S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 1099–1115 (2016) УДК 512.542
DOI 10.17377/semi.2016.13.087 MSC 20D06, 20D15

О ПЕРЕСЕЧЕНИИ ДВУХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ПОДГРУПП В НЕБОЛЬШИХ КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

В.И. ЗЕНКОВ

Abstract. It is proved that if G is a finite group whose socle is some simple group from "Atlas of finite groups"then, for any nilpotent subgroups A and B of G, there exists an element g of G such that $A \cap B^g = 1$, besides several cases when A and B are 2- or 3-groups.

Keywords: finite group, simple group, nilpotent subgroup, interesection of subgroups.

Введение

Пусть G — конечная группа, A и B — подгруппы из G. Рассмотрим множество всех пересечений вида $A \cap B^g$, $g \in G$. Определим в этом множестве два подмножества: M — множество всех минимальных по включению пересечений и m — множество всех минимальных по порядку пересечений. Ясно, что $m \subseteq M$ и для подгрупп $\min_G(A,B) = \langle m \rangle$ и $\mathrm{Min}_G(A,B) = \langle M \rangle$ имеем $\min_G(A,B) \leq \mathrm{Min}_G(A,B)$. Вообще говоря, в некоторых случаях, как, например, в группе $G \simeq \Sigma_4$ для подгрупп $A \in \mathrm{Syl}_2(G)$ и $C_4 \simeq B < A$ имеем $M = \{B, \langle t \rangle^f, \langle t \rangle^{f^2}\}$, где t — инволюция из $\Omega(B)$, а f — элемент порядка три из G. Следовательно, $M \supset m$ и $A = \langle M \rangle > \langle m \rangle = O_2(G)$.

Подгруппы $\mathrm{Min}_G(A,B)$ и $\min_G(A,B)$ будут использоваться при изучении пересечений подгрупп A и B в группе G в силу эквивалентности следующих условий:

1) $A \cap B^g \neq 1$ для любого элемента g из G;

2) $\mathrm{Min}_G(A,B) \neq 1$;

Zenkov, V.I., On intersection of two nilpotent subgroups in small finite groups.

Работа выполнена счет гранта Российского научного фонда (проект 15-11-10025) (теорема 1), а также соглашения между Министерством образования и науки РФ и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006 (теорема 2).

Поступила 24 ноября 2016 г., опубликована 1 декабря 2016 г.

3) $\min_G(A,B) \neq 1$.

В частности, если подгруппы A и B абелевы, то согласно лемме 1.1, $\mathrm{Min}_G(A,B) \leq F(G)$, где $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G. То же самое заключение справедливо по лемме 1.2, если подгруппа A — циклическая, а B — нильпотентная группы. Однако, как показывает рассмотренный выше пример группы $G \simeq \Sigma_4$ заключение $\mathrm{Min}_G(A,B) \leq F(G)$ нарушается в том случае, если подгруппа B — циклическая группа, а $A \simeq D_8$, т.е. A — минимальная неабелева группа. В случае, когда G — простая неабелева группа, а подгруппы A и B примарны, по лемме 1.3 $\mathrm{Min}_G(A,B) = 1$. Однако уже, например, для группы $G \simeq \mathrm{Aut}(L_n(2))$, $n \geq 3$, имеем $\min_G(S,S) \neq 1$ для $S \in \mathrm{Syl}_2(G)$ (см. [8, теорема $B2$]). Более того, в работе [13, теорема 2] приведено описание в $G \simeq \mathrm{Aut}(L_n(2))$ при $n \geq 3$ с точностью до сопряжения всех упорядоченных пар (A,B) примарных подгрупп, для которых $\min_G(A,B) \neq 1$, а в работе [14] дано описание с точностью до сопряжения всех упорядоченных пар (A,B) примарных подгрупп нечетного порядка в почти простой группе. Таким образом, за известными исключениями, если в почти простой группе G для примарных подгрупп A и B имеем $\min_G(A,B) \neq 1$, то A и B — 2-группы.

Если же A и B — нильпотентные подгруппы в почти простой группе G и $\min_G(A,B) \neq 1$, то в случае $\mathrm{Soc}(G) \simeq A_n$ при $n \geq 6$ по лемме 1.7 имеем $n = 6$ или $n = 8$, причем в обоих случаях A и B — 2-группы. Так как массив всех неабелевых простых групп делится на три части, а именно, знакопеременные, спорадические и простые группы лиева типа, причем в $\mathrm{Aut}(A_n)$ при $n = 6, 8$ и в $\mathrm{Aut}(L_n(2))$ при $n \geq 3$ для силовской 2-подгруппы S имеем $\min_G(S,S) \neq 1$, то возникает вопрос о том, чему равна подгруппа $\min_G(A,B)$ в случае, когда $\mathrm{Soc}(G)$ — спорадическая группа, в которой A и B — нильпотентные подгруппы в G?

Для полного ответа на этот вопрос требуется его изучение в некоторых простых неспорадических секциях из централизаторов элементов простого порядка в группе автоморфизмов спорадической конечной простой неабелевой группы. В том случае, когда такая секция является простой неабелевой, она принадлежит следующему списку (S), который получен из [5, таблицы $5.3a - 5.3z$]:
(S) A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, $L_2(7)$, $L_2(8)$, $L_2(17)$, $L_3(3)$, $L_3(4)$, $U_3(3)$, $U_3(5)$, $PSp_4(3)$, $L_4(3)$, $U_4(3)$, $U_5(2)$, $Sp_6(2)$, $U_6(2)$, $\Omega_7(3)$, $\Omega_8^+(2)$, $P\Omega_8^+(3)$, $G_2(3)$, $G_2(4)$, $F_4(2)$, ${}^2E_6(2)$, $Sz(8)$.

Для классических и знакопеременных групп из списка (S) получены следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть K — классическая или знакопеременная группа из списка (S), $\mathrm{Inn}(K) \leq G \leq \mathrm{Aut}(K)$, A и B — нильпотентные подгруппы из G, причем хотя бы одна из них примарна. Если $\min_G(A,B) \neq 1$, то либо*

(1) $\pi(A) = \pi(B) = \{3\}$, $K \simeq P\Omega_8^+(3)$, $G \simeq P\Omega_8^+(3).C_3$ *или* $G \simeq P\Omega_8^+(3).\Sigma_3$, *где $P\Omega_8^+(3)$ расширяется с помощью графовых автоморфизмов, либо*

(2) $\pi(A) = \pi(B) = \{2\}$, $G \simeq \mathrm{Aut}(A_6)$, $\mathrm{Aut}(L_3(2))$, $\mathrm{Aut}(L_4(2))$, $L_3(4).2$ *или* $L_3(4).2^2$, *где некоторая инволюция из $G \backslash \mathrm{Soc}(G)$ индуцирует на $\mathrm{Soc}(G)$ графовый автоморфизм, $\Omega_8^+(2).2$, где внешняя инволюция индуцирует на $\Omega_8^+(2)$ графовый автоморфизм.*

Теорема 2. *Пусть K — классическая или знакопеременная группа из списка (S), $\mathrm{Inn}(K) \leq G \leq \mathrm{Aut}(K)$, A и B — нильпотентные подгруппы из G. Если $\min_G(A,B) \neq 1$, то хотя бы одна из подгрупп A или B примарна.*

Из теорем 1 и 2 следует утвердительный ответ на вопрос 15.40 из [4] для классических и знакопеременных групп из списка (S), а также утвердительный ответ на вопрос 17.40 из [4] для групп, цоколь которых является классической или знакопеременной группой из списка (S).

1. Обозначения и предварительные сведения

Мы используем, в основном, обозначения из [6] и [7].

Лемма 1.1 [1, теорема 1]. *Пусть G — конечная группа, A и B — абелевы подгруппы из G. Тогда* $\min_G(A,B) \le \mathrm{Min}_G(A,B) \le F(G)$.

Лемма 1.2 [3, лемма 2.1]. *Пусть G — конечная группа, A — циклическая подгруппа из G, B — нильпотентная подгруппа из G. Тогда* $\min_G(A,B) \le \mathrm{Min}_G(A,B) \le F(G)$.

Лемма 1.3 [2, теорема 1]. *Пусть G — конечная простая неабелева группа, A и B — примарные подгруппы из G. Тогда* $\mathrm{Min}_G(A,B) = \min_G(A,B) = 1$.

Лемма 1.4 [8, следствие из теоремы B]. *Пусть G — конечная неразрешимая группа с цоколем, изоморфным $L_2(q)$, A и B — примарные подгруппы из G и* $\min_G(A,B) \ne 1$. *Тогда A и B — 2-подгруппы и либо $q = 9$, либо q — простое число Ферма или Мерсенна.*

Лемма 1.5 [8, лемма 3.2]. *Пусть G — конечная группа, p — простое число, M — p-локальная подгруппа из G такая, что $M = N_G(O_p(M))$. Если в M найдутся две силовские p-подгруппы Q_1 и Q_2 такие, что $Q_1 \cap Q_2 = O_p(M)$, то в G найдутся две силовские p-подгруппы P_1 и P_2 такие, что $P_1 \cap P_2 = O_p(M)$ и $P_1 \ge Q_1$, а $P_2 \ge Q_2$.*

Лемма 1.6 [9, лемма 1]. *Пусть G — конечная группа, G_1, A и B — подгруппы из G такие, что G_1 содержит A. Если $G_1 \trianglerighteq G_2$, и $G_2 \cap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G, причем в факторгруппе $\bar{G}_1 = G_1/G_2$ имеем $\overline{A} \cap \overline{(G_1 \cap B^g)}^{\bar{g}_1} = \bar{1}$ для некоторого элемента $g_1 \in G_1$, то $A \cap B^{gg_2} = 1$ для любого элемента g_2 из смежного класса g_1G_2.*

Лемма 1.7. [9, теорема]. *Пусть G — симметрическая группа Σ_n или знакопеременная группа A_n, $n \ge 5$ и A, B — нильпотентные подгруппы из G. Тогда либо* $\min_G(A,B) = 1$, *либо $n = 8$, $G \simeq \Sigma_8$, A и B — 2-подгруппы.*

Лемма 1.8. [12, теорема 1.1]. *Пусть G — разрешимая конечная группа $O_p(G) = 1$ и V — конечный точный FG-модуль над полем F характеристики p. Пусть H — нильпотентная подгруппа из G. Допустим, что H не содержит подгрупп, изоморфных $Z_2 \wr Z_2$, а если $p = 2$, то допустим к тому же, что H не содержит подгрупп, изоморфных $Z_r \wr Z_r$, где r — простое число Мерсенна. Тогда $H \cap H^v = 1$ для некоторого элемента v из V.*

2. Доказательство теоремы 1

Пусть G — контрпример к теореме 1 и порядок G при этом минимален. Без ограничения общности будем считать, что подгруппа A примарна. Выберем пару A, B так, чтобы число $|A||B|$ было минимально.

Лемма 2.1. $|\pi(B)| > 1$.

Доказательство. Допустим, что $|\pi(B)| = 1$. Тогда условие $\min_G(A, B) \neq 1$ влечет, что $\pi(A) = \pi(B) = \{p\}$, где p — простое число. Но в этом случае для силовской подгруппы S из G, содержащей A и, без ограничения общности, содержащей B, имеем $\min_G(S, S) \neq 1$ и, согласно [8, теорема $B1$, лемма 3.18], либо G — не контрпример к теореме 1, либо $p = 2$ и $G \simeq \mathrm{Aut}(L_3(3))$, $\mathrm{Aut}(U_3(3))$, $U_3(5).2$, $\mathrm{Aut}(PSp_4(3))$, $L_4(3).2$, $L_4(3).2^2$ или $U_4(3).2$.

Если G определена над полем порядка 3, то G — не контрпример к теореме 1 согласно [11, теорема].

Если $G \simeq U_3(5).2$, то согласно [6, с. 34] силовская 2-подгруппа S из G — расширение полудиэдральной группы порядка 16 с помощью группы, порожденной инволюцией j. Тогда $|j^G \cap S| = 2$, а $|i^G \cap S| = 5$ для инволюции i из $S \cap \mathrm{Soc}(G)$. Поэтому для числа $\mathrm{orb}_2(G)$ орбит силовских 2-подгрупп из G при сопряжении элементами из S, которые пересекаются с S тривиально, согласно [16, лемма 1] имеем

$$\mathrm{orb}_2(G) > \Big(\frac{|G|}{N_G(S)} - |j^G \cap S|^2 \frac{|C_G(j)|}{N_G(S)} - |i^G \cap S|^2 \frac{|C_G(i)|}{N_G(S)}\Big) \Big/ |S|$$
$$= \Big(\frac{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7}{2^5} - 4 \cdot \frac{240}{2^5} - \frac{5^2 \cdot 2 \cdot 240}{2^5}\Big) \Big/ 2^5 (3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 - 30 - 5^2 \cdot 15) \Big/ 2^5$$
$$= 15(3 \cdot 5^2 \cdot 7 - 2 - 25) \Big/ 2^5 > \frac{15}{45}(3 \cdot 5^2 \cdot 7 - 2 - 25) = (5^2 \cdot 7 - 9) > 1.$$

Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. $G = \mathrm{Soc}(G)A = \mathrm{Soc}(G)B$.

Доказательство. Допустим, что, например, $G_1 = \mathrm{Soc}(G)A \neq G$. Положим $B_1 = G_1 \cap B$. Тогда A и B_1 — подгруппы из $G_1 < G$ и по индукции в подгруппе G_1 либо $\min_{G_1}(A, B_1) = 1$, либо $\min_{G_1}(A, B_1) \neq 1$ и G_1 удовлетворяет заключению теоремы.

В первом случае имеем $A \cap B_1^{g_1} = 1$ для некоторого элемента g_1 из G_1. Следовательно, $A \cap B_1^{g_1} = A \cap (G_1 \cap B)^{g_1} = A \cap B^{g_1} = 1$. Противоречие с выбором числа $|A||B|$.

Во втором случае подгруппы A и B_1 являются p-группами для $p \in \{2, 3\}$. По лемме 1.3 $(A \cap \mathrm{Soc}(G)) \cap (B_1 \cap \mathrm{Soc}(G))^h = 1$ для некоторого h из $\mathrm{Soc}(G)$, но $A \cap B_1^h \neq 1$ в силу $\min_{G_1}(A, B_1) \neq 1$. Значит, по индукции $|A \cap B_1^h| = p$ и $A \cap B_1^h \in \min_{G_1}(A, B_1)$. Поэтому $G_1 \neq \mathrm{Soc}(G)$ и из заключения теоремы имеем, что при $p = 2$ A и B — 2-подгруппы и G не контрпример по лемме 2.1. Если же $p = 3$ и B — не 3-группа, то B накрывает факторгруппу $\overline{G} = G/_{\mathrm{Soc}(G)} \simeq \Sigma_3$, что противоречит нильпотентности B. Значит, $B = B_1$ и G — не контрпример по лемме 2.1.

Лемма доказана.

Лемма 2.3. *G — не контрпример к теореме* 1.

Доказательство. Допустим, что G — контрпример к теореме. Тогда по лемме 2.1 имеем $\{p\} = \pi(A) \neq \pi(B)$. Условие $\min_G(A, B) \neq 1$ влечет, что $\min_G(A, O_p(B)) \neq 1$. Поэтому из выбора числа $|A||B|$ следует, что группа G из заключения теоремы 1. Следовательно, $p \in \{2, 3\}$ и, без ограничения общности, можно считать, что A и $O_p(B)$ лежат в силовской p-подгруппе S из G.

Пусть $p = 3$. Тогда, согласно [14, теорема 1] имеем $A \cap O_3(B) \geq \min_G(S, S) = O_3(N_G(P))$, где P — минимальная собственная параболическая подгруппа группы $\mathrm{Soc}(G)$, соответствующая центральной вершине в схеме Дынкина для $\mathrm{Soc}(G)$. Так как $|S : \min_G(S, S)| = 3$, то A и B лежат в $N_G(P)$. Но тогда $O_{3'}(B) \neq 1$ точно действует на $O_3(N_G(P))$. Противоречие с нильпотентностью B.

Пусть $p = 2$. Если $\mathrm{Soc}(G) \simeq A_6$, то ввиду [8, лемма 3.27] $G \simeq \mathrm{Aut}(A_6)$ и, согласно [6, с. 5], в $G\backslash\mathrm{Soc}(G)$ содержится инволюция i такая, что $C_G(i) \simeq Z_2 \times (Z_5 \leftthreetimes Z_4)$, где $Z_5 \leftthreetimes Z_4$ — группа Фробениуса. Следовательно, в факторгруппе $\overline{C_G(i)} = C_G(i)/_{\langle i\rangle}$ для силовской 2-подгруппы S_1 из $C_G(i)$, лежащей в S, имеем $\overline{S}_1 \cap \overline{S}_1^{\overline{x}} = \overline{1}$ для некоторого элемента x из $C(i)$, что эквивалентно тому, что $S_1 \cap S_1^{x_1} = \langle i\rangle$ для некоторого элемента x_1 из C. Тогда, согласно лемме 1.5, $S \cap S^g = \langle i\rangle$ для некоторого элемента g из G. Значит, $\langle i\rangle \leq \min_G(O_2(B), A)$. Так как для любого элемента $s \in S$ имеем $(S \cap S^g)^s = \langle i\rangle^s = S \cap S^{gs} \geq O_2(B) \cap A^{gs} \neq 1$, то $O_2(B) \cap A^{gs} = \langle i\rangle^s$. Следовательно, $\langle i^S\rangle \leq O_2(B)$. Но $|i^S| = |S : C_S(i)| = 4$. Так как $i \in G_2 < G$, где $G_2 \simeq PGL_2(9)$, то $\langle i^S\rangle \simeq D_8$ и, таким образом, $O_2(B) \cap \mathrm{Soc}(G) \neq 1$. Тогда для инволюции z из $O_2(B) \cap \mathrm{Soc}(G)$, согласно [6, с. 5], имеем $C_{\mathrm{Soc}(G)}(z)$ — 2-группа. Противоречие с тем, что $O(B) \neq 1$.

Если $\mathrm{Soc}(G) \simeq L_3(4)$, то, согласно [6, с. 22], для инволюции i, индуцирующей на $\mathrm{Soc}(G)$ графовый автоморфизм, имеем $C_{\mathrm{Soc}(G)}(i) \simeq A_5$. Следовательно, для силовской 2-подгруппы S_1 из централизатора $C_G(i)$, изоморфного $Z_2 \times A_5$ или $Z_2 \times S_5$, в факторгруппе $\overline{C_G(i)} = C_G(i)/_{\langle i\rangle}$ по лемме 1.7 имеем $\overline{S}_1 \cap \overline{S}_1^{\overline{x}} = \overline{1}$ для некоторого элемента x из $C_G(i)$. Снова по лемме 1.5 имеем $S \cap S^g = \langle i\rangle$ и, аналогично случаю $\mathrm{Soc}(G) \simeq A_6$, доказываем, что $O_2(B) \cap \mathrm{Soc}(G)$ содержит инволюцию z, для которой $C_{\mathrm{Soc}(G)}(z)$ — 2-группа. Противоречие с тем, что $O(B) \neq 1$ и $O(B) \leq \mathrm{Soc}(G)$.

В оставшихся случаях $p = 2$ и группа $\mathrm{Soc}(G)$ определена над полем характеристики два.

Если $\mathrm{Soc}(G) \simeq L_3(2)$ или $\mathrm{Soc}(G) \simeq L_4(2)$, то, согласно [13, теорема 2], либо $\min_G(A, O_2(B)) = \min_G(S, S) = S$ в случае $\mathrm{Soc}(G) \simeq L_3(2)$ и тогда $A = B = S$ — противоречие, либо $\min_G(A, O_2(B)) = \min_G(S, S) = O_2(N_G(P))$, где P — минимальная параболическая подгруппа, соответствующая центральной вершине в схеме Дынкина для $\mathrm{Soc}(G) \simeq L_4(2)$. Без ограничения общности $A \cap O_2(B) \geq \min_G(S, S)$. Так как $|S : \min_G(S, S)| = 2$, то $B \leq N_G(P)$ и $O(B)$ действует точно на $O_2(N_G(P))$. Противоречие с нильпотентностью B.

В случаях $G \simeq \Omega_8^+(2).2$ или $\mathrm{Aut}(F_4(2))$ внешняя инволюция из $G\backslash\mathrm{Soc}(G)$ индуцирует на $\mathrm{Soc}(G)$ графовый автоморфизм порядка два. Согласно [6, с. 85] группа $G \simeq \Omega_8^+(2)2$ содержит инволюцию t из $G\backslash\mathrm{Soc}(G)$ с $C_G(i) \simeq Z_2 \times Sp_6(2)$, а группа $G \simeq \mathrm{Aut}(F_4(2))$ содержит инволюцию i с $C_G(i) \simeq Z_2 \times {}^2F_4(2)$ (см. [6, с. 170]). В обоих случаях для $\overline{C_G(i)} = C_G(i)/_{\langle i\rangle} \cong Sp_6(2)$ для силовской 2-подгруппы S_1 из $C_G(i)$, содержащейся в S, для противоположных силовских 2-подгрупп $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_1^{\overline{x}}$ из $\overline{C_G(i)}$, и для некоторых $\overline{x}$ из $\overline{C_G(i)}$ имеем $\overline{S} \cap \overline{S}^{\overline{x}} = 1$, что эквивалентно тому, что $S_1 \cap S_1^x = \langle i\rangle$. По лемме 3.2 из [8] имеем $S \cap S^g = \langle i\rangle$ для некоторого элемента g из G. Значит, $\langle i\rangle \in m$. Так как $S \cap S^g \geq O_2(B) \cap A^g \neq 1$, то $O_2(B) \cap A^g = \langle i\rangle$. Аналогично, $O_2(B) \cap A^{gs} = \langle i^s\rangle$ для любого элемента s из S. Поэтому $\langle i^s\rangle \leq O_2(B)$.

Так как $\langle i^s\rangle \triangleleft S$, то $\langle i^s\rangle \cap Z(S) \neq 1$. Но, согласно [6, с. 85 и с. 170], имеем $|Z(S)| = 2$. Следовательно, $B \leq C_G(z)$, где z — инволюция из $Z(S)$.

Если $\mathrm{Soc}(G) \simeq F_4(2)$, то, согласно [6, с. 170], имеем $C_G(z)/_{O_2(C_G(z))} \simeq \mathrm{Aut}(A_6)$. Следовательно, $O(B)$ — либо 3-группа, либо 5-группа, причем $[\langle i^S\rangle, O(B)] = 1$. Поскольку $C_{\mathrm{Soc}(G)}(i) \simeq {}^2F_4(2)$, то $|C_{\mathrm{Soc}(G)}(i)|_2 = 2^{10}$, а $|\mathrm{Soc}(G)|_{12} = 2^{24}$. Поэтому $|i^S| = 2^{14}$, откуда $\langle i^S\rangle \geq 2^{14}$. Но для элемента x порядка 3 из $\mathrm{Soc}(G)$ согласно [5, таблица 4.7.3A] имеем $C_{\mathrm{Soc}(G)}(x) \simeq L_3(2)^2$ или $C_{\mathrm{Soc}(G)}(x) \simeq Sp_6(2)$. Значит, $|C_{\mathrm{Soc}(G)}(x)| \leq 2^9$. Противоречие с тем, что $[\langle i^S\rangle, O(B)] = 1$. Если же $|x| = 5$, то, согласно [5, предложение 4.8.6B], имеем $O^{2'}(C_{\mathrm{Soc}(G)}(x)) \simeq B_2(2) \simeq \Sigma_6$ и противоречие получаем аналогично предыдущему.

Если $\mathrm{Soc}(G) \simeq \Omega_8^+(2)$, то, согласно [14, леммы 5 и 6], имеем $\langle z\rangle \neq \langle z^g\rangle \in m$ и $\langle (z^g)^S\rangle = O_2(P)$ для соответствующей параболической подгруппы P из $\mathrm{Soc}(G)$. Но $\langle (z^g)^S\rangle \leq O_2(B)$, поэтому $[\langle (z^g)^S\rangle, O(B)] = 1$. Противоречие с тем, что $\langle (z^g)^S\rangle = O_2(P)$.

Лемма доказана.

Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть G — контрпример к теореме 2 и порядок G при этом минимален. В группе G выберем пару нильпотентных подгрупп A и B так, чтобы $\min_G(A, B) \neq 1$ и число $|A||B|$ было минимальным.

Лемма 3.1. *В группе G справедливы следующие утверждения:*

(1) *хотя бы одна из подгрупп A или B, например, A, неабелева;*

(2) *подгруппы A и B непримарны и $\pi(A) = \pi(B)$;*

(3) *если x — элемент простого порядка из $Z(O_p(A))$, где $O_p(A)$ — неабелева p-подгруппа из A, то A имеет p-ранг ≥ 2, $p^3\big|\,|A|$ и $A \leq C_G(x)$. Если, к тому же, для подгруппы $C = C_G(x)$ имеем $O_p(C_G(x)) \cap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G, то при этом в факторгруппе $\overline{C} = C/_{O_p(C)}$ при $C = C_G(x)$ имеем $\min_{\overline{C}}(\overline{A}, \overline{B}_1) \neq \overline{1}$ для $B_1 = C \cap B^g$.*

(4) *$G = \mathrm{Soc}(G)A = \mathrm{Soc}(G)B$.*

Доказательство. Пункт (1) леммы следует из леммы 1.1.

В пункте (2) непримарность подгрупп A и B следует из теоремы 1. Допустим, что $\pi(A) \neq \pi(B)$. Это означает, что для одной из подгрупп, скажем A, найдется простое число p такое, что $p\big|\,|A|$ и $p\dagger|B|$. Но тогда для любого элемента g из G имеем $A \cap B^g = O_{p'}(A) \cap B^g$. По условию $\min_G(A, B) \neq 1$. Но $\min_G(A, B) = \min_G(O_{p'}(A), B) \neq 1$. Противоречие с выбором числа $|A||B|$. Пункт (2) доказан.

Докажем пункт (3) леммы. Допустим, что A имеет p-ранг 1. Так как $O_p(A)$ — неабелева подгруппа, то $O_p(A)$ — (обобщенная) кватернионная подгруппа и $|O_p(A)| \geq 8$. Но по условию $1 \neq \min_G(A, B)$. Поэтому $\min_G(O(A)\Omega(O_2(A))) \neq 1$. Противоречие с выбором числа $|A||B|$. Утверждение о том, что $p^3\big|\,|A|$ очевидно в силу неабелевости подгруппы $O_p(A)$. Из нильпотентности подгруппы A следует, что $A \leq C_G(x)$. Если $O_p(C_G(x)) \cap B^g = 1$ и в $\overline{C}$ имеем $\min_{\overline{C}}(\overline{A}, \overline{B}_1) = \overline{1}$ для $B_1 = C \cap B^g$, то по лемме 1.6 $\min_G(A, B) = 1$. Противоречие с выбором числа $|A||B|$.

Докажем пункт (4) леммы. Допустим, что например, $\mathrm{Soc}(G)A = G_1 \neq G$. Положим $B_1 = B \cap G_1$. Так как $\mathrm{Soc}(G_1) = \mathrm{Soc}(G)$, то по индукции и в силу непримарности A имеем $A \cap B_1^{g_1} = 1$ для некоторого элемента g_1 из G_1. Но тогда $A \cap (B \cap G_1)^{g_1} = A \cap B^{g_1} = 1$. Противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 3.2. $\mathrm{Soc}(G) \not\simeq A_n,\ n \geq 5$.

Доказательство. Допустим, что $\mathrm{Soc}(G) \simeq A_n,\ n \geq 5$. Тогда, согласно [9, теорема], при $n \neq 6$ имеем $\min_G(A, B) = 1$, за исключением случая $n = 8$, и в этом случае A и B — 2-группы. Противоречие с леммой 3.1(2).

Если $n = 6$, то, согласно [6, с. 4], $\mathrm{Out}(A_6) \simeq E_4$. По лемме 3.1(1) подгруппа A неабелева. Следовательно, $O_2(A)$ — неабелева подгруппа. Но тогда $O_2(A) \cap \mathrm{Soc}(G) = D \neq 1$. Так как $D \trianglelefteq O_2(A)$, то D содержит инволюцию $z \in \mathrm{Soc}(G) \cap Z(A)$. Так как $C_G(z)$ — 2-группа и $C_G(z) \geq A$, то A — 2-группа. Противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 3.3. $\mathrm{Soc}(G) \not\simeq L_2(q),\ q = 5, 7, 8, 9, 17$.

Доказательство. Допустим, что $\mathrm{Soc}(G) \simeq L_2(q),\ q = 5, 7, 8, 9, 17$. Тогда по лемме 3.2 $q \neq 5,\ 9$ и, согласно [6, с. 3,6,9], в оставшихся случаях $|\mathrm{Out}(L_2(q))| = 2$. По лемме 3.1(1) A — неабелева подгруппа в G, поэтому $|O_2(A)| \geq 8$ и $O_2(A) \cap \mathrm{Soc}(G) = D \neq 1$. Так как $D \triangleleft O_2(A)$, то D содержит инволюцию z из $Z(A)$. Поскольку $C_G(z)$ — 2-группа, то A — 2-подгруппа из G. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 3.4. $\mathrm{Soc}(G) \not\simeq L_3(4)$.

Доказательство. Допустим, что $\mathrm{Soc}(G) \simeq L_3(4)$. По лемме 3.1(1) подгруппа A неабелева. Следовательно, некоторая силовская подгруппа в A неабелева. Согласно [6, с. 22] неабелевой в A может быть только силовская 3-подгруппа T в G, при условии, что 3 делит $|\mathrm{Out}(L_3(4))|$, где $\mathrm{Out}(L_3(4)) \simeq Z_2 \times \Sigma_3$, либо силовская 2-подгруппа в G.

Рассмотрим первый случай. По лемме 3.1(4) $G = \mathrm{Soc}(G)A$, откуда $\overline{G} = G/_{\mathrm{Soc}(G)} = \mathrm{Soc}(G)A/_{\mathrm{Soc}(G)} \simeq A/_{A \cap \mathrm{Soc}(G)}$ — нильпотентная подгруппа. Так как $\overline{G} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Out}(L_3(4))$, то либо $\overline{G} \xrightarrow{\sim} Z_6$, либо $\overline{G} \xrightarrow{\sim} E_4$.

Итак, в первом случае $\overline{G} \xrightarrow{\sim} Z_6$. Но, поскольку по лемме 3.1(2) $|\pi(A)| \geq 2$, то $\overline{G} \simeq Z_6$ и $A \simeq V_{3^3} \times Z_2$, где инволюция i из A индуцирует на $\mathrm{Soc}(G)$ графово-полевой автоморфизм. Согласно [6, с. 22], $C = C_G(i) \simeq (E_9 \leftthreetimes SL_2(3)) \times Z_2$. Тогда $F(C) \simeq E_9 \times Z_2$ и $|F(C)| \leq |A|$. Выбор числа $|A||B|$ влечет, что $F(C) \cap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G, либо по индукции A и B — 2-группы, что невозможно. Так как в $\overline{C} = C/_{F(C)}$, имеем $|\overline{A}| = 3$ и $\overline{C} \simeq SL_2(3)$, то $\min_{\overline{C}}(\overline{A}, \overline{B}_1) = \overline{1}$, где $B_1 = C \cap B^g$. По лемме 1.6 $\min_G(A, B) = 1$. Противоречие.

Во втором случае, в силу неабелевости подгруппы $O_2(A)$ имеем $Z(O_2(A)) \cap \mathrm{Soc}(G) \neq 1$ и либо $\overline{G} \xrightarrow{\sim} Z_6$, либо $\overline{G} \xrightarrow{\sim} E_4$. Так как $C_{\mathrm{Soc}(G)}(z)$ — 2-подгруппа для инволюции z из $Z(O_2(A)) \cap \mathrm{Soc}(G)$, то непримарность подгруппы A влечет, что $\overline{G} \xrightarrow{\sim} Z_6$ и 3 делит $|A|$. Значит, $A \simeq Z_3 \times Q$, где Q — неабелева 2-группа. Согласно [6, с. 22] для элемента f порядка 3 из $G \backslash \mathrm{Soc}(G)$ имеем либо $C_G(f) \xrightarrow{\sim} (Z_7 \leftthreetimes Z_6) \times Z_3$, либо $C_G(f) \xrightarrow{\sim} \Sigma_5 \times Z_3$. В первом случае подгруппа $O_2(A)$ абелева, что невозможно. Во втором случае для $C = C_G(f)$ имеем $\langle f\rangle \cap B^g = 1$ по теореме Бэра – Судзуки, и в фактор-группе $\overline{C} = C/_{\langle f\rangle} \overset{\sim}{\rightarrow} \Sigma_5$ имеем $\min_{\overline{C}}(\overline{A}, \overline{B}_1) = \overline{1}$ для $B_1 = B^g \cap C$. По лемме 1.6 $\min_G(A, B) = 1$. Противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 3.5. $\mathrm{Soc}(G) \not\simeq U_3(5)$.

Доказательство. Допустим, что $\mathrm{Soc}(G) \simeq U_3(5)$. Тогда, согласно [6, с. 34], имеем $|\mathrm{Soc}(G)| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$ и $\mathrm{Out}(U_3(5)) \simeq \Sigma_3$.

По лемме 3.1(1) подгруппа A неабелева. Если 5^3 делит $|A|$, то $A \le N_G(S)$, где $S \in \mathrm{Syl}_5(G)$. Согласно [5, следствие 3.1.4] $O_{5'}(A)$ действует точно на $O_5(A) = S$. Противоречие с непримарностью подгруппы A.

Если 3^3 делит $|A|$, то $A \le N_G(S)$, где $S \in \mathrm{Syl}_3(G)$, и, согласно [6, с. 34], либо $A \overset{\sim}{\rightarrow} E_9 \leftthreetimes GL_2(3)$, либо $A \overset{\sim}{\rightarrow} (Z_6 \times Z_6) \leftthreetimes Z_6$. В первом случае A — 3-подгруппа, что невозможно, а во втором случае 3^3 делит $|C_G(i)|$ для некоторой инволюции i. Но такой инволюции в G нет. Поэтому $3^3 \dagger |A|$ и $G = \mathrm{Soc}(G)\langle t\rangle$, где $|t| = 2$.

Если 2^3 делит $|A|$, то $Z(O_2(A)) \cap \mathrm{Soc}(G) \neq 1$ и для инволюции z из $Z(O_2(A)) \cap \mathrm{Soc}(G)$ имеем $C = C_G(z) \overset{\sim}{\rightarrow} (2\Sigma_5)2$, где силовская 2-подгруппа из $2\Sigma_5$ полудиэдральна.

Тогда в $\overline{C} = C/_{O_2(C)} \simeq \Sigma_5$ подгруппа $O_2(\overline{A})$ неединична. Так как $|\pi(A)| > 1$, то $\overline{A} \simeq Z_6$ и $A \simeq Z_3 \times D_8$. Выбор A влечет, что $O_2(A) \cap B^g \neq 1$ для некоторого g из G. Так как $\min_G(A, B) \neq 1$, то $A \cap B^g = O_3(A)$. Следовательно, $B^g \le C_G(O_3(A))$. Поскольку $|\pi(B)| > 1$, то $\pi(B) = \{2, 3\}$. Но в G' нет инволюций, с централизатором порядка, делящегося на 9. Поэтому $O_3(A) = O_3(B^g)$. Но тогда в $C_1 = C_G(O_3(A))$ имеем $F(C_1) \simeq Z_3 \times E_4$ и $|F(C_1)| < A$. Выбор A влечет, что $F(C_1) \cap B^h = 1$ для некоторого h из G. Так как $\widetilde{C} = C_1/_{F(C_1)} \simeq \Sigma_3$, то $\min_{\widetilde{C}}(\widetilde{A}, \widetilde{B}_1) = \widetilde{1}$, где $B_1 = C_1 \cap B^g$. По лемме 1.6 $\min_G(A, B) = 1$. Противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 3.6. $\mathrm{Soc}(G)$ *— группа лиева типа и порядок подгруппы A четен.*

Доказательство. Из леммы 3.2 следует, что $\mathrm{Soc}(G)$ — группа лиева типа. Допустим, что $|A|$ нечетен. Ввиду леммы 3.1(2) $|\pi(A)| \ge 2$, поэтому найдется нечетное простое число r такое, что r делит $|A|$ и $r \ge 5$. Но подгруппа A неабелева, поэтому p^3 делит $|A|$ для некоторого простого числа p. Согласно [6, с. 13 – $L_3(3)$, с. 14 – $U_3(3)$, с. 26 – $PSp_4(3)$, с. 28 – $Sz(8)$, с. 46 – $Sp_6(2)$, с. 52 – $U_4(3)$, с. 68 – $L_4(3)$, с. 72 – $U_5(2)$, с. 85 – $\Omega_8^+(2)$, с. 108 – $\Omega_7(3)$, с. 115 – $U_6(2)$, с. 136 – $P\Omega_8^+(3)$] имеем r^3 не делит $|A|$. Из описания $\mathrm{Out}(\mathrm{Soc}(G))$ в указанных группах следует, что $O_r(A) \le \mathrm{Soc}(G)$ и $|O_p(A) \cap \mathrm{Soc}(G)| \ge p^2$. Следовательно, для элемента $x \in Z(O_p(A) \cap \mathrm{Soc}(G))$ и элемента $y \in O_r(A)$ имеем 3^3 делит $C_G(xy)$. Просматривая в [6] для каждой группы на указанных выше в доказательстве страницах порядки соответствующих элементов, видим, что таких групп нет.

Лемма доказана.

Лемма 3.7. *Группа* $\mathrm{Soc}(G)$ *определена над полем порядка* 3.

Доказательство. Допустим, что лемма неверна. Тогда из лемм 3.2–3.6 следует, что группа $\mathrm{Soc}(G)$ лиева типа и определена над полем порядка два. По лемме 3.6 $|A|$ четен.

Рассмотрим случай, когда $D = O_2(A) \cap \mathrm{Soc}(G) \neq 1$. Так как $D \lhd A$, то некоторая инволюция i из $Z(D)$ лежит в $Z(A)$ и, таким образом, $C_G(i) \geq A$. Согласно [6, следствие 3.1.4] подгруппа $C = C_G(i)$ 2-скована и $F^*(C) = O_2(C)$. Положим $R = O_2(C)A$. Так как по лемме 3.1(2) $|\pi(B)| = |\pi(A)| \geq 2$, то по теореме 1 $O_2(R) \cap B^g = 1$ для некоторого g из G и тогда $B_1 = R \cap B^g$ — $2'$-подгруппа из R, лежащая, без ограничения общности, в $O(A)$. Если в R найдется такой элемент r, что $O(A) \cap O(A)^r = 1$, то $A \cap B^{gr} = A \cap B^{gr} \cap R = A \cap (R \cap B^g)^r = A \cap B_1^r \leq O(A) \cap (O(A))^r = 1$ в силу нильпотентности подгруппы A и нечетности $|B_1|$. Противоречие.

Если же $O(A) \cap (O(A))^r \neq 1$ для любого элемента r из R, то по [12, теорема 1.1] $O(A) \geq T \simeq Z_t \wr Z_t$. Так как при $t \geq 5$, согласно [6], $|G|$ не делится на t^{t+1}, то $t = 3$ и $3^4 \Big| |O(A)|$.

Допустим, что $O(A) \not\leq \mathrm{Soc}(G)$. Тогда, согласно с [6, с. 16, таблица 5 и с. 85], некоторый элемент f из $O(A) \backslash \mathrm{Soc}(G)$ индуцирует на $\mathrm{Soc}(G)$ либо диагональный, либо графовый автоморфизм порядка 3. При этом $\mathrm{Soc}(G)$ изоморфен либо $U_6(2)$, либо ${}^2E_6(2)$ для диагонального, либо $\Omega_8^+(2)$ для графового автоморфизма.

Если $\mathrm{Soc}(G) \simeq \Omega_8^+(2)$, то $O_2(A) \leq \mathrm{Soc}(G)$ в силу изоморфизма $\mathrm{Out}(\Omega_8^+(2)) \simeq \Sigma_3$ (см. [6, с. 85]) и нильпотентности подгруппы A. По лемме 3.1(4) $G = \mathrm{Soc}(G)A = \mathrm{Soc}(G)B$, поэтому группа $\overline{G} = G/_{\mathrm{Soc}(G)}$ нильпотентна. Поскольку $O(A) \not\leq \mathrm{Soc}(G)$, то $\overline{G} \simeq Z_3$. Значит, подгруппа R лежит в некоторой максимальной подгруппе из G. Согласно [6, с. 85] единственной с точностью до сопряженности максимальной подгруппой с этим свойством является подгруппа $M \simeq 2_+^{1+8} : (\Sigma_3 \times \Sigma_3 \times \Sigma_3).Z_3$. Но в подгруппе $M_1 \simeq 2_+^{1+8} : 3^3$ из M для силовской 3-подгруппы A_1 по лемме 1.1 имеем $A_1 \cap A_1^h = 1$ для некоторого h из M_1 и в факторгруппе $\overline{M} \simeq M/_{M_1}$ имеем по той же лемме $\overline{O(A)} \cap \overline{O(A)}^{\overline{m}} = \overline{1}$ для некоторого элемента $\overline{m}$ из $\overline{M}$.

Теперь достаточно взять в роли G_2 из леммы 1.6 подгруппу $A_1 \simeq E_{3^3}$, в роли G_1 подгруппу $N_M(A_1)$, а в роли A и B — силовские 3-подгруппы из M_1. Тогда по лемме 1.6 имеем $O(A) \cap (O(A))^r = 1$ для некоторого r из M_1. Противоречие.

Если $\mathrm{Soc}(G) \simeq U_6(2)$, то $\mathrm{Out}(\mathrm{Soc}(G)) \simeq \Sigma_3$. По лемме 1.3(4) и допущению $O(A) \not\leq \mathrm{Soc}(G)$ имеем $\overline{G} = G/_{\mathrm{Soc}(G)} \simeq Z_3$, и элемент f порядка 3 из $G \backslash \mathrm{Soc}(G)$ индуцирует на $\mathrm{Soc}(G)$ диагональный автоморфизм. Тогда, согласно [6, теорема 3.1.3], подгруппа R лежит в некоторой параболической максимальной подгруппе P из $\mathrm{Soc}(G)$).

Поэтому в случае $\mathrm{Soc}(G) \simeq U_6(2)$ группа $\mathrm{Soc}(G)$ содержит единственную с точностью до сопряженности параболическую максимальную подгруппу $P \simeq 2_+^{1+8} : (U_4(2) \times Z_3)$, содержащую R.

Теперь в роли G_2 из леммы 1.6 достаточно взять подгруппу $A_1 \simeq Z_3$, в роли G_1 взять $C_P(A_1)$, а в роли A и B — силовские 3-подгруппы из P. Тогда по лемме 1.6 имеем $O(A) \cap (O(A))^r = 1$ для некоторого r из P. Противоречие.

Если $O(A) \leq \mathrm{Soc}(G)$, то $\mathrm{Soc}(G)$ содержит параболическую максимальную подгруппу, содержащую подгруппу $R_1 = R \cap \mathrm{Soc}(G)$ с $O_2(R_1) \neq 1$.

Рассматривая параболические максимальные подгруппы из групп в списке (S), удовлетворяющие этому условию, согласно [6, с. 46 – $Sp_6(2)$, с. 72 – $U_5(2)$, с. 115 – $U_6(2)$, с. 85 – $\Omega_8^+(2)$] имеем следующее.

В группе $Sp_6(2)$ таких параболических подгрупп нет.

В группе $U_5(2)$ таких параболических подгрупп нет.

В группе $U_6(2)$ единственной с точностью до сопряженности параболической максимальной подгруппой P, удовлетворяющей условию $P \geq Z_3 \wr Z_3$, может быть только централизатор центральной инволюции. Но если $\mathrm{Soc}(G) \simeq U_6(2)$ и z — соответствующая инволюция такая, что $C_G(z) \geq P_1$, то по индукции в $\overline{C_G(z)} = C_G(z)/_{O_2(C_G(z))} \overset{\sim}{\to} \mathrm{Aut}(U_4(2))$, имеем $\min_{\overline{C_G(z)}}(\overline{A}, \overline{B}_1) = \overline{1}$ для $B_1 = B^g \cap C_G(z)$, где $B^g \cap O_2(C_G(z)) = 1$ и по лемме 1.6 получаем противоречие. Для случая $\overline{C_G(z)} \overset{\sim}{\to} U_4(2) \times Z_3$ аналогичные рассуждения приводят к противоречию.

В группе $\Omega_8^+(2)$ таких параболических подгрупп нет.

Если $O_2(A) \cap \mathrm{Soc}(G) = 1$, то, в силу четности $|A|$ и леммы 3.6, $O_2(A) \backslash \mathrm{Soc}(G)$ содержит инволюцию i из $Z(A)$, поэтому $C_G(i) \geq A$. По леммам 3.2–3.7 группа $\mathrm{Soc}(G)$ определена над полем порядка 2. Поэтому внешние автоморфизмы, которые инволюция i индуцирует на $\mathrm{Soc}(G)$, могут быть только графовыми. Следовательно, из списка (S) групп достаточно рассмотреть группы $U_4(2) \simeq PSp_4(3),\ U_5(2),\ U_6(2),\ \Omega_8^+(2)$. Согласно [6, с. 52 – $U_4(2)$, с. 72 – $U_5(2)$, с. 85 – $\Omega_8^+(2)$, с. 115 – $U_6(2)$] и [17, секция 19], в группе G не более двух классов внешних автоморфизмов порядка 2, причем в случае, когда их два, $O_2(C_G(i)) \cap \mathrm{Soc}(G) \neq 1$ для второго класса и этот случай уже рассмотрен. В остальных случаях:

$\mathrm{Soc}(G) \simeq U_4(2),\ C_G(i) \simeq Z_2 \times Sp_4(2)$;

$\mathrm{Soc}(G) \simeq U_5(2),\ C_G(i) \simeq Z_2 \times O_5(2)$;

$\mathrm{Soc}(G) \simeq U_6(2),\ C_G(i) \simeq Z_2 \times Sp_6(2)$;

$\mathrm{Soc}(G) \simeq \Omega_8^+(2),\ C_G(i) \simeq Z_2 \times Sp_6(2)$.

Во всех случаях в факторгруппе $\overline{C} = C_G(i)/_{O_2(C_G(i))}$ имеем $\min_{\overline{C}}(\overline{A}, \overline{B}_1) = \overline{1}$, где $B_1 = B^g \cap C_G(i)$ и $B^g \cap O_2(C_G(i)) = 1$. Противоречие с леммой 3.1(3).

Лемма доказана.

Для завершения доказательства теоремы 2, согласно леммам 3.2–3.7, осталось рассмотреть группы с классическим цоколем из списка (S), определенные над полем порядка 3, а именно $U_3(3),\ PSp_4(3),\ L_4(3),\ U_4(3),\ \Omega_7(3),\ P\Omega_8^+(3)$.

Продолжим доказательство теоремы 2.

Лемма 3.8. $\mathrm{Soc}(G) \not\simeq U_3(3)$.

Доказательство. Допустим, что $\mathrm{Soc}(G) \simeq U_3(3)$. Согласно [6, с. 14] имеем $|\mathrm{Soc}(G)| = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 7$ и $|G; \mathrm{Soc}(G)| \leq 2$. По лемме 3.6 порядок A четен, а по лемме 3.1 $|\pi(A)| \geq 2$ и $p^3 \Big| |A|$ для $p \in \pi(A)$. Порядки централизаторов элементов в группе G (см. [6, с. 14]) показывают, что A — $\{2,3\}$-группа и $p = 2$. Следовательно, $A \leq C_G(x)$, где x — инволюция из $\mathrm{Soc}(G)$. Положим $C = C_G(x)$ и $\overline{C} = C_G(x)/_{O_2(C_G(x))}$. Согласно [6, с. 14], $\overline{C} \simeq \Sigma_3$ и $O_2(C) \cap B^g = 1$ для некоторого g из G, так как $\mathrm{Aut}(U_3(3)) \simeq G_2(2)$. Далее, для $B_1 = C \cap B^g$ имеем $|B_1| \leq 3$ и, следовательно, $A \cap B_1^h \leq O_2(C)$ для некоторого h из $O_2(C)$. Тогда $A \cap (C \cap B^g)^h = A \cap C \cap B^{gh} = A \cap B^{gh} \leq O_2(C) \cap B^{gh} = (O_2(C) \cap B^g)^h = 1$. Противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 3.9. $\mathrm{Soc}(G) \not\simeq U_4(2) \simeq PSp_4(3)$.

Доказательство. Допустим, что лемма неверна. Тогда по лемме 3.1 подгруппа $O_p(A)$ неабелева для некоторого $p \in \pi|A|$ и $Z(A)$ содержит элемент y непримарного порядка, делящегося на p. Согласно [6, с. 26–27, таблица характеров], централизаторы элементов из G, порядки которых делятся на 5, абелевы. Следовательно, A — $\{2,3\}$-подгруппа из G. Тогда $|y| = 6$ и, в силу неабелевости $C_G(y)$, имеем $|C_G(y)| = |C_{\mathrm{Soc}(G)}(y)| = 72$. Так как $\mathrm{Soc}(G) \simeq U_4(2) \simeq PSp_4(3)$, то по теореме Бореля – Титса [5, теорема 3.1.1] $A \leq P$, где P — параболическая максимальная подгруппа из $\mathrm{Soc}(G)$ и либо $\overline{P} := P/_{O_2(P)} \simeq A_5$, либо $\overline{P} \simeq (Z_3 \times Z_3).Z_2$. В обоих случаях по лемме 1.3 $O_2(P) \cap B^g = 1$. Во втором случае инволюция из $\overline{P}$ инвертирует $O_3(\overline{P})$, поэтому $A \leq O_{2,3}(P) \simeq SL_2(3) \circ SL_2(3)$ и, следовательно, подгруппа A абелева, что противоречит ее выбору. В первом случае по лемме 1.7 $\min_{\overline{P}}(\overline{A}, \overline{B}_1) = \overline{1}$ для $B_1 = P \cap B^g$ и по лемме 1.6 имеем $A \cap B^h = 1$ для некоторого h из G. Противоречие с выбором пары (A, B).

Лемма доказана.

Лемма 3.10. $\mathrm{Soc}(G) \not\simeq U_4(3)$.

Доказательство. Допустим, что $\mathrm{Soc}(G) \simeq U_4(3)$. Тогда, согласно [6, с. 52], $Out(\mathrm{Soc}(G))$ — 2-группа. По лемме 3.1 подгруппы A и B непримарны, подгруппа A неабелева и $p^3 \,\Big|\, |A|$ для $p \in \pi(A)$ и неабелевой подгруппы $O_p(A)$. Так как $|\mathrm{Soc}(G)| = 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7$, то $p \in \{2,3\}$. Если $p = 3$, то непримарность подгруппы A и [6, с. 54, таблица характеров] влекут, что A — $\{2,3\}$-группа и $6 \,\Big|\, |Z(A)|$, т.е. $A \leq C_G(i)$ для некоторой инволюции i из G. Тогда из таблицы для централизаторов инволюций в [5, с. 172, таблица 4.5.1] при $m = 3$ находим $O^2(C_G(i)) \simeq U_3(3)$ или $O^2(C_G(i)) \simeq PSp_4(3)$ и $\overline{C} = C_G(i)/_{O_2(C_G(i))} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(U_3(3))$ или $\overline{C} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(PSp_4(3))$. По теореме 1 $O_2(C_G(i)) \cap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G, а по леммам 3.8 и 3.9 в факторгруппе $\overline{C}$ для подгрупп $\overline{A}$ и $\overline{B}_1$, где $B_1 = C_G(i) \cap B^g$, имеем $\min_{\overline{C}}(\overline{A}, \overline{B}_1) = \overline{1}$. По лемме 1.6 имеем $\min_G(A, B) = 1$. Противоречие.

Пусть $p = 2$. Тогда $2^3 \,\Big|\, |C_G(i)|$ и, кроме уже рассмотренных случаев с $O^2(C_G(i)) \simeq U_3(3)$, $PSp_4(3)$ по [5, с. 172, таблица 4.5.1], достаточно рассмотреть оставшиеся случаи с $O^2(C_G(i)) \simeq SL_2(3) \circ SL_2(3)$, $O^2(C_G(i)) \simeq L_2(9)$ или $O^2(C_G(i)) \simeq A_4 \times A_4$. Если $O^2(C_G(i)) \simeq L_2(9)$, то непримарность подгруппы A влечет, что в факторгруппе $\overline{C} \simeq C_G(i)/_{O_2(C_G(i))} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(L_2(9))$ подгруппа $\overline{A}$ — не 2-группа.

Так как $O_2(C_G(i)) \cap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G, то для подгруппы $B_1 = C_G(i) \cap B^g$ по лемме 3.2 имеем $\min_G(\overline{A}, \overline{B}_1) = \overline{1}$ и по лемме 1.6 $\min G(A, B) = 1$. Противоречие.

В двух оставшихся случаях имеем $\overline{C} = C_G(i)/_{O_2(C_G(i))} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hol}(E_9)$. Более того, $\overline{C} \xrightarrow{\sim} E_9 \leftthreetimes SD_{16}$ с точными действиями SD_{16} на E_9 и силовской 3-подгруппы из $O_{2,3}(C)$ на $O_2(C)$. Так как $\overline{A}$ — не 2-подгруппа в силу непримарности A, то $|\overline{A}| = 3, 6, 9$ и, следовательно, $A \leq R = P \leftthreetimes Q$, где P — 2-подгруппа из $C(i)$, содержащая $O_2(C_G(i))$, на которой $Q \simeq E_9$ действует точно. Так как $P \cap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G, то для $B_1 = R \cap B^g$ имеем, что B_1 — абелева

3-подгруппа из R и по лемме 1.1 $A\cap B_1^r \leq P$ для некоторого r из R. Тогда $A\cap B_1^r = A\cap (R\cap B^g)^r = A\cap R\cap B^{gr} = A\cap B^{gr} \leq P\cap B^{gr} = (P\cap B^g)^r = 1$. Противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 3.11. $\mathrm{Soc}(G) \not\simeq L_4(3)$.

Доказательство. Допустим, что $\mathrm{Soc}(G)\simeq L_4(3)$. Согласно [6, с. 68], $|\mathrm{Soc}(G)| = 2^7\cdot 3^6\cdot 5\cdot 13$ и $Out(\mathrm{Soc}(G))$ — 2-группа. По лемме 3.1 подгруппы A и B непримарны, подгруппа A неабелева и $p^3\Big|\,|O_p(A)|$ для неабелевой подгруппы $O_p(A)$ и некоторого простого p. Из таблицы характеров в [6, с. 68–69] следует, что для элемента y, где $|y|=5$ или $|y|=13$ имеем $C_G(y)$ — абелева подгруппа. Следовательно, $5\dagger|A|$ и $13\dagger|A|$. Значит, A — $\{2,3\}$-группа и $6\Big||Z(A)|$. Следовательно, $A\leq C_G(i)$, где i — инволюция из G. Представители классов сопряженных инволюций и их структура определены в [5, таблица 4.5.1], откуда следует при $m=3$ и $\varepsilon=1$

либо $i=t_1$ и $\overline{C} = C_G(i)/_{O_2(C_G(i))} \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{Aut}(L_3(3))$;

либо $i=t_2$ и $\overline{C} = C_G(i)/_{O_2(C_G(i))} \stackrel{\sim}{\to} (\Sigma_3\wr Z_2)$;

либо $i=\gamma_1$ и $\overline{C} = C_G(i)/_{O_2(C_G(i))} \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{Aut}(PSp_4(3))$;

либо $i=\gamma_2$ и $\overline{C} = C_G(i)/_{O_2(C_G(i))} \stackrel{\sim}{\to} (\Sigma_3\wr Z_2)$;

либо $i=t_1'$ и $\overline{C} = C_G(i)/_{O_2(C_G(i))} \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{Aut}(L_2(9))$;

либо $i=\gamma_2'$ и $\overline{C} = C_G(i)/_{O_2(C_G(i))} \stackrel{\sim}{\to} \mathrm{Aut}(L_2(9))$.

Непримарность подгруппы A влечет, что $O_2(C_G(i))\cap B^g = 1$ для некоторого g из G в каждом из отмеченных случаев. Так как $\overline{A}$ — не 2-группа, то по индукции $\min_{\overline{C}}(A,\overline{B_1}) = \overline{1}$ для $B_1 = B^g\cap C$ и всех случаев, за исключением случая $\overline{C}\stackrel{\sim}{\to}\Sigma_3\wr Z_2$.

Поэтому во всех случаях, за исключением случая $\overline{C}\stackrel{\sim}{\to}\Sigma_3\wr Z_2$, по лемме 3.1.3 получаем противоречие.

В случае $\overline{C}\stackrel{\sim}{\to}\Sigma_3\wr Z_2$, $i=t_2$ или $i=\gamma_2$, силовская 3-подгруппа $F\simeq E_9$ из $O_{2,3}(C)$ действует точно на $O_2(C)$, поэтому для подгруппы $R=O_2(C)A$, где $O(A)\stackrel{\sim}{\to}E_9$ найдется элемент g_1 такой, что $O_2(R)\cap B^{g_1}=1$. Пусть $B_2 = R\cap B^{g_1}$. Тогда, без ограничения общности, $B_2\leq O(A)$. По лемме 1.1 $O(A)^x\cap O(A) = 1$ для некоторого $x\in R$. Тогда $A\cap B^{g_1x} = A\cap R\cap B^{g_1x} = A\cap B_2^x \leq O(A)\cap O(A)^x = 1$. Противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 3.12. $\mathrm{Soc}(G)\not\simeq\Omega_7(3)$.

Доказательство. Допустим, что $\mathrm{Soc}(G)\simeq\Omega_7(3)$. Согласно [6, с. 106–109], $|G:\mathrm{Soc}(G)|\leq 2$. По лемме 3.1 подгруппы A и B непримарны, подгруппа A неабелева и $p^3\Big||A|$ для $p\in\pi(A)$ и неабелевой подгруппы $O_p(A)$. Так как $|\mathrm{Soc}(G)| = 2^9\cdot 3^9\cdot 5\cdot 7\cdot 13$ и по [6, с. 106, таблица характеров] централизаторы в $\mathrm{Soc}(G)$ элементов порядка 13 и 7 абелевы, то A — $\{2,3,5\}$-группа. Если $5\Big||A|$, то A содержит элемент y либо порядка 10, либо порядка 15 и в случае $|y|=15$ $A=C_G(y)$ — абелева подгруппа. Противоречие с выбором A. Если $|y|=10$, то либо $C_G(y)$ — абелева подгруппа, что невозможно, либо $A\leq C_G(i)$, где i — инволюция из $\mathrm{Soc}(G)$. Поэтому в любом случае $A\leq C_G(j)$, где j — инволюция из G и структура $C_G(j)$ определена в [5, таблица 4.5.1], откуда для $\mathrm{Soc}(G) \simeq B_3(3)$ и $C = C_G(j)$ справедливы следующие утверждения:

либо $j = t_1$ или $j = t_1'$ и $\overline{C} = C_G(j)/_{O_2(C_G(j))} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(PSp_4(3))$;

либо $j = t_2$, $\overline{C} = C_G(j)/_{O_2(C_G(j))} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(\Sigma_3 \wr Z_2 \times Z_3)$ и $C/_{O^2(C)}$ — 2-группа;

либо $j = t_2'$ и $\overline{C} = C_G(j)/_{O_2(C_G(j))} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(L_2(9) \times Z_3)$ и $C/_{O^2(C)}$ — 2-группа;

либо $j = t_3$ и $\overline{C} = C_G(j)/_{O_2(C_G(j))} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(L_4(3))$;

либо $j = t_3'$ и $\overline{C} = C_G(j)/_{O_2(C_G(j))} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(U_4(3))$.

Если $\overline{C}$ — почти простая группа, то по индукции имеем $\min_{\overline{C}}(\overline{A}, \overline{B}_1) = 1$, где $B_1 = C \cap B^g$ и $B^g \cap O_2(C) = 1$ ввиду $|\pi(A)| \geq 2$. По лемме 1.6 $\min_G(A, B) = 1$. Противоречие.

Если $j = t_2$, то $O(A)$ действует точно на $O_2(C)$, поэтому для подгруппы $R = O_2(C)A$, где $O(A) \xrightarrow{\sim} E_{3^3}$, в силу $|\pi(A)| \geq 2$ найдется элемент g_1 из G такой, что $O_2(R) \cap B^{g_1} = 1$. Пусть $B_2 = R \cap B^{g_1}$. Так как B_2 — $2'$-подгруппа из R, то, без ограничения общности, можно считать, что $B_2 \leq O(A)$. По лемме 1.1 $O(A) \cap O(A)^x = 1$ для некоторого $x \in R$. Тогда $A \cap B^{g_1 x} = A \cap R \cap B^{g_1 x} = A \cap (R \cap B^{g_1})^x = A \cap B_2^x \leq O(A) \cap O(A)^x = 1$. Противоречие.

Если $j = t_2'$ и $\overline{A}$ накрывает $C_{\overline{C}}(\overline{K}) \simeq Z_3$, где $\overline{K} \simeq L_2(9)$, то по [5, таблица 4.5.1] подгруппа C содержит нормальную подгруппу $K_1 \simeq \Sigma_4$. Пусть $R = K_1 A$. Тогда $A_1 = C_A(K_1) \neq A$ и по выбору числа $|A||B|$ имеем $A_1 \cap B^h = 1$ для некоторого элемента h из G. Так как в $\widetilde{R} = R/_{A_1} \simeq \Sigma_4$, $\widetilde{A} \cap \widetilde{B}_1 = \widetilde{1}$, где $B_1 = R \cap B^h$, то по лемме 1.6 $A \cap B^{g_2} = 1$ для некоторого элемента g_2 из G. Противоречие. Если $\overline{A}$ не накрывает $C_{\overline{C}}(\overline{K}) \simeq C_3$, то $\overline{C} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(L_2(9))$ и по индукции $\min_{\overline{C}}(\overline{A}, \overline{B}_1) = \overline{1}$ для $B_1 = B^{g_3} \cap C$ и $B^{g_3} \cap O_2(C) = 1$. По лемме 1.6 $\min_G(A, B) = 1$. Противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 3.13. $\mathrm{Soc}(G) \not\simeq P\Omega_8^+(3)$.

Доказательство. Допустим, что $\mathrm{Soc}(G) \simeq P\Omega_8^+(3)$. Тогда, согласно [14, теорема 1] подгруппа A непримарна, а по лемме 3.6 $|A|$ четен. Следовательно, $A \leq C_G(i)$ для некоторой инволюции i из G. Согласно [6, с. 140] $\mathrm{Out}(P\Omega_8^+(3)) \simeq \Sigma_4$. Так как по лемме 3.1(4) $G = \mathrm{Soc}(G)A = \mathrm{Soc}(G)B$, то факторгруппа $G/_{\mathrm{Soc}(G)}$ нильпотентна. Следовательно, либо $|G : \mathrm{Soc}(G)| = 2^\alpha$ $(0 \leq \alpha \leq 3)$, либо $|G : \mathrm{Soc}(G)| = 3$.

По лемме 3.1(3) $p^3 \big| \, |A|$ для неабелевой силовской p-подгруппы из A. Так как $|P\Omega_8^+(3)| = 2^{12} \cdot 3^{12} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13$, то либо силовская 2-подгруппа из A неабелева, либо силовская 3-подгруппа из A неабелева. По лемме 3.6 $|A|$ четен. Поэтому, согласно [5, таблица 4.5.1] для инволюции i из $Z(A)$ справедливо одно из следующих утверждений, записанных в обозначениях этой таблицы:

(1) $i = t_1'$ и $O^{3'}(C_{K^*}(i)) \simeq \Omega_6^-(3) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(U_4(3))$;

(2) $i = t_2$ и $O^{3'}(C_{K^*}(i))/_{Z(O^{3'}(C_{K^*}(i)))} \simeq P\Omega_4^+(3) \times P\Omega_4^+(3)$;

(3) $i = t_2''$ или $i = t_2'''$, $L^* \simeq P\Omega_4^+(9) \simeq L_2(9) \times L_2(9)$;

(4) $i = t_3''$ и $L^* \simeq U_4(3)$;

(5) $i = t_4'$ и $L^* \simeq U_4(3)$;

(6) $i = \gamma_2$ и $L^* \simeq P\Omega_3(3) \times P\Omega_5(3) \simeq Sp_4(3) \times L_2(3)$;

(7) $i = \gamma_1$ и $L^* \simeq P\Omega_7(3)$;

(8) $i = \gamma_1^*$ и $L^* \simeq P\Omega_7(3)$;

(9) $i = \gamma_1^{**}$ и $L^* \simeq P\Omega_7(3)$;

(10) $i = \gamma_2^*$ и $L^* \simeq L_2(3) \times P\Omega_5(3) \simeq L_2(3) \times Sp_4(3)$;

(11) $i = \gamma_2^{**}$ и $L^* \simeq L_2(3) \times P\Omega_5(3) \simeq L_2(3) \times Sp_4(3)$;

причем во всех случаях $C_{C^*}(L^*)$ — циклическая подгруппа порядка 2 или 4. Поэтому в группе $C_G(i)$ из пунктов (1), (4)–(11) подгруппа $F(C_G(i))$ имеет порядок, не превосходящий 12. Значит, $|F(C_G(i))|$ в этих случаях меньше, чем порядок $|A|$. Тогда по выбору числа $|A||B|$ имеем $F(C_G(i)) \cap B^x = 1$ для некоторого элемента x из G и в факторгруппе $\overline{C} = C_G(i)/_{F(C_G(x))}$ имеем по индукции $\min_{\overline{C}}(\overline{A}, \overline{B}_1) = \overline{1}$ для $B_1 = B^x \cap C_G(x)$. По лемме 1.6 $\min_G(A, B) = 1$. Противоречие.

Рассмотрим пункт (3). В этом случае, согласно [5, таблица 4.5.1, стр. 172], имеем $Z(L^*) = 1$ и $|C_{C^*}(L^*)| = 2$. Таким образом, $C_{L^*}(i) = \langle i \rangle \times (M_1 \times M_2)$, где каждая из подгрупп M_1 и M_2 изоморфна некоторой неразрешимой подгруппе из $\mathrm{Aut}(L_2(9))$.

Если $A \leq C_{L^*}(i)$, то непримарность и неабелевость подгруппы A влечет, что силовская 2-подгруппа в A неабелева. Так как факторгруппа $\overline{C} = C_{L^*}(i)/_{F^*(C_{L^*}(i))}$ для подгруппы $C = C_{L^*}(i)$ — элементарная абелева 2-группа, то $O_2(A) \cap (E(M_1 \times M_2)) \neq 1$. Поскольку в группе $L_2(9) \simeq E(M_1) \simeq E(M_2)$ централизаторы инволюций являются 2-группами, то либо $O_2(A) \cap E(M_1 \times M_2) \leq E(M_1)$, либо $O_2(A) \cap E(M_1 \times M_2) \leq E(M_2)$. Пусть, например, $O_2(A) \cap (M_1 \times M_2) \leq E(M_1)$ и j — инволюция из $Z(A) \cap E(M_1)$. Положим $G_1 = C_C(j)$ и $G_2 = O_2(G_1)$. Тогда в $\overline{G}_1 = G_1/_{G_2} \simeq M_2$ образ $\overline{A}$ — не 2-подгруппа. Следовательно, согласно [6, с. 4] $\overline{A}$ — циклическая группа. Согласно [11, теорема] $G_2 \cap B^x = 1$ для некоторого элемента x из G и для подгруппы $B_1 = G_1 \cap B^x$ в силу цикличности группы $\overline{A}$ по лемме 1.2 имеем $\overline{A} \cap \overline{B}_1^{\overline{g}_1} = \overline{1}$. По лемме 1.6 $A \cap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G. Противоречие.

Если $A \not\leq C_{L^*}(i)$, то, ввиду выбора A и равенства $G = A\mathrm{Soc}(G)$, в разности $A \backslash (A \cap L^*)$ есть элемент f простого порядка 2 или 3, индуцирующий на $\mathrm{Soc}(G)$ графовый автоморфизм.

Если $|f| = 3$, то $[i, f] = 1$ в силу нильпотентности A. Но тогда $[F^*(C_{L^*}(i)), f] = 1$ согласно [6, с. 4]. Следовательно, $F^*(C_{L^*}(i)) \leq C_G(f)$. Согласно [6, с. 136], в этом случае $C_{\mathrm{Soc}(G)}(f) \simeq G_2(3)$. Однако в $G_2(3)$, согласно [5, таблица 4.51], централизаторы инволюций разрешимы. Противоречие.

Если $|f| = 2$, то $|G : \mathrm{Soc}(G)| = 2^\alpha,\ 0 \leq \alpha \leq 3$ и, согласно [6, с. 140], $C_G(i) \overset{\sim}{\to} 2 \times (\Sigma_6 \wr 2)2$ и, тем более, в $2 \times (\mathrm{Aut}(A_6) \wr Z_2)$. Если $A \leq O_2(C_G(i)) \times B$, где $B \simeq B_1 \times B_2$ — база сплетения с $B_1 \simeq B_2 \simeq \mathrm{Aut}(A_6)$, то, конечно, $A \leq Pr_{B_1}(A) \times Pr_{B_2}(A)$, где $Pr_{B_i}(A)$ — проекция A на $B_i,\ i = 1, 2$. Поэтому мы можем повторить рассуждение для случая $A \leq C_{L^*}(i)$.

Если $A \not\leq O_2(C_G(i)) \times (B_1 \times B_2)$, то $A \leq O_2(C_G(i)) \times B$, где $B \simeq \mathrm{Aut}(A_6) \wr Z_2$ и непримарность подгруппы A влечет, что либо $3\big||A|$, либо $5\big||A|$. В любом случае абелевость силовских подгрупп нечетного порядка в A_6 влечет, что $N = C_{E(C_G(i))}(O(A))$ — силовская подгруппа в $E(C_G(i))$, нормальная в A, на которой $O_2(A)$ действует нетривиально. В частности, $O_2(A) \cap E_G(C(i)) = 1$. Так как $\mathrm{Out}(A_6) \simeq E_4$ и $O_2(A)$ — неабелева подгруппа, то структура централизаторов инволюций из $\mathrm{Aut}(A_6) \backslash A_6$ согласно [6, с. 4] влечет, что $C_N(O_2(A))$ — циклическая подгруппа.

Неабелевость подгруппы A влечет, что найдется инволюция $j \in G$, индуцирующая на $E(B_1)$ нетривиальный автоморфизм, $C_{E(B_1)}(j)$ — циклическая группа порядка 3 или 5, причем $A \leq (C_{E(B_1)}(j) \times C_{E(B_1)}(j))^m,\ \langle i, m\rangle$, где m — инволюция из A, переставляющая B_1 и B_2. Таким образом, A нормализует подгруппу $V \simeq E_{p^2}$, где $p = 3$ или 5, и централизует в V циклическую подгруппу порядка p. Тогда в подгруппе $R = VA$ имеем $E(R) = A_0 \neq A$ и $\overline{R} = R/_{A_0}$ — группа Фробениуса. По выбору числа $|A||B|$ имеем $\min_G(A_0, B) = 1$. Тогда по лемме 1.6 $\min_G(A, B) = 1$. Противоречие.

Рассмотрим случай (2). Согласно [6, с. 140] подгруппа $C_{\mathrm{Soc}(G)} = C_1$ изоморфна $2.((A_4 \wr Z_2) \wr Z_2)$. В частности, $C_1 \rhd C_2 = K_1 \circ K_2 \circ K_3 \circ K_4$, где $K_i \simeq SL_2(3)$. Пусть $C = C_G(i)$. Если C содержит элемент f порядка 3, индуцирующий на $\mathrm{Soc}(G)$ графовый автоморфизм, то f действует на $C_1 = C \cap \mathrm{Soc}(G)$ и C_2, переставляя, без ограничения общности, транзитивно подгруппы K_2, K_3 и K_4 и нормализуя K_1. Напомним, что в этом случае $|G : \mathrm{Soc}(G)| = 3$.

Положим $R = A \cdot O_2(C)$. Тогда R — 2-замкнутая подгруппа с точным действием подгруппы $O(A)$ на $O_2(R)$. По теореме 1 для силовской 2-подгруппы S из G, содержащей $O_2(R)$, и непримарной подгруппы B имеем $S \cap B^g = 1$ для некоторого элемента g из G. В частности, $O_2(R) \cap B^g = 1$. Так как $O(A) \in \mathrm{Syl}_3(R)$, то, без ограничения общности, подгруппа $B_1 = R \cap B^g$ лежит в $O(A)$.

Если $O(A) \cap (O(A))^r = 1$ для некоторого элемента r из R, то $A \cap B^{gr} \leq O(A)$ в силу $O_2(A) \cap B^{gr} \leq O_2(R) \cap B^{gr} = (O_2(R) \cap B^g)^r = 1$. С другой стороны, $A \cap B^{gr} \leq R \cap B^{gr} \leq (R \cap B^g)^r \leq O(A)^r$. Поэтому $A \cap B^{gr} = 1$. Противоречие.

Если $O(A) \cap O(A)^r \neq 1$ для любого элемента r из R, то согласно [12, теорема 1.1], $O(A)$ содержит подгруппу $P \simeq Z_3 \wr Z_3$. Если при этом $O(A) \in \mathrm{Syl}_3(C)$, то $O(A) \cap \mathrm{Soc}(G) \in \mathrm{Syl}_3(C_1)$. В частности, $O(A)$ действует нетривиально на K_1. К тому же, в этом случае, т. е. когда $O(A) \in \mathrm{Syl}_3(C)$, имеем $C_{O_2(R)}(O(A)) = \langle i\rangle = O_2(A)$. Поэтому A нормализует K_1. Пусть $R_1 = K_1 \cdot A$. Так как $1 < C_{R_1}(K_1) = A_1 < A$, то $\overline{R}_1 = R_1/_{A_1} \simeq A_4$. Тогда при $R_1 = G_1$ и $A_1 = G_2$ по лемме 1.6 получаем противоречие. Действительно, по теореме 1 имеем $A_1 \cap B^x = 1$ для некоторого элемента x из G и $\overline{A} \simeq Z_3 \in \mathrm{Syl}_3(A_4)$. Поэтому для подгруппы $B_2 = B^x \cap R_1$ имеем $\overline{A} \cap \overline{B}_2 = \overline{1}$ для некоторого элемента $\overline{r}_1$ из $\overline{R}_1$.

Если $O(A) = P \geq B_1$ и B_1 — абелева подгруппа, то, согласно [15, теорема 1], имеем $O(A) \cap B_1^r = 1$ для некоторого элемента r из R. Поэтому, в силу нечетности $|B_1|$, $1 = O(A) \cap B_1^r = A \cap B_1^r = A \cap (R \cap B^x)^r = A \cap R \cap B^{xr} = A \cap B^{xr}$. Противоречие с выбором A и B.

Если $O(A) = P \geq B_1$ и B_1 — неабелева группа порядка 3^3, то $B_1 \lhd O(A)$, поэтому $R_2 = O_2(R)B_1 \lhd R$ и $O(A) \cap R_2 = B_1$. Согласно [12, теорема 1.1], имеем $B_1 \cap B_1^{r_2} = 1$ для некоторого элемента r_2 из $O_2(R)$. Тогда $O(A) \cap B_1^{r_2} = O(A) \cap R_2 \cap B_1^{r_2} = B_1 \cap B_1^{r_2} = 1$. Следовательно, $1 = O(A) \cap B_1^{r_2} = A \cap B^{r_2} = A \cap (R \cap B^x)^{r_2} = A \cap R \cap B^{xr_2} = A \cap B^{xr_2}$. Противоречие с выбором A и B.

Если $O(A) = P = B_1$, то рассмотрим вначале $O_2(A)$ и допустим, что $O_2(A) > \langle i\rangle$. Выбор числа $|A||B|$ влечет, что тогда в $O_2(A)$ есть такая инволюция j, что $j \neq i$ и $[\langle j\rangle, O(A)] = 1$. В частности, для подгруппы $O_1(A) = O(A) \cap \mathrm{Soc}(G) \simeq E_{3^3}$ из C_1 имеем $[\langle j\rangle, O_1(A)] = 1$. Из изоморфизма $C_1 \simeq 2.((A_4 \wr Z_2) \wr Z_2)$ и сопряженности инволюций вне базы сплетения в группе $D = A_4 \wr Z_2$, следует, что инволюция j при этом изоморфизме может быть представлена, без ограничения общности, только инволюцией из $D \backslash (A_4 \times A_4)$. Действительно, такая инволюция централизует в $2.((A_4 \wr Z_2) \wr Z_2)$ подгруппу, изоморфную E_{3^3}, лежит в $D\backslash(A_4 \times A_4)$ и инвертирует элемент порядка 3 из $A_4 \times A_4$. Рассмотрим $N = N_{C_G(i)}(O(A))$. Так как $[\langle j\rangle, O(A)] = 1$ и j инвертирует элемент порядка 3 из $N_{C_G(i)}(O(A))$, то $A \leq N$ и A нормализует, но не централизует $O(N) \in \mathrm{Syl}_3(C_G(i))$. В подгруппе $R_4 = O(N)A$ имеем $F(R_4) = \langle i\rangle O(A)$ и $\overline{R}_4 = R_4/_{F(R_4)} \simeq \Sigma_3$. Поскольку $|F(R_4)| \leq A$, то $F(R_4) \cap B^y = 1$ для некоторого y из G. По лемме 1.6 $A \cap B^h = 1$ для некоторого y из G. Противоречие.

Допустим, что $O_2(A) = \langle i\rangle$. Тогда $O(A) \cap B^t = 1$ для некоторого t из G. Значит, $O_2(A) \cap B^t \neq 1$. Поэтому $O(B^t) \leq C_G(i)$. Но $O(B^t) \notin \mathrm{Syl}_3(C_G(i))$, иначе $O(B^t) \cap O(A) \neq 1$. Значит, $|O(A)| = 3^4$. Инволюция v из $Z(O_2(B^t)) \leq C_1$ и $[\langle v\rangle, O(B^t)] = 1$. Следовательно, $O(B^t) \cap C_1 \simeq E_{3^3}$ и $v \notin O_2(C_1)$. Можно взять инволюцию v вместо i, откуда будет следовать, что v сопряжена с i. Следовательно, $O_2(B^t) = \langle v\rangle$. Но $\langle i\rangle \leq B^t$. Поэтому $i = v$. Без ограничения общности можно считать, что подгруппы $O(A)$ и $O(B^t)$ лежат в $O(N) \in \mathrm{Syl}_3(C_G(i))$ и $O(N) = O(A)O(B^t)$ в силу того, что $|O(N) : O(A)| = |O(N) : O(B^t)| = 3$. Согласно [14, теорема 1] $O(N) \cap O(N)^g = 1$ для некоторого g из G. Тогда $O(N) \not\leq C_G(i)$, так как иначе $O(N^9) > O(A)^x$ для $x \in C_G(i)$. Противоречие. Но из $O(N) \cap (O(N))^g = 1$ и $v = i$ следует, что $A^g \cap O_2(A) \neq 1$. Так как $O_2(A) = \langle i\rangle$, то $(O(A))^g \leq C_G(i)$. Аналогично, из $O(B^t) \cap (O(B^t))^g = 1$ следует, что $B^{tg} \cap O_2(B^t) = \langle v\rangle = \langle i\rangle$. Поэтому $(O(B^t))^g \leq C_G(i)$. Следовательно, $(O(A)O(B^t))^g = O(A)^g(O(B^t))^g \leq C_G(i)$. Противоречие.

Лемма доказана.

Теорема 2 доказана.

References

[1] V.I. Zenkov, *Intersections of abelian subgroups in finite groups*, Mat. Zametki, **56**:2 (1994), 150–152. Zbl 0839.20032

[2] V.D. Mazurov, V.I. Zenkov, *On intersection of Sylow subgroups in finite groups*, Algebra i Logika, **35**:4 (1996), 424–432. Zbl 0880.20011

[3] A.R. Jamali, M. Viseh, *On nilpotent subgroups containing nontrivial normal subgroups*, J. Group Theory, **13**:4 (2010), 411–416. Zbl 1195.20018

[4] *The Kourovka notebook: unsolved problems in group theory*, 18th ed., Inst. Mat. SO RAN, Novosibirsk, 2014. URL: http://math.usc.ru/ alglog.html

[5] D. Gorenstein, R. Lyons, R. Solomon, *The classification of the finite simple groups, Number 3*, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1991.

[6] J.H. Conway et. al., *Atlas of finite groups*, Clarendon Press, Oxford, 1985. Zbl 0568.20001

[7] D. Gorenstein, *Finite simple groups. Introduction to their classification*, Mir, Moscow, 1996.

[8] V.I. Zenkov, *Intersection of nilpotent subgroups in finite groups*, Fund. Prikl. Mat., **2**:1 (1996), 1–92. Zbl 0905.20011

[9] V.I. Zenkov, *On intersections of nilpotent subgroups in finite symmetric and alternating groups*, Trudy Inst. Mat. i Mech. UrO RAN, **19**:3 (2013), 145–149.

[10] V.M. Busarkin, Yu.M. Gorchakov, *Finite splittable groups*, Nauka, Moscow, 1968.

[11] V.I. Zenkov, A.I. Makosii, *On intersections of Sylow 2-subgroups in finite groups. I*, Vladikavkaz Mat. Zh., **11**:4 (2009), 16–21. Zbl 1324.20010

[12] Yong Yang, *Regular orbits of nilpotent subgroups of sobvable linear groups*, J. Algebra, **325**:1 (2011), 56–69.

[13] V.I. Zenkov, *On intersections of primary subgroups in the group* $\mathrm{Aut}(L_n(2))$, Trudy Inst. Mat. i Mech. UrO RAN, **21**:1 (2015), 105–111.

[14] V.I. Zenkov, Ya.N. Nuzhin, *On intersections of primary subgroups of odd order in almost simple groups*, Fund. Prikl. Mat., **19**:6 (2014), 115–123.

[15] V.I. Zenkov, *On intersections of abelian and nilpotent subgroups in finite groups*, Trudy Inst. Mat. i Mech. UrO RAN, **21**:3 (2015), 128–131.

[16] V.I. Zenkov, *On intersections of Sylow 2-subgroups in automorphism groups of finite simple groups of exceptional Lie type*, Trudy Inst. Mat. i Mech. UrO RAN, **17**:4 (2011), 92–101.

[17] M. Aschbacher, G. Seitz, *Involutions in Chevalley groups over fields of even order* Nagoya Math. J., **63** (1976), 1–92. Zbl 0359.20014

Victor Ivanovich Zenkov
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS,
S. Kovalevskaya St., 16,
620990, Ekaterinburg, Russia
B.N. Eltsin Ural Federal University,
Mira St., 19
620002, Ekaterinburg, Russia
E-mail address: V1I9Z52@mail.ru