^{\varepsilon-1}}{\Gamma(\varepsilon)}, \tag{20}$$

где $\varepsilon = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j$, $\varepsilon_j > 0$, и

$$\left(D_{0y}^{-\delta_1} \varphi_1 \right) * \, ... \, * \left(D_{0y}^{-\delta_m} \varphi_m \right) = D_{0y}^{-\delta} \left(\varphi_1 * \, ... \, * \varphi_m \right), \tag{21}$$

где $\delta = \sum_{j=1}^{m} \delta_j$ и $\delta_j \geq 0$.

4.2. **Функция Райта.** Для функции $\phi(\delta, \varepsilon; z)$ справедливы формулы [36], [37]

$$\frac{d}{dz} \phi(\delta, \, \varepsilon; \, z) = \phi(\delta, \, \varepsilon + \delta; \, z) \tag{22}$$

и, при $\lambda > 0$, $\delta > -1$, ε, $\nu \in \mathbb{R}$, [23, с. 25]

$$D_{0y}^{\nu} y^{\varepsilon-1} \phi\left(\delta, \, \varepsilon; \, -\lambda y^{\delta}\right) = y^{\varepsilon-\nu-1} \phi\left(\delta, \, \varepsilon-\nu; \, -\lambda y^{\delta}\right). \tag{23}$$

Из (22) и (23) следует

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \lambda D_{0y}^{-\delta} \right) y^{\varepsilon-1} \phi\left(\delta, \, \varepsilon; \, -\lambda \, z \, y^{\delta}\right) = 0 \qquad (\lambda > 0, \quad \delta > -1). \tag{24}$$

Заметим, что в случае $\delta > 0$ формулы (23) и (24) верны для λ любого знака.

Функции Райта положительна [38]:

$$\phi(-\delta,\,\varepsilon;\,-z) > 0 \qquad \text{при} \qquad \delta \in (0,\,1), \qquad \varepsilon \geq 0, \qquad z > 0, \tag{25}$$

и имеет следующее асимптотическое разложение [37]

$$\phi(-\delta,\,\varepsilon;\,-z) = Y^{\frac{1}{2}-\varepsilon} e^{-Y} \left[\sum_{j=0}^{M-1} A_j Y^{-j} + O\left(Y^{-M}\right) \right] \qquad \text{при} \qquad z \to \infty, \tag{26}$$

где $\delta \in (0,\,1)$, $Y = (1-\delta)\delta^{\frac{\delta}{1-\delta}} z^{\frac{1}{1-\delta}}$, а коэффициенты A_j зависят лишь от δ и ε.

Из (26), в частности, следует оценка

$$|\phi(-\delta,\,\varepsilon;\,-z)| \leq C \,\exp\left(-\nu\, z^{\frac{1}{1-\delta}}\right), \qquad C = C(\delta, \varepsilon, \nu), \tag{27}$$

справедливая для любых $\delta \in (0,\,1)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\nu < (1-\delta)\delta^{\frac{\delta}{1-\delta}}$ и $z \geq 0$. Учитывая соотношение $\lim_{z\to 0} z^{-1}\phi\,(-\delta,\,\varepsilon;\,z) = 1/\Gamma(\varepsilon-\delta)$, выполняющееся для всех целых неотрицательных ε, в силу (27) имеем, также,

$$|\phi(-\delta,\,\varepsilon;\,-z)| \leq C\, z\, \exp\left(-\nu\, z^{\frac{1}{1-\delta}}\right), \qquad \text{при} \qquad (-\varepsilon) \in \mathbb{N}_0. \tag{28}$$

(Здесь и далее $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$) Из (27) и (28) для любых $\delta \in (0,\,1)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $z > 0$ и $y > 0$, следует неравенство

$$\left|y^{\varepsilon-1}\phi\left(-\delta, \varepsilon; -zy^{-\delta}\right)\right| \leq Cz^{-\theta} y^{\varepsilon+\delta\theta-1}, \quad \theta \geq \left\{ \begin{array}{ll} 0, & (-\varepsilon) \notin \mathbb{N}_0, \\ -1, & (-\varepsilon) \in \mathbb{N}_0. \end{array} \right. \tag{29}$$

где $C = C(\varepsilon, \delta, \theta)$.

Имеет место интегральное представление функции Райта [37]

$$\phi(\delta,\,\varepsilon;\,z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(r,\omega\pi)} p^{-\varepsilon} \exp\left(p + zp^{-\delta}\right) dp \qquad (z \in \mathbb{C},\; \delta > -1,\; \varepsilon \in \mathbb{R}), \tag{30}$$

где $\gamma(r, \omega\pi)$ — контур Ханкеля, состоящий из дуги окружности $|p| = r$, $|\arg p| \leq \omega\pi$ и двух лучей $|p| \geq r > 0$, $\arg p = \pm\omega\pi$:

$$\gamma(r, \omega\pi) = \{p : \,|p| = r,\, |\arg p| \leq \omega\pi\} \cup \{p : \,|p| \geq r,\, \arg p = \pm\omega\pi\}. \tag{31}$$

Направление обхода выбрано в сторону неубывания $\arg p$. Представление (30) справедливо для любых $r > 0$ и $\omega \in (1/2, 1]$.

4.3. **Функция** $w_\mu(t, y)$**.** Здесь мы исследуем свойства функции $w_\mu(x, y)$, заданной соотношением (8).

Прежде всего заметим, что функция (7) (и функция $w_\mu(x, y)$, следовательно, тоже) не зависит от распределения чисел μ_k, а лишь от их суммы μ. Действительно, обозначим через S и $\tilde{S}$ значения функции S_m^μ, соответствующие наборам $\{\mu_1, \ldots, \mu_m\}$ и $\{\tilde{\mu}_1, \ldots, \tilde{\mu}_m\}$, причем

$$\mu = \sum_{k=1}^m \mu_k = \sum_{k=1}^m \tilde{\mu}_k, \quad \nu = \min\{\mu_1, ..., \mu_m, \tilde{\mu}_1, ..., \tilde{\mu}_m\}, \quad h_k = \phi\left(-\sigma_k, \nu; -\frac{\lambda_k}{y^{\sigma_k}}\right)$$

Воспользовавшись формулой (21) получаем

$$\begin{aligned} S = \left(D_{0y}^{\nu-\mu_1} h_1\right) * \ldots * \left(D_{0y}^{\nu-\mu_m} h_m\right) = D_{0y}^{m\nu-\mu}\left(h_1 * \ldots * h_m\right) \\ = \left(D_{0y}^{\nu-\tilde{\mu}_1} h_1\right) * \ldots * \left(D_{0y}^{\nu-\tilde{\mu}_m} h_m\right) = \tilde{S}. \end{aligned}$$

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (9). *Тогда:*
1) если $\mu \geq 0$, $t > 0$ *и* $y > 0$, *то*

$$w_\mu(t, y) > 0; \tag{32}$$

2) для любого $\mu \in \mathbb{R}$ *имеет место интегральное представление*

$$w_\mu(t, y) = \frac{y^{\mu-1}}{2\pi i} \int_{\gamma(r,\omega\pi)} p^{-\mu} \exp\left(p - t\sum_{k=1}^{m} \lambda_k y^{-\sigma_k} p^{\sigma_k}\right) dp \quad (t > 0,\ y > 0), \tag{33}$$

где котнур $\gamma(r, \omega\pi)$ *определен равенством* (31), $r > 0$, $\omega \in (1/2, 1]$.
3) для произвольного $\mu \in \mathbb{R}$ *справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{t\to+0} w_\mu(t, y) = \frac{y^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} \qquad (y > 0); \tag{34}$$

4) для любых $\mu \in \mathbb{R}$, $\rho < (1-\sigma)\,(\sigma^\sigma\lambda)^{\frac{1}{1-\sigma}}$, $t > 0$ *и* $y > 0$, *справедливы оценки*

$$|w_\mu(t, y)| \leq C y^{\mu-1} z^{-\theta} \exp\left(-\rho\, z^{\frac{1}{1-\sigma}}\right), \quad \theta \geq \left\{ \begin{array}{ll} 0, & (-\mu) \notin \mathbb{N}_0, \\ -1, & (-\mu) \in \mathbb{N}_0, \end{array} \right. \tag{35}$$

где $z = t\, y^{-\sigma}$, $C = C(\mu, \lambda, \sigma, \rho, \theta)$;
5) имеет место равенство

$$D_{0y}^{\nu} w_\mu(t, y) = w_{\mu-\nu}(t, y), \qquad \nu \in \mathbb{R}; \tag{36}$$

6) для любых $\mu \in \mathbb{R}$ *и* $\nu \geq 0$ *выполняется равенство*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k D_{0y}^{\sigma_k}\right) D_{0t}^{-\nu} w_\mu(t, y) = \frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}\, \frac{y^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}. \tag{37}$$

7) для любого $\mu \in \mathbb{R}$ *справедливо соотношение*

$$\int_0^\infty \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k D_{0y}^{\sigma_k}\right) w_\mu(t, y)\, dt = \frac{y^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}. \tag{38}$$

Доказательство. 1) Положительность функции $w_\mu(t, y)$ следует из определений (7), (8) и неравенства (25).

2) Представление (33) следует из определений (7) и (8), формулы (30) и теоремы умножения для преобразования Лапласа [39, с. 475].

3) В силу (33), с учетом равенства $\int_{\gamma(r,\omega\pi)} p^{-\mu} e^p dp = 2\pi i/\Gamma(\mu)$, можем записать

$$w_\mu(t, y) = \frac{y^{\mu-1}}{2\pi i} \int_{\gamma(r,\omega\pi)} p^{-\mu} e^p \left[e^{-tQ(p)} - 1\right] dp + \frac{y^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)},$$

где $Q(p) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k y^{-\sigma_k} p^{\sigma_k}$. Выбирая $\omega \in (1/2, 1]$ таким, что $\sigma\omega < 1/2$, получим $\pi \geq |\arg(-tQ(p))| \geq \pi(1 - \sigma\omega) > \pi/2$ для всех $p \in \gamma(r, \omega\pi)$. Поэтому

$$\left|e^{-tQ(p)} - 1\right| = \left|Q(p) \int_0^t e^{-sQ(p)} ds\right| \leq |Q(p)| \int_0^t e^{-s|Q(p)|\cos\pi\sigma\omega} ds \leq Cty^{-\sigma}|p|^\sigma,$$

где $C = C(\omega, \lambda, \sigma)$. Таким образом

$$\left|w_\mu(t, y) - \frac{y^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\right| \leq C\, t\, y^{\mu-\sigma-1}. \tag{39}$$

Отсюда следует (34).

4) Рассмотрим сначала случай, когда для $z \geq 1$. Пусть l — номер, для которого $\sigma_l = \max\{\sigma_1, ..., \sigma_m\}$ и $\lambda_l = \max\limits_{k:\sigma_k=\sigma}\{\lambda_k\}$, то есть $\sigma_l = \sigma$ и $\lambda = \lambda_l$ (очевидно, такое l существует). Как было отмечено выше, значение $w_\mu(t, y)$ не зависит от распределения μ_j, а лишь от их суммы μ. Поэтому будем считать, что в представлении (7) $\mu_l = \mu - 1$, а все $\mu_j > 0$ $(j \neq l)$ и $\sum_{j\neq l}\mu_j = 1$. Из неравенства (29) следует, что

$$|h_j(y)| \leq Cy^{\mu_j-1} \qquad (j \neq l), \quad \text{где} \quad h_j(y) = y^{\mu_j-1}\phi\left(-\sigma_j, \mu_j; -\lambda_j t y^{-\sigma_j}\right).$$

Поэтому в силу (20) и (27), с учетом определений (7) и (8), имеем

$$\begin{aligned}
|w_\mu(t, y)| &\leq C\, y^{\mu_1-1} * ... * y^{\mu_j-1} * .. * |h_l| * ... * y^{\mu_m-1} \leq C\,|h_l| * 1 \\
&= C\int_0^y s^{\mu-2}\left|\phi\left(-\sigma, \mu-1; -\lambda t s^{-\sigma}\right)\right| ds \\
&\leq C\int_0^y s^{\mu-2}\exp\left(-(\rho+\varepsilon)t^{\frac{1}{1-\sigma}}s^{-\frac{\sigma}{1-\sigma}}\right) ds \\
&= Cy^{\mu-1}\int_0^1 \xi^{\mu-2}\exp\left(-(\rho+\varepsilon)z^{\frac{1}{1-\sigma}}\xi^{-\frac{\sigma}{1-\sigma}}\right) d\xi \\
&\leq Cy^{\mu-1}\exp\left(-\rho\, z^{\frac{1}{1-\sigma}}\right)\int_0^1 \xi^{\mu-2}\exp\left(-\varepsilon\,\xi^{-\frac{\sigma}{1-\sigma}}\right) d\xi.
\end{aligned}$$

Здесь ε выбрано в предположении $\varepsilon > 0$ и $\rho + \varepsilon < (1-\sigma)\,(\sigma^\sigma\lambda)^{\frac{1}{1-\sigma}}$. Это доказывает, что

$$|w_\mu(t, y)| \leq C\, y^{\mu-1}\exp\left(-\rho\, z^{\frac{1}{1-\sigma}}\right), \qquad \text{если} \qquad z \geq 1. \tag{40}$$

Из (39) следует, что

$$|w_\mu(t, y)| \leq C\, y^{\mu-1}; \quad |w_{-k}(t, y)| \leq C\, z\, y^{\mu-1}, \quad k \in \mathbb{N}_0; \quad 0 < z \leq 1. \tag{41}$$

Принимая во внимание, что

$$\sup_{z>0} z^\theta \exp\left(-\varepsilon\, z^{\frac{1}{1-\sigma}}\right) \leq C, \qquad C = C(\theta, \varepsilon, \sigma),$$

для любых $\theta \geq 0$ и $\varepsilon > 0$, из неравенств (40) и (41) следует (35).

5) Если $\nu < 0$, то равенство (36), с учетом (21) и (23), следует из определений (7) и (8):

$$D_{0y}^\nu w_\mu(t, y) = \left(D_{0y}^\nu h_1\right) * (h_2 * ... * h_n)\,(y) = w_{\mu-\nu}(t, y).$$

Пусть теперь $\nu \in (q-1, q]$, $q \in \mathbb{N}$. Принимая во внимание равенство

$$\frac{\partial}{\partial y}\,(h * g)\,(y) = (h' * g)\,(y) + h(0)\, g(y),$$

формулы (21), (23) и соотношение

$$\left[D_{0y}^{\nu-k} h_1(y)\right]_{y=0} = \left[y^{\mu_1-\nu+k-1}\phi\left(-\sigma_1,\, \mu_1-\nu+k;\, -\lambda_1\, t\, y^{-\sigma_1}\right)\right]_{y=0} = 0, \quad 1 \leq k \leq q,$$

получаем

$$D_{0y}^\nu w_\mu(x, y) = \frac{\partial^q}{\partial y^q}\left(D_{0y}^{\nu-q}h_1\right) * (h_2 * ... * h_n)\,(y) = \left(D_{0y}^\nu h_1\right) * (h_2 * ... * h_n)\,(y).$$

Отсюда следует (36).

6) В силу (17) и (34) справедливо соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t}D_{0t}^{-\nu}w_\mu(t,y)=D_{0t}^{-\nu}\frac{\partial}{\partial t}w_\mu(t,y)+\frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}\,\frac{y^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}.$$

Из (35) и (36) следует законность перестановки операторов $D_{0t}^{-\nu}$ и $D_{0y}^{\sigma_k}$. Поэтому

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k D_{0y}^{\sigma_k}\right)D_{0t}^{-\nu}w_\mu(x,y)=D_{0t}^{-\nu}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k D_{0y}^{\sigma_k}\right)w_\mu(x,y)+\frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}\,\frac{y^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}$$

Таким образом, для доказательства (37) достаточно показать, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k D_{0y}^{\sigma_k}\right)w_\mu(t,y)=0. \tag{42}$$

Докажем (42). С учетом (24), из равенства (21) и определения (7) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t}w_\mu(t,y)=\sum_{k=1}^{m}h_1*...*\left(\frac{\partial}{\partial t}h_k\right)*...*h_m=$$

$$=-\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\left(h_1*...*\left(D_{0y}^{\sigma_k}h_k\right)*...*h_m\right)=-\sum_{k=1}^{m}\lambda_k D_{0y}^{\sigma_k}\left(h_1*...*h_m\right).$$

Последнее соотношение эквивалентно (42).

7) Из (35) и (37) следует, что

$$\int_0^\infty\left(\sum_{k=1}^{m}\lambda_k D_{0y}^{\sigma_k}\right)w_\mu(t,y)\,dt=-\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial t}w_\mu(t,y)\,dt=w_\mu(0,y).$$

Принимая во внимание (34), это доказывает (38). □

5. Фундаментальное решение

Здесь мы докажем некоторые свойства функции $\Gamma_n^\mu(x,y)$, которая с учетом (8), может быть записана в виде

$$\Gamma_n^\mu(x,y)=C_n\int_0^\infty t^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)w_\mu(t,y)\,dt,\qquad C_n=(4\pi)^{-\frac{n}{2}}. \tag{43}$$

Лемма 2. *Пусть $\mu\in\mathbb{R}$, $|x|>0$ и $y>0$. Справедливы соотношения:*

$$D_{0y}^{\nu}\Gamma_n^\mu(x,y)=\Gamma_n^{\mu-\nu}(x,y),\qquad \nu\in\mathbb{R}; \tag{44}$$

$$\frac{\partial}{\partial|x|}\Gamma_n^\mu(x,y)=-2\pi|x|\Gamma_{n+2}^\mu(x,y),\qquad \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma_n^\mu(x,y)=-2\pi x_j\Gamma_{n+2}^\mu(x,y); \tag{45}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\Gamma_n^\mu(x,y)=-2\pi\Gamma_{n+2}^\mu(x,y)+4\pi^2x_j^2\Gamma_{n+4}^\mu(x,y); \tag{46}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{m}\lambda_k D_{0y}^{\sigma_k}-\Delta_x\right)\Gamma_n^\mu(x,y)=0; \tag{47}$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{|x|<R}\left(\sum_{k=1}^{m}\lambda_k D_{0y}^{\sigma_k}\right)\Gamma_n^\mu(x,y)\,dx=\lim_{R\to\infty}\int_{|x|<R}\Delta_x\Gamma_n^\mu(x,y)\,dx=\frac{y^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}. \tag{48}$$

Доказательство. Из оценки (35) следует законность внесения оператора D_{0y}^{ν} под знак интеграла в (43). Поэтому, в силу (36) получаем

$$D_{0y}^{\nu}\Gamma_n^{\mu}(x,y) = C_n \int_0^{\infty} t^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) w_{\mu-\nu}(t,y)\, dt = \Gamma_n^{\mu-\nu}(x,y).$$

Соотношения

$$\frac{\partial}{\partial |x|}\Gamma_n^{\mu}(x,y) = -\frac{|x|}{2} C_n \int_0^{\infty} t^{-\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) w_{\mu}(t,y)\, dt = -\frac{|x| C_n}{2C_{n+2}} \Gamma_{n+2}^{\mu}(x,y),$$

учитывая, что $C_n/C_{n+2} = 4\pi$, доказывают первое равенство из (45). Вторая формула из (45) следует из первой и равенства

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{x_j}{|x|}\frac{\partial}{\partial |x|}$$

Соотношение (46) получается последовательным применением второго равенства из (45).

Далее, из (35), (36) и (37) получаем

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} \lambda_k D_{0y}^{\sigma_k} \Gamma_n^{\mu}(x,y) &= C_n \int_0^{\infty} t^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k D_{0y}^{\sigma_k}\right) w_{\mu}(t,y)\, dt \\
&= -C_n \int_0^{\infty} t^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) \frac{\partial}{\partial t} w_{\mu}(t,y)\, dt \\
&= C_n \int_0^{\infty} w_{\mu}(t,y) \frac{\partial}{\partial t}\left[t^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)\right] dt \\
&= C_n \int_0^{\infty} w_{\mu}(t,y) \left(\frac{|x|^2}{4t^2} - \frac{n}{2t}\right) t^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) dt \\
&= 4\pi^2 |x|^2 \Gamma_{n+4}^{\mu}(x,y) - 2\pi n \Gamma_{n+2}^{\mu}(x,y).
\end{aligned}$$

Отсюда, в силу (46), следует (47).

Для доказательства (48) заметим, что

$$\lim_{R\to\infty} \int_{|x|<R} t^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) dx = (4\pi)^{\frac{n}{2}}\,.$$

Поэтому, учитывая (35) и (43), можем написать

$$\lim_{R\to\infty} \int_{|x|<R} \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k D_{0y}^{\sigma_k}\right) \Gamma_n^{\mu}(x,y)\, dx = \int_0^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k D_{0y}^{\sigma_k}\right) w_{\mu}(t,y)\, dt.$$

Отсюда в силу (38) и (47) следует (48). □

Докажем ряд оценок для функции $\Gamma_n^{\mu}(x,y)$. Для этого рассмотрим вспомогательную функцию

$$f(z;\mu,\varepsilon) = \int_0^{\infty} t^{-\mu} \exp\left(-\frac{z}{t} - t^{\varepsilon}\right) dt. \tag{49}$$

Лемма 3. *Для любых $z > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\nu < (1+\varepsilon)\varepsilon^{-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}$ имеет место неравенство*

$$f(z;\mu,\varepsilon) \le C \exp\left(-\nu z^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right) \times \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \mu < 1, \\ 1 + |\ln z| & \text{при} \quad \mu = 1, \\ z^{1-\mu} & \text{при} \quad \mu > 1. \end{cases} \tag{50}$$

где $C = C(\mu, \nu, \varepsilon)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что для любых положительных z и θ справедливо равенство

$$\inf_{t>0}\left(\frac{z}{t} + (\theta t)^{\varepsilon}\right) = \inf_{s>0}\left(\frac{\theta}{s} + (zs)^{\varepsilon}\right) = (1+\varepsilon)\left(\frac{z\theta}{\varepsilon}\right)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}. \tag{51}$$

Рассмотрим сначала случай $\mu < 1$. В силу (51), для произвольного $\theta \in (0,1)$ можем записать

$$f(z;\mu,\varepsilon) \le \exp\left[-\inf_{t>0}\left(\frac{z}{t} + \theta t^{\varepsilon}\right)\right]\int_0^{\infty} t^{-\mu}\exp\left(-(1-\theta)t^{\varepsilon}\right)dt \le C\exp\left(-\nu z^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right).$$

Это доказывает (50) в случае, когда $\mu < 1$.

Пусть теперь $\mu = 1$. Интегрируя в (49) по частям, получаем

$$f(z;1,\varepsilon) = \varepsilon\int_0^{\infty} t^{\varepsilon-1}\ln t\exp\left(-\frac{z}{t} - t^{\varepsilon}\right)dt - \int_0^{\infty}\frac{z}{t^2}\ln t\exp\left(-\frac{z}{t} - t^{\varepsilon}\right)dt = I_1 + I_2.$$

Для I_1 имеем (как и выше считаем $0 < \theta < 1$)

$$|I_1| \le \varepsilon\exp\left[-\inf_{t>0}\left(\frac{z}{t} + \theta t^{\varepsilon}\right)\right]\int_0^{\infty} t^{\varepsilon-1}|\ln t|\exp\left(-(1-\theta)t^{\varepsilon}\right)dt. \tag{52}$$

И, аналогично, для I_2, с учетом (51) получаем

$$|I_2| \le \int_0^{\infty}\frac{z}{t^2}|\ln t|\exp\left(-\frac{z}{t} - t^{\varepsilon}\right)dt = \int_0^{\infty}\frac{1}{s^2}|\ln sz|\exp\left(-\frac{1}{s} - (zs)^{\varepsilon}\right)ds \le$$

$$\le \exp\left[-\inf_{s>0}\left(\frac{\theta}{s} + (zs)^{\varepsilon}\right)\right]\int_0^{\infty}\frac{1}{s^2}\left(|\ln s| + |\ln z|\right)\exp\left(-\frac{1-\theta}{s}\right)ds. \tag{53}$$

Из (52) и (53) следует (50) когда $\mu = 1$.

Остается рассмотреть случай $\mu > 1$. Сделав в (49) замену переменной $t = zs$, с учетом (51) для любого $\theta \in (0,1)$ получим

$$f(z;\mu,\varepsilon) = z^{1-\mu}\int_0^{\infty} s^{-\mu}\exp\left(-\frac{1}{s} - (zs)^{\varepsilon}\right)ds \le$$

$$\le z^{1-\mu}\exp\left[-\inf_{s>0}\left(\frac{\theta}{s} + (zs)^{\varepsilon}\right)\right]\int_0^{\infty} s^{-\mu}\exp\left(-\frac{1-\theta}{s}\right)ds.$$

□

Лемма 4. *Для любых* $\mu \in \mathbb{R}$, $\xi < (2-\sigma)\left(\frac{\sigma^{\sigma}\lambda}{4}\right)^{\frac{1}{2-\sigma}}$, $|x| > 0$ *и* $y > 0$ *справедливы неравенства:*

$$|\Gamma_n^{\mu}(x,y)| \le Cy^{\mu+\sigma(1-\frac{n}{2})-1}\eta(z,p)\exp\left(-\xi z^{\frac{1}{2-\sigma}}\right); \tag{54}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma_n^{\mu}(x,y)\right| \le C|x_j|y^{\mu-\sigma\frac{n}{2}-1}\eta(z,p+2)\exp\left(-\xi z^{\frac{1}{2-\sigma}}\right); \tag{55}$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\Gamma_n^{\mu}(x,y)\right| \le Cy^{\mu-\sigma\frac{n}{2}-1}\eta(z,p+2)\exp\left(-\xi z^{\frac{1}{2-\sigma}}\right), \tag{56}$$

$$|\Delta_x\Gamma_n^{\mu}(x,y)| \le Cy^{\mu-\sigma\frac{n}{2}-1}\eta(z,n)\exp\left(-\xi z^{\frac{1}{2-\sigma}}\right), \tag{57}$$

где $z = |x|^2\, y^{-\sigma}$, $C = C(\mu, \lambda, \sigma, \xi)$,

$$p = \begin{cases} n & \text{при} \quad (-\mu) \notin \mathbb{N}_0, \\ n-2 & \text{при} \quad (-\mu) \in \mathbb{N}_0, \end{cases} \qquad \eta(z,n) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad n < 2, \\ 1 + |\ln z| & \text{при} \quad n = 2, \\ z^{1-\frac{n}{2}} & \text{при} \quad n > 2. \end{cases}$$

Доказательство. В силу (35) и (43), с учетом обозначения (49), имеем

$$|\Gamma_n^\mu(x,y)| \le C y^{\mu+\sigma\theta-1} \int_0^\infty t^{-\frac{n}{2}-\theta} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t} - \rho\left(ty^{-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}\right) dt \le$$
$$\le C y^{\mu+\sigma(1-\frac{n}{2})-1} \int_0^\infty t^{-\frac{n}{2}-\theta} \exp\left(-\frac{|x|^2 \rho^{1-\sigma}}{4y^\sigma t} - t^{\frac{1}{1-\sigma}}\right) dt =$$
$$= C y^{\mu+\sigma(1-\frac{n}{2})-1} f\left(\frac{z}{4}\rho^{1-\sigma}; \frac{n}{2}+\theta, \frac{1}{1-\sigma}\right),$$

где

$$\rho < (1-\sigma)\left(\sigma^\sigma \lambda\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}, \qquad \theta \ge \begin{cases} 0, & (-\mu) \notin \mathbb{N}_0, \\ -1, & (-\mu) \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Отсюда, приняв θ равным -1 в случае целого неположительного μ, и равным нулю в остальных случаях, в силу (50) приходим к (54).

Далее, из (45) следует, что

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma_n^\mu(x,y)\right| \le 2\pi |x_j| \left|\Gamma_{n+2}^\mu(x,y)\right|.$$

Отсюда, с учетом (55) получаем (54).

Аналогично, принимая во внимание (46) имеем

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\Gamma_n^\mu(x,y)\right| \le 2\pi \left|\Gamma_{n+2}^\mu(x,y)\right| + 4\pi^2 y^\sigma z \left|\Gamma_{n+4}^\mu(x,y)\right|.$$

Отсюда и (54) следует (56).

В силу (44) и (47) имеем

$$\Delta_x \Gamma_n^\mu(x,y) = \sum_{k=1}^m \lambda_k \Gamma_n^{\mu-\sigma_k}(x,y).$$

Оценивая правую часть с помощью (54) приходим к (57). □

Замечание 1. *Для любых* $\theta \ge 0$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедливо соотношение*

$$\sup_{z>0} z^\theta \exp\left(-\varepsilon z^{\frac{1}{2-\sigma}}\right) < \infty.$$

Отсюда следует, что если правые части неравенств (54), (55), (56) *и* (57) *умножить на* $z^{-\theta} = |x|^{-2\theta} y^{\sigma\theta}$, *то для любого* $\theta \ge 0$ *все неравенства, за счет выбора константы* $C = C(\mu, \lambda, \sigma, \xi, \theta)$ *и сколь угодно малого уменьшения параметра* ξ, *останутся верными.*

Лемма 5. *Пусть* $\mu \ge 0$, $|x| > 0$ *и* $y > 0$. *Тогда*

(58) $$\Gamma_n^\mu(x,y) > 0.$$

Доказательство. Неравенство (58) следует из (43) и положительности функции $w_\mu(t,y)$ при $\mu \ge 0$ (см. (32)). □

Лемма 6. *Пусть функция* $y^{1-\gamma} f(x,y) \in C(D_0)$, $\gamma > 0$, *удовлетворяет условию Гёльдера по переменной* x, *и выполняется соотношение* (11). *Тогда для функции*

$$F(x,y) = \int_0^y \int_{\mathbb{R}^n} f(s,t)\Gamma_n(x-s,y-t)\,ds\,dt \tag{59}$$

справедливы следующие утверждения:
1) если $\gamma > \alpha - \sigma$, *то*

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1} F(x,y) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n; \tag{60}$$

2) имеет место равенство

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k D_{0y}^{\sigma_k} - \Delta_x\right) F(x,y) = f(x,y), \qquad (x,y) \in D. \tag{61}$$

Доказательство. Из оценки (54), с учетом (20), следует, что

$$|F(x,y)| \le C y^{\sigma-\varepsilon+\gamma-1},$$

где ε может быть сколь угодно малым положительным числом. Поэтому, принимая во внимание (18), получаем

$$\left|D_{0y}^{\alpha-1} F(x,y)\right| \le C y^{\sigma-\varepsilon+\gamma-\alpha}.$$

Последнее доказывает (60).

Перейдем к доказательству (61). В силу (44) и (54) имеем

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k D_{0y}^{\sigma_k}\right) F(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int_0^y \int_{\mathbb{R}^n} f(s,t) \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k D_{ty}^{\sigma_k-1}\right) \Gamma_n(x-s,y-t)\,ds\,dt =$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\int_0^y \int_{\mathbb{R}^n} [f(s,t)-f(x,t)] \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k D_{ty}^{\sigma_k-1}\right) \Gamma_n(x-s,y-t)\,ds\,dt +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}\int_0^y f(x,t) \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k D_{ty}^{\sigma_k-1}\right) \Gamma_n(x-s,y-t)\,ds\,dt.$$

Из (44) и (48) следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k D_{ty}^{\sigma_k-1}\right) \Gamma_n(x-s,y-t)\,ds = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k D_{ty}^{\sigma_k}\right) \Gamma_n^1(s,y-t)\,ds = 1.$$

Поэтому, принимая во внимание гельдеровость функции $f(x,y)$, а также равенство (47) и оценку (57), получаем

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k D_{0y}^{\sigma_k}\right) F(x,y) = \tag{62}$$
$$= \int_0^y \int_{\mathbb{R}^n} [f(s,t)-f(x,t)]\,\Delta_x \Gamma_n(x-s,y-t)\,ds\,dt + f(x,y).$$

Далее рассмотрим функцию

$$F_\varepsilon(x,y) = \int_0^{y-\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} f(s,t)\Gamma_n(x-s,y-t)\,ds\,dt, \qquad \varepsilon > 0.$$

С учетом (56) имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}F_\varepsilon(x,y)=\int_0^{y-\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n} f(s,t)\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\Gamma_n(x-s,y-t)\,ds\,dt=$$
$$=\int_0^{y-\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n}[f(s,t)-f(x,t)]\,\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\Gamma_n(x-s,y-t)\,ds\,dt+$$
$$+\int_0^{y-\varepsilon}f(x,t)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\Gamma_n(x-s,y-t)\,ds\,dt$$

и

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left|[f(s,t)-f(x,t)]\,\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\Gamma_n(x-s,y-t)\right|ds\le Ct^{\gamma-1}(y-t)^{q\sigma/2-1},$$

где q — показатель Гёльдера функции $y^{1-\gamma}f(x,y)$. Отсюда следует справедливость равенств

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}F(x,y)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}F_\varepsilon(x,y)$$
$$=\int_0^{y}\int_{\mathbb{R}^n}[f(s,t)-f(x,t)]\,\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\Gamma_n(x-s,y-t)\,ds\,dt$$
$$+\int_0^{y}f(x,t)\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\Gamma_n(x-s,y-t)\,ds\,dt$$

и, с учетом (48),

$$\Delta_xF(x,y)=\int_0^{y}\int_{\mathbb{R}^n}[f(s,t)-f(x,t)]\,\Delta_x\Gamma_n(x-s,y-t)\,ds\,dt. \tag{63}$$

Сравнивая (62) и (63) приходим к (61). □

Лемма 7. *Пусть функция $\tau(x)$ непрерывна в $\mathbb{R}^n$ и выполнено условие* (10). *Тогда для функции*

$$G_\mu(x,y)=\int_{\mathbb{R}^n}\tau(s)\Gamma_n^\mu(x-s,y)\,ds,\qquad x\in\mathbb{R}^n,\quad y\in(0,T), \tag{64}$$

справедливы следующие утверждения:
1) для любых $\nu\in\mathbb{R}$ и $\mu>-\sigma$ имеет место равенство

$$D_{0y}^{\nu}G_\mu(x,y)=G_{\mu-\nu}(x,y); \tag{65}$$

2) для любого $\mu\ge0$ и функции $\tau(x)$, удовлетворяющей дополнительно условию Гёльдера при $n\ge2$ и $\mu\ne0$, справедливо равенство

$$\left(\sum_{k=1}^m\lambda_kD_{0y}^{\sigma_k}-\Delta_x\right)G_\mu(x,y)=\frac{\tau(x)y^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}; \tag{66}$$

3) при выполнении условия (12) *имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{y\to0}D_{0y}^{\alpha-1}\sum_{k\colon\alpha_k=\alpha}\lambda_k\,G_{1-\beta_k}(x,y)=\tau(x),\qquad x\in\mathbb{R}^n, \tag{67}$$

где суммирование ведется только по тем индексам k, для которых $\alpha_k=\alpha$.

Доказательство. Из оценки (54) следует, что в случае, когда $\mu > -\sigma$ оператор D_{0y}^{ν} может быть внесен под знак интеграла в (64). Поэтому, в силу (44) имеем

$$D_{0y}^{\nu} G_{\mu}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} \tau(s) D_{0y}^{\nu} \Gamma_n^{\mu}(x-s,y) = \int_{\mathbb{R}^n} \tau(s) \Gamma_n^{\mu-\nu}(x-s,y)\, ds,$$

что равносильно (65).

Докажем (66). Рассмотрим сначала случай $n = 1$. В силу (43) и (45) имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\Gamma_1^{\mu}(x,y) = -2\pi x \Gamma_3^{\mu}(x,y) = -\frac{\operatorname{sign}(x)}{4\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{1}{4t}\right) w_{\mu}\left(\frac{t}{|x|}, y\right) dt.$$

Отсюда, с учетом (34), следует, что

$$\lim_{x\to+0} \frac{\partial}{\partial x}\Gamma_1^{\mu}(x,y) = -\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\frac{y^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} \int_0^{\infty} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{4t}}\, dt = -\frac{y^{\mu-1}}{2\Gamma(\mu)} = -\lim_{x\to-0} \frac{\partial}{\partial x}\Gamma_1^{\mu}(x,y).$$

То есть, функция $(\partial/\partial x)\Gamma_1^{\mu}(x,y)$ имеет скачок в точке $x = 0$ равный $-y^{\mu-1}/\Gamma(\mu)$. Принимая во внимание (55) и (56), получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} G_{\mu}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty} \tau(s) \frac{\partial}{\partial x}\Gamma_1^{\mu}(x-s,y)\, ds = \frac{y^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} + \int_{-\infty}^{\infty} \tau(s) \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Gamma_1^{\mu}(x-s,y)\, ds.$$

Отсюда, в силу (47), следует (66) при $n = 1$.

Если $\mu = 0$, то из неравенств (54) и (56) следует законность дифференцирования (дважды по x_j и дробного порядка σ_k по y) под знаком интеграла в (64) и, с учетом (47), справедливость формулы (66).

В случае, когда $\mu > 0$ и $n \geq 2$, равенство (66) следует из (61) и соотношения

$$G_{\mu}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} \tau(s) \Gamma_n^{\mu}(x-s,y)\, ds = \int_0^y \int_{\mathbb{R}^n} \tau(s) \frac{t^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} \Gamma_n(x-s,y-t)\, ds\, dt.$$

Перейдем к доказательству равенства (67). В силу (65), с учетом (9), имеем

$$(68) \quad I = D_{0y}^{\alpha-1} \sum_{k:\, \alpha_k = \alpha} \lambda_k\, G_{1-\beta_k}(x,y) =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \lambda_k\, G_{1-\sigma_k}(x,y) - \sum_{k:\, \alpha_k < \alpha} \lambda_k\, G_{1-\sigma_k}(x,y) = I_1 - I_2.$$

Принимая во внимание (64), перепишем I_1 в виде

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \tau(s) \sum_{k=1}^{m} \lambda_k\, \Gamma_n^{1-\sigma_k}(x-s,y)\, ds$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n \setminus |x-s|<\varepsilon} [\tau(s) - \tau(x)] \sum_{k=1}^{m} \lambda_k\, \Gamma_n^{1-\sigma_k}(x-s,y)\, ds$$
$$+ \int_{|x-s|<\varepsilon} [\tau(s) - \tau(x)] \sum_{k=1}^{m} \lambda_k\, \Gamma_n^{1-\sigma_k}(x-s,y)\, ds$$
$$+ \tau(x) \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k\, \Gamma_n^{1-\sigma_k}(x-s,y)\, ds = I_{11} + I_{12} + I_{13}.$$

Из формул (44) и (48) следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \, \Gamma_n^{1-\sigma_k}(x-s,y)\,ds = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \, D_{0y}^{\sigma_k} \right) \Gamma_n^1(x-s,y)\,ds = 1.$$

Поэтому, с учетом оценок (54) и (58), для любого положительного ε справедливы соотношения

$$\lim_{y\to 0} I_{11} = 0, \qquad |I_{12}| \le \sup_{|x-s|<\varepsilon} |\tau(s) - \tau(x)|\,, \qquad I_{13} = \tau(x).$$

В силу непрерывности $\tau(x)$ и произвольности выбора ε это означает, что

$$\lim_{y\to 0} I_1 = \tau(x). \tag{69}$$

Далее оценим I_2. Из неравенства (54), с учетом замечания 1, следует, что

$$|G_{1-\sigma_k}(x,y)| \le C y^{\sigma(1-\theta)-\sigma_k} \int_{\mathbb{R}^n} |x-s|^{2\theta-n}\,ds,$$

для любого $\theta > 0$. Суммирование в I_2 ведется лишь по тем индексам k для которых $\alpha_k < \alpha$. Поэтому, если выполнено условие (12), то очевидно

$$\lim_{y\to 0} I_2 = 0.$$

Вместе с (68) и (69) последнее доказывает (67). □

6. Доказательство теоремы 1

С учетом обозначений (59) и (64) функция $u(x,y)$, заданная соотношением (13), может быть записана в виде

$$u(x,y) = \sum_{k:\,\alpha_k=\alpha} \lambda_k \, G_{1-\beta_k}(x,y) + F(x,y) = G(x,y) + F(x,y). \tag{70}$$

Из предельных соотношений (60) и (67) следует, что функция $u(x,y)$ удовлетворяет начальному условию (5).

Докажем, что $u(x,y)$ является решением уравнения (1). Из формулы (17) следует, что

$$D_{0y}^{\{\alpha_k,\beta_k\}} g(y) = D_{0y}^{\sigma_k} g(y) - \frac{y^{-\beta_k}}{\Gamma(1-\beta_k)} \lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha_k-1} g(y). \tag{71}$$

Отсюда получаем

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k D_{0y}^{\{\alpha_k,\beta_k\}} - \Delta_x \right) F(x,y) = \\ = \left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k D_{0y}^{\sigma_k} - \Delta_x \right) F(x,y) - \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k y^{-\beta_k}}{\Gamma(1-\beta_k)} \lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha_k-1} F(x,y).$$

В силу определения α, формулы (16) и соотношения (60) имеем

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha_k-1} F(x,y) = \lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha_k-\alpha} D_{0y}^{\alpha-1} F(x,y) = 0.$$

Вместе с равенством (61) это означает, что

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k D_{0y}^{\{\alpha_k,\beta_k\}} - \Delta_x \right) F(x,y) = f(x,y). \tag{72}$$

Аналогично, для функции $G(x,y)$ в силу (71) имеем

$$\left(\sum_{k=1}^{m}\lambda_k D_{0y}^{\{\alpha_k,\beta_k\}}-\Delta_x\right)G(x,y)= \tag{73}$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{m}\lambda_k D_{0y}^{\sigma_k}-\Delta_x\right)G(x,y)-\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k y^{-\beta_k}}{\Gamma(1-\beta_k)}\lim_{y\to 0}D_{0y}^{\alpha_k-1}G(x,y).$$

При этом, принимая во внимание (66) и (67), имеют место равенства

$$\left(\sum_{k=1}^{m}\lambda_k D_{0y}^{\sigma_k}-\Delta_x\right)G(x,y)=\tau(x)\left(\sum_{k\colon\,\alpha_k=\alpha}\frac{\lambda_k y^{-\beta_k}}{\Gamma(1-\beta_k)}\right), \tag{74}$$

и

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k y^{-\beta_k}}{\Gamma(1-\beta_k)}\lim_{y\to 0}D_{0y}^{\alpha_k-1}G(x,y)=\tau(x)\left(\sum_{k\colon\,\alpha_k=\alpha}\frac{\lambda_k y^{-\beta_k}}{\Gamma(1-\beta_k)}\right). \tag{75}$$

При получении последнего соотношения мы воспользовались равенством

$$\lim_{y\to 0}D_{0y}^{\alpha_k-1}G(x,y)=\lim_{y\to 0}D_{0y}^{\alpha_k-\alpha}D_{0y}^{\alpha-1}G(x,y)=0,$$

справедливым при $\alpha_k<\alpha$ в силу непрерывности $D_{0y}^{\alpha-1}G(x,y)$ вплоть до $y=0$. Из (73), (74) и (75) следует, что

$$\left(\sum_{k=1}^{m}\lambda_k D_{0y}^{\{\alpha_k,\beta_k\}}-\Delta_x\right)G(x,y)=0.$$

Последнее соотношение вместе с (72) доказывает, что функция $u(x,y)$, заданная равенством (70) (и, следовательно, (13)) является решением уравнения (1).

7. Доказательство теоремы 2

Рассмотрим функцию

$$v(x,y,\xi,\eta)\equiv\Gamma_n(x-\xi,y-\eta)h_\varepsilon(|x-\xi|)h^r(|x-\xi|),$$

где $\varepsilon>0$, $r>0$ и

$$h_\varepsilon(t)=\begin{cases}1, & \text{если}\quad t>\varepsilon,\\ 30\varepsilon^{-5}\int_0^t s^2(\varepsilon-s)^2ds, & \text{если}\quad t\in[0,\varepsilon],\end{cases}$$

$$h^r(t)=\begin{cases}1, & \text{если}\quad t<r,\\ 30\int_t^{r+1}(s-r)^2(r+1-s)^2ds, & \text{если}\quad t\in[r,r+1],\\ 0, & \text{если}\quad t>r+1,\end{cases}\qquad (r>0).$$

Очевидно, что $h_\varepsilon(t)$, $h^r(t)\in C^2[0,\infty)$; $0\le h_\varepsilon(t)$, $h^r(t)\le 1$; $h_\varepsilon'(t)=h_\varepsilon''(t)=0$ при $t\ge\varepsilon$; и $h^{r\prime}(t)=h^{r\prime\prime}(t)=0$, если $t\notin(r,r+1)$.

Примем обозначения

$$\mathbf{L}_{\xi,\eta}=\left(\sum_{k=1}^{m}\lambda_k D_{0\eta}^{\{\alpha_k,\beta_k\}}-\Delta_\xi\right)\quad\text{и}\quad \mathbf{L}^*_{\xi,\eta}=\left(\sum_{k=1}^{m}\lambda_k D_{y\eta}^{\{\beta_k,\alpha_k\}}-\Delta_\xi\right).$$

Пусть $u(x,y)$ — регулярное решение задачи однородной задачи (1), (5) (то есть $\tau(x)\equiv 0$ и $f(x,y)\equiv 0$), и выполнено условие (14). В силу (15), принимая во внимание равенства (44), (47), а также свойства функций $h_\varepsilon(t)$ and $h^r(t)$, получаем

$$0=\int_0^y\int_{\mathbf{R}^n}v(x,y,\xi,\eta)\mathbf{L}_{\xi,\eta}u(\xi,\eta)\,d\xi d\eta=\int_0^y\int_{\mathbf{R}^n}u(\xi,\eta)\mathbf{L}^*_{\xi,\eta}v(x,y,\xi,\eta)d\xi d\eta$$

$$=\int_0^y\int_{r<|x-\xi|<r+1}u(\xi,\eta)B(x-\xi,y-\eta)\,d\xi d\eta-\int_0^y\int_{|x-\xi|<\varepsilon}u(\xi,\eta)A(x-\xi,y-\eta)\,d\xi d\eta$$

$$=\int_0^y\int_{|\xi|<\varepsilon}[u(x,y)-u(x+\xi,y-\eta)]A(\xi,\eta)\,d\xi d\eta-u(x,y)\int_0^y\int_{|\xi|<\varepsilon}A(\xi,\eta)\,d\xi d\eta$$

$$+\int_0^y\int_{r<|x-\xi|<r+1}u(\xi,\eta)B(x-\xi,y-\eta)\,d\xi d\eta. \tag{76}$$

где

$$A(\xi,\eta)=\sum_{j=1}^n\left(2\frac{\partial}{\partial\xi_j}\Gamma_n(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\xi_j}h_\varepsilon(|\xi|)+\Gamma_n(\xi,\eta)\frac{\partial^2}{\partial\xi_j^2}h_\varepsilon(|\xi|)\right), \tag{77}$$

$$B(\xi,\eta)=-\sum_{j=1}^n\left(2\frac{\partial}{\partial\xi_j}\Gamma_n(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial\xi_j}h^r(|\xi|)+\Gamma_n(\xi,\eta)\frac{\partial^2}{\partial\xi_j^2}h^r(|\xi|)\right).$$

Из оценок (54) и (55), принимая во внимание условие (14), для любой точки (x,y) из слоя $\mathbb{R}^n\times(0,T_0)$, $T_0=\min\left\{T,\sigma\left(\frac{2-\sigma}{\chi}\right)^{\frac{2-\sigma}{\sigma}}\left(\frac{\lambda}{4}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right\}$, следует, что

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^y\int_{r<|x-\xi|<r+1}u(\xi,\eta)B(x-\xi,y-\eta)\,d\xi d\eta=0, \tag{78}$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_\delta^y\int_{|\xi|<\varepsilon}[u(x+\xi,y-\eta)-u(x,y)]A(\xi,\eta)\,d\xi d\eta=0$$

и

$$\int_0^\delta\int_{|\xi|<\varepsilon}|A(\xi,\eta)|\,d\xi d\eta<\infty,$$

где δ — любое положительное, достаточно малое число. Поэтому

$$\left|\int_0^y\int_{|\xi|<\varepsilon}[u(x+\xi,y-\eta)-u(x,y)]A(\xi,\eta)\,d\xi d\eta\right|$$
$$\le C\sup_{|\xi|<\varepsilon,\eta\in I^\delta}|u(x+\xi,y-\eta)-u(x,y)|+O(\varepsilon).$$

В силу непрерывности функции $u(x,y)$ в окрестности точки (x,y) и произвольности выбора δ получаем

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_0^y\int_{|\xi|<\varepsilon}[u(x+\xi,y-\eta)-u(x,y)]A(\xi,\eta)\,d\xi d\eta=0. \tag{79}$$

Таким образом, из (76), (78) и (79), для любой точки $(x,y)\in\mathbb{R}^n\times(0,T_0)$, следует, что

$$u(x,y)\lim_{\varepsilon\to0}J(\varepsilon)=0,\qquad\text{где}\qquad J(\varepsilon)=\int_0^y\int_{|\xi|<\varepsilon}A(\xi,\eta)\,d\xi d\eta. \tag{80}$$

Вычислим предел $\lim_{\varepsilon\to 0} J(\varepsilon)$. Принимая во внимание формулы (44), (45) и (77) перепишем $J(\varepsilon)$ в виде

$$J(\varepsilon) = \int_{|\xi|<\varepsilon} \sum_{j=1}^{n} \left(-4\pi\xi_j \Gamma_{n+2}^1(\xi, y) \frac{\partial}{\partial \xi_j} h_\varepsilon(|\xi|) + \Gamma_n^1(\xi, y) \frac{\partial^2}{\partial \xi_j^2} h_\varepsilon(|\xi|) \right) d\xi.$$

Отсюда, с учетом соотношений

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} h_\varepsilon(|\xi|) = \frac{\xi_j}{|\xi|} h'_\varepsilon(|\xi|), \qquad \Delta_\xi h_\varepsilon(|\xi|) = h''_\varepsilon(|\xi|) + \frac{n-1}{|\xi|} h'_\varepsilon(|\xi|),$$

и

$$h'_\varepsilon(\varepsilon|\zeta|) = \varepsilon^{-1} h'_1(|\zeta|), \qquad h''_\varepsilon(\varepsilon|\zeta|) = \varepsilon^{-2} h''_1(|\zeta|),$$

после замены $\xi = \varepsilon\zeta$, получаем

$$J(\varepsilon) = \int_{|\xi|<\varepsilon} \left[-4\pi|\xi| \Gamma_{n+2}^1(\xi, y) h'_\varepsilon(|\xi|) + \Gamma_n^1(\xi, y) \left(h''_\varepsilon(|\xi|) + \frac{n-1}{|\xi|} h'_\varepsilon(|\xi|) \right) \right] d\xi$$

$$= \int_{|\zeta|<1} \left[-4\pi|\zeta| \varepsilon^n \Gamma_{n+2}^1(\varepsilon\zeta, y) h'_1(|\zeta|) + \varepsilon^{n-2} \Gamma_n^1(\varepsilon\zeta, y) \left(h''_1(|\zeta|) + \frac{n-1}{|\zeta|} h'_1(|\zeta|) \right) \right] d\zeta.$$

Из определения (43), с учетом (34) следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{n-2} \Gamma_n^1(\varepsilon\zeta, y) = C_n \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) 2^{n-2} |\zeta|^{2-n}.$$

Отсюда, принимая во внимание равенство

$$\int_{|\zeta|<1} f(|\zeta|) d\zeta = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^1 s^{n-1} f(s)\, ds,$$

после простых преобразований, получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J(\varepsilon) = \frac{1}{n-2} \int_0^1 [s h''_1(s) + (3-n) h'_1(s)]\, ds = -1.$$

В силу (80) последнее доказывает, что $u(x, y) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in (0, T_0)$.

Докажем, что $u(x, y) = 0$ для любого $y > 0$. Предположим, что это не так. Пусть $y_0 = \inf\{y : u(x, y) \neq 0$ для некоторого $x \in \mathbb{R}^n\}$. Очевидно $y_0 \geq T_0$. Рассмотрим функцию $\tilde{u}(x, y) = u(x, y + y_0)$. В силу определения y_0 для всякого положительного достаточно малого ε найдется $x \in \mathbb{R}^n$ такое, что

$$\tilde{u}(x, \varepsilon) \neq 0. \tag{81}$$

В силу определения $\tilde{u}(x, y)$ имею место равенства

$$D_{0,y+y_0}^{\{\alpha_k,\beta_k\}} u(x, y) = D_{0y}^{\{\alpha_k,\beta_k\}} \tilde{u}(x, y); \qquad \lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha_k - 1} \tilde{u}(x, y) = 0; \qquad k = \overline{1, m}.$$

Отсюда следует, что функция $\tilde{u}(x, y)$ является решением однородного уравнения (1) и удовлетворяет нулевому начальному условию (5). Поэтому, по доказанному выше, $\tilde{u}(x, y) = 0$, по крайней мере для всех $y \in (0, T_0)$. Однако это противоречит (81). Следовательно $u(x, y) = 0$ для любых $x \in \mathbb{R}^n$ и $y > 0$.

References

[1] M.M. Dzhrbashyan, A.B. Nersesyan, *Fractional derivatives and the Cauchy problem for differential equations of fractional order*, Izv. Akad. Nauk Armenian SSR Matem., textbf3:1 (1968), 3–28. (Russian)

[2] A.M. Nakhushev, *Fractional calculus and its applications*, Fizmatlit, Moscow, 2003. (Russian) Zbl 1066.26005

[3] M. Caputo, *Diffusion with space memory modelled with distributed order space fractional differential equations*, Annals of Geophysics, **46**:2 (2003), 223–234.

[4] Z. Jiao, Y.-Qu. Chen, I. Podlubny, *Distributed-Order Dynamic Systems: Stability, Simulation, Applications and Perspectives*, Springer, 2012. Zbl 06009864

[5] V. Volterra, *Theory of functionals and of integral and integro-differential equations*, Dover Publications, 2005.

[6] A.M. Nakhushev, *A contribution to fractional calculus*, Differ. Equations, **24**:2 (1988), 239–247. Zbl 0663.26005

[7] *Diethelm K., Ford N.J. Numerical analysis for distributed-order differential equations*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **225** (2009), 96–104. Zbl 1159.65103

[8] W. Wyss, *The fractional diffusion equation*, J. Math. Phys., **27**:11 (1986), 2782–2785. Zbl 0632.35031

[9] W.R. Schneider, W. Wyss, *Fractional diffusion and wave equations*, J. Math. Phys., **30**:1 (1989), 134–144. Zbl 0692.45004

[10] A.N. Kochubei, *Fractional-order diffusion*, Differ. Equations, **26**:4 (1990), 485–492. Zbl 0729.35064

[11] Ya. Fujita, *Integrodifferential equation which interpolates the heat equation and the wave equation I, II*, Osaka J. Math., **27**:2, **27**:4 (1990), 309–321, 797–804. Zbl 0790.45009, Zbl 0796.45010

[12] F. Mainardi, *The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation*, Appl. Math. Lett., **9**:6 (1996), 23–28. Zbl 0879.35036

[13] E. Buckwar, Yu. Luchko, *Invariance of a partial differential equation of fractional order under the Lie group of scaling transformations*, J. Math. Anal. Appl., **227**:1 (1998), 81–97. Zbl 0932.58038

[14] R. Gorenflo, Yu. Luchko, F. Mainardi, *Wright functions as scale-invariant solutions of the diffusion-wave equation*, J. Comput. Appl. Math., **118**:1-2 (2000), 175–191. Zbl 0973.35012

[15] R. Gorenflo, A. Iskenderov, Yu. Luchko, *Mapping between solutions of fractional diffusion-wave equations*, Fract. Calcul. and Appl. Anal., **3**:1 (2000), 75–86. Zbl 1033.35161

[16] O.P. Agrawal, *Solution for a fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain*, Nonlinear Dynam., **29**:1 (2002), 145–155. Zbl 1009.65085

[17] A.V. Pskhu, *Solution of the first boundary value problem for a fractional-order diffusion equation*, Differ. Equ., **39**:9 (2003), 1359–1363. Zbl 1071.35029

[18] A.V. Pskhu, *Solution of boundary value problems for the fractional diffusion equation by the Green function method* Differ. Equ., **39**:10 (2003), 1509–1513. Zbl 1070.45010

[19] S.D. Eidelman, A.N. Kochubei, *Cauchy problem for fractional diffusion equations*, Journal of Differential Equations, **199** (2004), 211–255. Zbl 1068.35037

[20] A.V. Pskhu, *The fundamental solution of a diffusion-wave equation of fractional order*, Izvestiya: Mathematics, **73**:2 (2009), 351–392. Zbl 1172.26001

[21] Yu. Luchko, *Initial-boundary-value problems for the one-dimensional time-fractional diffusion equation*, Fractional Calculus and Applied Analysis, **15**:1 (2012), 141–160. Zbl 1276.26018

[22] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, vol. 204 of North-Holland Mathematics Studies, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 2006. Zbl 1092.45003

[23] A.V. Pskhu, *Partial differential equations of fractional order*, Nauka, Moscow, 2005. (Russian)

[24] V. Daftardar-Gejji, S. Bhalekar, *Boundary value problems for multi-term fractional differential equations*, J. Math. Anal. Appl., **345** (2008), 754–765. Zbl 1151.26004

[25] Yu. Luchko, *Initial-boundary-value problems for the generalized multi-term time-fractional diffusion equation*, J. Math. Anal. Appl., **374** (2011), 538–548. Zbl 1202.35339

[26] H. Jiang, F. Liu, I. Turner, K. Burrage, *Analytical solutions for the multi-term time-fractional diffusion-wave/diffusion equations in a finite domain*, Computers & Mathematics with Applications., **64**:10 (2012), 3377–3388. Zbl 1268.35124

[27] X. Liu, J. Wang, X. Wang, Y. Zhou, *Exact solutions of multi-term fractional diffusion-wave equations with Robin type boundary conditions*, Applied Mathematics and Mechanics, **35**:1 (2014), 49–62. Zbl 1284.35455

[28] Yu. Luchko, *Maximum principle and its application for the time-fractional diffusion equations*, Fractional Calculus and Applied Analysis, **14**:1 (2011), 110–124. Zbl 1273.35297

[29] M. Al-Refai, Yu. Luchko, *Maximum principle for the multi-term time-fractional diffusion equations with the Riemann–Liouville fractional derivatives*, Applied Mathematics and Computation, **257** (2015), 40–51. Zbl 1273.35297

[30] Z. Li, Y. Liu, M. Yamamoto, *Initial-boundary value problems for multi-term time-fractional diffusion equations with positive constant coefficients*, Applied Mathematics and Computation, **257** (2015), 381–397. Zbl 1338.35471

[31] F. Liu , M. M. Meerschaert, R. J. McGough, P. Zhuang, Q. Liu, *Numerical methods for solving the multi-term time-fractional wave-diffusion equation*, Fractional Calculus and Applied Analysis, **16**:1 (2013), 9–25. Zbl 1312.65138

[32] A.A. Alikhanov, *Numerical methods of solutions of boundary value problems for the multi-term variable-distributed order diffusion equation*, Applied Mathematics and Computation, **268**:1, (2015), 12–22.

[33] G. Li, C. Sun, X. Jia, D. Du, *Numerical Solution to the Multi-Term Time Fractional Diffusion Equation in a Finite Domain*, Numer. Math. Theor. Meth. Appl., **9**:3 (2016), 337–357.

[34] A. Tychonoff, *Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur*, Mat. Sb., **42**:2 (1935), 199–216. JFM 61.1203.05

[35] A.V. Pskhu, *Initial-value problem for a linear ordinary differential equation of noninteger order*, Sbornik: Mathematics, **202**:4 (2011), 571–582. Zbl 1226.34005

[36] E.M. Wright, *On the coefficients of power series having exponential singularities*, J. London Math. Soc., **8**:29 (1933), 71–79. Zbl 0006.19704

[37] E.M. Wright, *The generalized Bessel function of order greater than one*, Quart. J. Math., Oxford Ser., **11** (1940), 36–48. Zbl 0023.14101

[38] B. Stanković, *On the function of E.M. Wright*, Publications de L'institut Mathématique, Beograde, **10**:24 (1970), 113–124. Zbl 0204.08404

[39] M.A. Lavrent'ev, B.V. Shabat, *Methods of the complex function theory*, Nauka, Moscow, 1987. (Russian) Zbl 0633.30001

Arsen Vladimirovich Pskhu
Institute of Applied Mathematics and Automation,
Shortanova street, 89A,
360000, Nalchik, Russia
E-mail address: pskhu@list.ru