S©MR ISSN 1813–3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 1116–1128 (2016) УДК 519.174.7
DOI 10.17377/semi.2016.13.088 MSC 05C50

СОВЕРШЕННЫЕ РАСКРАСКИ ПРИЗМЫ

М.А. ЛИСИЦЫНА, С.В. АВГУСТИНОВИЧ

Abstract. The cartesian product of an infinite chain by an edge is termed the infinite prism graph. A complete description of perfect colorings is obtained for prism graph. Bipartition of mentioned graph was used essentially by researchers. It's easy to adapt all results to finite case — finite prism graph and Mobius ladder.

Keywords: prism graph, Mobius ladder, perfect coloring, equitable partition, bipartite graph, induced coloring.

1. Введение

Раскраску вершин графа называют совершенной, если все его одинаково окрашенные вершины имеют одинаковый цветовой состав окружения. В англоязычной литературе для совершенных раскрасок используют термины equitable partitions и partition designs.

В данной работе описаны все совершенные раскраски для графа бесконечной призмы P_∞, являющегося прямым произведением бесконечной цепи на ребро. Как следствие, имеем полное решение этой проблемы и для всех конечных графов призмы $P(n)$, а также лестницы Мёбиуса $M(n)$, поскольку у обоих существует естественный гомоморфизм из P_∞. Ранее в [2] и [7] были описаны совершенные раскраски упомянутых графов в 2 и 3 цвета соответственно. Наиболее близкими к призме объектами являются квадратная решетка, по совершенным раскраскам которой имеется ряд результатов [1, 4, 9, 10], а также бесконечные циркулянтные графы [5, 6, 8].

Lisitsyna, M.A., Avgustinovich, S.V., Perfect colorings of the prism graph.

Поступила 13 июля 2016 г., опубликована 8 декабря 2016 г.

2. Предварительные сведения

Будем рассматривать $G(V_1, V_2)$ – двудольный граф с долями V_1 и V_2. Раскраску вершин одной доли графа G далее будем называть *полураскраской* этого графа. Полураскраска графа G называется *допустимой*, если существует совершенная раскраска вершин всего графа, частью которой она является. Две допустимые полураскраски графа G назовем *сопряженными*, если они дополняют друг друга до совершенной раскраски всего графа.

Обозначим через C_∞ бесконечный граф, множество вершин которого совпадает с множеством целых чисел, а ребрами соединены вершины, находящиеся на расстоянии 1. *Призмой* P_∞ называется прямое произведение графа C_∞ на ребро. Степень этого графа равна трем. На рис. 1 показано локальное строение призмы.

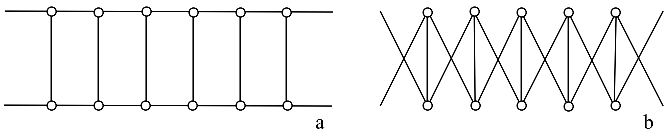

Рис. 1. Локальное строение призмы.

Для исследования параметров совершенных раскрасок конечных призм в 2 и 3 цвета авторы опирались на локальное строение призмы, изображенное на рис. 1,a (см. [2] и [7]). Т.к. для описания совершенных раскрасок графа бесконечной призмы существенно используется его двудольность, то локальное строение в форме, представленной на рис. 1,b, оказывается более наглядным. Поэтому далее будем использовать именно его.

Далее всюду n — натуральное число. Если известны цвета вершин 4-цикла призмы и параметры совершенной раскраски, легко продолжить раскраску на пару вершин соседнего 4-цикла и т.д. Т.к. число различных раскрасок 4-цикла в n цветов конечно для заданного n, то всякая совершенная раскраска исследуемого графа периодична. Таким образом, для описания совершенной раскраски графа P_∞ достаточно указать ее наименьший период. Записывать такой период будем таблицей размера $2 \times l$, где l – длина периода, первая строка таблицы соответствует раскраске верхней доли, вторая – нижней. Аналогичное утверждение справедливо и для допустимой полураскраски призмы. Ее период будем записывать заключенной в квадратные скобки строкой, количество элементов в которой равно длине периода.

Совершенную раскраску призмы будем называть *двудольной*, если множества цветов соответствующих полураскрасок не пересекаются. В противном случае множества цветов сопряженных полураскрасок совпадают. *Недвудольной* совершенной раскраской графа P_∞ назовем такую его совершенную раскраску, в которой совпадают множества цветов полураскрасок. Цвета верхней доли в записи двудольных совершенных раскрасок будем обозначать числами, а нижней – числами со штрихом или буквами. Числа будем использовать также для обозначения цветов недвудольных совершенных раскрасок.

Скажем несколько слов о логике доказательства основного результата. Доказательство состоит из двух частей. В первой части получено полное описание допустимых полураскрасок призмы. Множество допустимых полураскрасок графа P_∞ разбивается на два подмножества – стандартных и нестандартных полураскрасок. Строгие определения таких полураскрасок будут даны позднее.

Во второй части доказательства для каждой допустимой полураскраски найдены сопряженные ей дополнения в двудольном и недвудольном случаях. Множество совершенных раскрасок исследуемого графа разбивается на три подмножества: стандартные бесконечные серии, спорадические стандартные раскраски и нестандартные раскраски. Раскраски стандартных бесконечных серий получены из стандартных полураскрасок по шаблону, применимому ко всем таким полураскраскам. Подробное описание конструкций бесконечных серий совершенных стандартных раскрасок читатель найдет в пункте, посвященном стандартным бесконечным сериям. Спорадическими мы называем раскраски, получаемые сопряжением стандартных полураскрасок, но не входящие в бесконечные серии. Наконец, нестандартные полураскраски порождают нестандартные совершенные раскраски призмы.

3. Допустимые полураскраски

Рассмотрим произвольный двудольный граф $G(V_1, V_2)$. Для произвольной полураскраски $f_1(v)$ первой доли определим индуцированную ею полураскраску второй доли следующим образом: вершины множества V_2 с одинаковым цветовым составом окружения окрашиваются одинаково, а имеющие разные цветовые составы – в разные цвета. При этом используются новые цвета, которых не было в начальной полураскраске. Результат будем считать полученным *операцией индуцирования.*

Для индуцированных раскрасок справедлива следующая лемма, идейно восходящая к [3].

Лемма 1. *(Об индуцировании) Полураскраска произвольного двудольного графа G допустима тогда и только тогда, если соответствующая ей индуцированная раскраска является совершенной.*

Доказательство. Индуцированная полураскраска второй доли графа по построению удовлетворяет условию совершенства. По определению допустимости существует некоторая совершенная раскраска графа G, совпадающая с данной на первой доле. Рассмотрим какие-либо две одинаково раскрашенные вершины V и W первой доли. Окружающие V вершины обозначим через V_1,V_2, ... V_d, а окружающие W через W_1,W_2,...,W_d. Не теряя общности, будем считать, что цвета вершин V_i и W_i совпадают для всех $i = 1, 2, ..., d$. Но это означает, что цветовые составы вершин V_i и W_i в рассматриваемой совершенной раскраске одинаковы, а следовательно, цвета вершин V_i и W_i в индуцированной раскраске тоже совпадут. Значит цветовые составы вершин V и W в индуцированной раскраске одинаковы. Лемма 1 доказана. □

Характеристическим циклом доли призмы назовем граф, множество вершин которого совпадает с множеством вершин этой доли, две вершины соединены ребром, если они принадлежат одному 4-циклу графа P_∞. Допустимую полураскраску призмы будем называть *стандартной*, если она является совершенной раскраской своего характеристического цикла.

Полураскраски призмы с периодами

$S_{11}(n) = [n{-}1\; n{-}2\; \dots\; 1\; 0\; 1\; \dots\; n{-}3\; n{-}2]$,
$S_{12}(n) = [n{-}1\; n{-}2\; \dots\; 1\; 0\; 1\; \dots\; n{-}2\; n{-}1]$,
$S_{22}(n) = [n{-}1\; n{-}2\; \dots\; 1\; 0\; 0\; 1\; \dots\; n{-}2\;\; n{-}1]$

будем называть *зеркальными типов* $(1,1)$, $(1,2)$ *и* $(2,2)$ соответственно, а с периодами $S(n) = [0\;\; 1\;\; 2\;\; \dots\;\; n{-}2\;\; n{-}1]$ — *циклическими.* Тип зеркальной полураскраски определяется количеством вершин крайних цветов (0 и $n{-}1$) в периоде.

Следующие две леммы содержат полное описание допустимых полураскрасок графа P_∞.

Лемма 2. *Стандартные допустимые полураскраски призмы исчерпываются четырьмя бесконечными сериями: тремя сериями зеркальных полураскрасок и одной — циклических.*

Доказательство. Чтобы доказать утверждение леммы следует перечислить все совершенные раскраски графа C_∞.

Если известны цвета двух смежных вершин этого графа и параметры совершенной раскраски, легко продолжить раскраску на соседние с рассматриваемыми вершины и т.д. Т.к. число различных раскрасок двух смежных вершин в n цветов конечно для заданного n, то любая раскраска бесконечной цепи периодична. Всякой совершенной раскраске графа C_∞ с минимальным периодом длины k естественным образом можно поставить в соответствие совершенную раскраску цикла C_k.

Рассмотрим полученную раскраску k-цикла. Если для каждого цвета a окружение вершины этого цвета имеет одинаковый порядок цветов, то совершенная раскраска графа C_k имеет вид $[0\; 1\; 2\; \dots\; k{-}2\; k{-}1]$, т.е. является циклической. В случае если найдется цвет a^* такой, что две вершины этого цвета имеют различный порядок цветов окружения, то существует подходящее n, для которого совершенная раскраска k-цикла имеет один из трех зеркальных типов:
$[n{-}1\;\; n{-}2\;\; \dots\;\; 1\;\; 0\;\; 1\;\; \dots\;\; n{-}3\;\; n{-}2]$, $[n{-}1\;\; n{-}2\;\; \dots\;\; 1\;\; 0\;\; 1\;\; \dots\;\; n{-}2\;\; n{-}1]$ или $[n{-}1\; n{-}2\; \dots\; 1\; 0\; 0\; 1\; \dots\; n{-}2\; n{-}1]$.

Конструкции совершенных раскрасок, полученные для k-цикла, являются периодами совершенных раскрасок бесконечной цепи. Полураскраски призмы, соответствующие таким совершенным раскраскам характеристического цикла являются допустимыми в силу леммы 1. Лемма 2 доказана. □

Лемма 3. *Допустимые полураскраски призмы исчерпываются четырьмя бесконечными сериями стандартных полураскрасок и двумя нестандартными полураскрасками —* $[0\; 0\; 0\; 1]$ *и* $[0\; 0\; 1\; 2]$.

Доказательство. Рассмотрим некоторую допустимую полураскраску призмы. Согласно лемме 1 для доказательства утверждения достаточно исследовать соответствующую ей индуцированную раскраску всего графа. За ρ обозначим минимальное расстояние между соцветными вершинами в соответствующей раскраске характеристического цикла. Цвет вершин, на которых это минимальное расстояние достигается, обозначим 0. Если таких цветов несколько – выберем любой из них. Утверждение леммы доказано перебором всех возможных значений параметра ρ. Для наглядности результаты перебора представлены с помощью таблицы (см. таблицу 1), где в записи фрагментов буквам соответствуют цвета отличные от 0, кроме того, разным буквам – разные цвета.

Таблица 1. Схема доказательства леммы 3.

ρ	*Неизбежный фрагмент*	*Продолжение*	*Совершенная раскраска*
1	00	$a00a$	$S_{12}(n), S_{22}(n) (n \geqslant 2)$
		$a00b$	[0 0 1 2]
		$a000a$	[0 0 0 1]
		$a000b$	–
		0^n $(n \geqslant 4)$	$S(1)$
2	$0a0$	$a0a0a$	$S_{11}(2)$
		$b0a0b$	$S_{11}(n) (n \geqslant 3)$
		$b0a0a$	–
		$b0a0c$	–
3	$0ab0$	$b0ab0$	$S(3)$
		$c0ab0c$	–
		$c0ab0d$	–
$\geqslant 4$	$0a_1 \dots a_{\rho-1}0$ $(\rho \geqslant 4)$	$a_{\rho-1}0a_1 \dots a_{\rho-1}0a_1$	$S(\rho) (\rho \geqslant 4)$

Значения параметра ρ в такой таблице записаны в первом столбце. Во втором столбце представлены фрагменты, которые обязательно встретятся в полураскраске при соответствующем значении ρ, назовем их *неизбежными.* После чего для каждого значения ρ перечислены все возможные продолжения неизбежного фрагмента, анализ любого из которых приводит либо к противоречию, либо к допустимой полураскраске. Результат такого анализа записан в последний столбец, где прочерк означает, что с данным продолжением допустимую полураскраску графа P_∞ получить нельзя.

Остановимся более подробно на доказательстве. Неизбежный фрагмент для $\rho = 1$ имеет вид 00 и допускает пять продолжений (см. таблицу 1).

Рассмотрим первое продолжение – $a00a$. В раскраске призмы, индуцированной такой полураскраской, вершины, расположенные напротив вершин цвета 0, соцветны. Так как цветовые составы окружения вершин цвета 0 совпадают, то полураскраска нижней доли продолжается одинаково влево и вправо на одну вершину:

$$\begin{pmatrix} \dots & a & 0 & 0 & a & \dots \\ \dots & y & x & x & y & \dots \end{pmatrix}.$$

Анализируя окружения крайних вершин, продолжаем фрагмент влево и вправо симметрично. Из последнего замечания и того, что ρ принимает значение 1, следует: рассматриваемое продолжение – часть одной из зеркальных полураскрасок $S_{12}(n)$ или $S_{22}(n)$ $(n \geqslant 2)$.

В индуцированной раскраске продолжения $a00b$ вершины, расположенные напротив вершин цвета 0, окрашены разными цветами, так как имеют разный цветовой состав окружения. Полураскраска нижней доли продолжается однозначно влево и вправо на одну вершину, так как цветовой состав окружения 0-окрашенных вершин известен:

$$\begin{pmatrix} \dots & a & 0 & 0 & b & \dots \\ \dots & z & x & y & z & \dots \end{pmatrix}.$$

Рассматривая окружения вершин цвета z, продолжаем полураскраску верхней доли влево и вправо цветами b и a соответственно. Полученный фрагмент однозначно восстанавливается до совершенной раскраски графа P_∞ с периодом полураскраски верхней доли $[0\ 0\ b\ a]$. После переобозначения цветов получаем — $[0\ 0\ 1\ 2]$.

Нетрудно заметить, что продолжения $a000a$ и 0^n $(n \geqslant 4)$ однозначно восстанавливаются до допустимых полураскрасок с периодами $[0\ 0\ 0\ a] = [0\ 0\ 0\ 1]$ и $S(1)$ соответственно, а продолжение $a000b$ — противоречиво.

Для $\rho = 2$ неизбежный фрагмент имеет вид $0a0$ и допускает четыре продолжения.

В индуцированной раскраске продолжения $a0a0a$ вершины, расположенные напротив вершин цвета 0, окрашены одинаково. Так как цветовой состав окружения a-окрашенных вершин известен, полураскраску нижней доли можно продолжить вправо двумя способами:

$$\begin{pmatrix} \dots & a & 0 & a & 0 & a & \dots \\ \dots & & y & x & y & x & \dots \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} \dots & a & 0 & a & 0 & a & \dots \\ \dots & & y & x & y & y & \dots \end{pmatrix}.$$

Первый вариант однозначно восстанавливается до $S_{11}(2)$. Продолжая второй, приходим к противоречию.

Рассмотрим следующее продолжение — $b0a0b$. Вершины, лежащие напротив 0-окрашенных в индуцированной раскраске призмы, соцветны. Так как цветовые составы окружения вершин цвета 0 совпадают, то полураскраска нижней доли продолжается одинаково влево и вправо на одну вершину. Возможны два случая:

$$\begin{pmatrix} \dots & b & 0 & a & 0 & b & \dots \\ \dots & y & y & x & y & y & \dots \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} \dots & b & 0 & a & 0 & b & \dots \\ \dots & z & y & x & y & z & \dots \end{pmatrix}.$$

Продолжая первый фрагмент, приходим к противоречию. Второй же фрагмент влево и вправо продолжается симметрично. В силу последнего замечания и того, что $\rho = 2$, заключаем: такое продолжение – часть зеркальной полураскраски типа $S_{11}(n)$ $(n \geqslant 3)$.

В индуцированной раскраске продолжения $b0a0a$ вершины, расположенные напротив вершин цвета 0, окрашены разными цветами, так как имеют разный цветовой состав окружения. Полураскраска нижней доли продолжается однозначно влево и вправо на одну вершину, так как цветовой состав окружения 0-окрашенных вершин известен:

$$\begin{pmatrix} \dots & b & 0 & a & 0 & a & \dots \\ \dots & z & y & x & z & y & \dots \end{pmatrix}.$$

Анализируя окружения вершин цвета z, заключаем: $a = b$. Пришли к противоречию, значит, в этом случае допустимую полураскраску графа P_∞ получить нельзя.

Для продолжения $b0a0c$ доказательство аналогично случаю $b0a0a$.

При $\rho = 3$ неизбежный фрагмент имеет вид $0ab0$ и может встретиться в одной из следующих трех комбинаций: $b0ab0$, $c0ab0c$ или $c0ab0d$.

Рассмотрим первую комбинацию. Фрагмент раскраски графа P_∞, индуцированный ею, имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \dots & b & 0 & a & b & 0 & \dots \\ \dots & & x & x & x & & \dots \end{pmatrix}.$$

Так как в окружении 0-окрашенной вершины есть две вершины цвета x, полураскраску нижней доли можно продолжить двумя способами:

$$\begin{pmatrix} \dots & b & 0 & a & b & 0 & \dots \\ \dots & & x & x & x & x & \dots \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} \dots & b & 0 & a & b & 0 & & \dots \\ \dots & & x & x & x & & x & \dots \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $\rho = 3$, анализ окружения x-окрашенных вершин позволяет однозначно продолжить оба фрагмента до совершенной раскраски призмы с полураскраской верхней доли типа $S(3)$.

Запишем теперь фрагмент, индуцированный второй комбинацией:

$$\begin{pmatrix} \dots & c & 0 & a & b & 0 & c & \dots \\ \dots & & y & x & x & z & & \dots \end{pmatrix}.$$

Последовательно анализируя окружения вершин цветов 0, y и a, продолжаем такой фрагмент до следующего:

$$\begin{pmatrix} \dots & c & 0 & a & b & 0 & c & a & \dots \\ \dots & z & y & x & x & z & y & x & \dots \end{pmatrix}.$$

Так как цветовой состав окружения различных вершин цвета x не одинаков, такой фрагмент не может быть частью совершенной раскраски призмы. Значит, продолжение $c0ab0c$ не может быть частью никакой допустимой полураскраски.

Для комбинации $c0ab0d$ доказательство аналогично случаю $c0ab0c$.

Пусть $\rho \geqslant 4$. Неизбежный фрагмент для такого ρ имеет вид $0a_1 \dots a_{\rho-1}0$. В раскраске призмы, индуцированной таким фрагментом, вершины, расположенные напротив вершин цветов a_i ($i = \overline{1, \rho-1}$), окрашены разными цветами:

$$\begin{pmatrix} \dots & 0 & a_1 & \dots & a_{\rho-1} & 0 & \dots \\ \dots & & x_1 & \dots & x_{\rho-1} & & \dots \end{pmatrix}$$

Анализ окружения вершин цвета 0 делает очевидным следующий факт: в раскраске призмы правый сосед крайней справа вершины этого цвета окрашен x_1. Так как минимальное расстояние между соцветными вершинами равно ρ, цветовой состав окружения вершин цветов 0 и x_i ($i = \overline{1, \rho-1}$) восстанавливается однозначно, как и совершенная раскраска всего графа. Период верхней доли в такой раскраске имеет вид $S(\rho)$ ($\rho \geqslant 4$).

Лемма 3 доказана. $\square$

Следствие 1. *Допустимая полураскраска призмы в более чем три цвета является либо циклической, либо зеркальной.*

4. Стандартные бесконечные серии

В этом пункте будет дано описание операций, позволяющих из стандартных полураскрасок призмы получать совершенные раскраски всего графа.

Пусть $Z_n = \{0, 1, 2, \dots n{-}1\}$ — множество цветов полураскраски верхней доли графа P_∞. Для раскраски нижней доли будем использовать цвета из множества $Z'_n = \{0', 1', 2' \dots (n{-}1)'\}$. Каждую вершину нижней доли, расположенную напротив вершины цвета 0, покрасим цветом $0'$ (аналогично, для вершин цвета 1 – цветом $1'$ и т. д.). Определенную таким образом двудольную раскраску будем называть *штрих-дублированной.*

Пусть верхняя доля призмы покрашена стандартно. Нетрудно видеть, что соответствующая штрих-дублированная раскраска всего графа будет совершенной.

Двудольную совершенную раскраску призмы будем называть стандартной, если она получена применением операции штрих-дублирования к некоторой стандартной полураскраске. Заметим, что результаты применения операций штрих-дублирования и индуцирования к стандартной полураскраске в более чем три цвета совпадают.

Недвудольную совершенную раскраску графа P_∞ считаем стандартной, если она получена сопряжением двух одинаковых стандартных полураскрасок (одна может быть переведена в другую некоторым сдвигом и, возможно, отражением).

Следующие две леммы содержат полное описание стандартных раскрасок графа P_∞.

Лемма 4. *Бесконечные серии стандартных двудольных раскрасок призмы исчерпываются следующим списком:*

1. одна бесконечная циклическая серия:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n{-}2 & n{-}1 \\ 0' & 1' & 2' & \dots & (n{-}2)' & (n{-}1)' \end{pmatrix} \text{ при любых } n;$$

2. три бесконечные зеркальные серии:

$$B = \begin{pmatrix} n{-}1 & n{-}2 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & n{-}3 & n{-}2 \\ (n{-}1)' & (n{-}2)' & \dots & 1' & 0' & 1' & \dots & (n{-}3)' & (n{-}2)' \end{pmatrix} \text{ при любых } n;$$

$$C = \begin{pmatrix} n{-}1 & n{-}2 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & n{-}2 & n{-}1 \\ (n{-}1)' & (n{-}2)' & \dots & 1' & 0' & 1' & \dots & (n{-}2)' & (n{-}1)' \end{pmatrix} \text{ при любых } n;$$

$$D = \begin{pmatrix} n{-}1 & n{-}2 & \dots & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots & n{-}2 & n{-}1 \\ (n{-}1)' & (n{-}2)' & \dots & 1' & 0' & 0' & 1' & \dots & (n{-}2)' & (n{-}1)' \end{pmatrix} \text{ при любых } n.$$

Справедливость сформулированной леммы сразу следует из определения стандартной двудольной раскраски исследуемого графа.

Лемма 5. *Бесконечные серии стандартных недвудольных раскрасок призмы исчерпываются следующим списком:*

1. пять бесконечных циклических серий:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n{-}2 & n{-}1 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n{-}2 & n{-}1 \end{pmatrix} \text{ при любых } n;$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & t{-}1 & t & \dots & 2t{-}3 & 2t{-}2 \\ 0 & 2t{-}2 & 2t{-}3 & \dots & t & t{-}1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ при } n = 2t{-}1;$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & t{-}1 & t & t{+}1 & \dots & 2t{-}2 & 2t{-}1 \\ 0 & 2t{-}1 & 2t{-}2 & \dots & t{+}1 & t & t{-}1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ при } n = 2t;$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & t & t{+}1 & \dots & 2t{-}2 & 2t{-}1 \\ 1 & 0 & 2t{-}1 & \dots & t{+}1 & t & \dots & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ при } n = 2t;$$

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & t{-}1 & t & t{+}1 & ... & 2t{-}2 & 2t{-}1 \\ t & t{+}1 & ... & 2t{-}1 & 0 & 1 & ... & t{-}2 & t{-}1 \end{pmatrix} \text{ при } n = 2t;$$

2. пять бесконечных зеркальных серий:

$$J = \begin{pmatrix} n{-}1 & n{-}2 & ... & 1 & 0 & 1 & ... & n{-}3 & n{-}2 \\ n{-}1 & n{-}2 & ... & 1 & 0 & 1 & ... & n{-}3 & n{-}2 \end{pmatrix} \text{ при любых } n;$$

$$K = \begin{pmatrix} n{-}1 & n{-}2 & ... & 1 & 0 & 1 & ... & n{-}3 & n{-}2 \\ 0 & 1 & ... & n{-}2 & n{-}1 & n{-}2 & ... & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ при любых } n;$$

$$L = \begin{pmatrix} n{-}1 & n{-}2 & ... & 1 & 0 & 1 & ... & n{-}2 & n{-}1 \\ n{-}1 & n{-}2 & ... & 1 & 0 & 1 & ... & n{-}2 & n{-}1 \end{pmatrix} \text{ при любых } n;$$

$$M = \begin{pmatrix} n{-}1 & n{-}2 & ... & 1 & 0 & 0 & 1 & ... & n{-}2 & n{-}1 \\ n{-}1 & n{-}2 & ... & 1 & 0 & 0 & 1 & ... & n{-}2 & n{-}1 \end{pmatrix} \text{ при любых } n;$$

$$N = \begin{pmatrix} n{-}1 & n{-}2 & ... & 1 & 0 & 0 & 1 & ... & n{-}2 & n{-}1 \\ 0 & 1 & ... & n{-}2 & n{-}1 & n{-}1 & n{-}2 & ... & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ при любых } n.$$

Доказательство. Совершенные раскраски E, J, L и M получены дублированием допустимой полураскраски верхней доли на нижнюю, а раскраски F, G и H – зеркальным отражением копии циклической раскраски верхней доли в нижней относительно некоторой оси. Из циклических полураскрасок верхней доли с периодом четной длины можно получить совершенную раскраски I сдвигом ее дубликата в нижней доле на половину периода. Раскраска K – результат циклического сдвига продублированной зеркальной полураскраски типа (1,1) на $n{-}1$ позицию. Циклический сдвиг дубликата зеркальной полураскраски типа (2,2) верхней доли в нижней на n позиций порождает совершенную раскраску N.

Согласно лемме 2 в доказательстве нам достаточно рассмотреть четыре случая: циклический и три зеркальных.

Начнем с циклического случая. По определению стандартной недвудольной раскраски призмы сопряженная полураскраска нижней доли может быть получена из верхней циклическим сдвигом и/или зеркальным отражением относительно некоторой оси. Таким образом, напротив каждого цвета i ($0 \leq i \leq n{-}1$) находится его образ $\varphi(i)$. Пусть $m = \min_i |i{-}\varphi(i)|$. Не теряя общности, полагаем, что $m = |0{-}\varphi(0)|$. Пусть $m = 0$. Последовательно анализируя окружения вершин цветов 0, 1, 2 и т.д., получаем одну из трех совершенных раскрасок – E, F или G. Рассматривая окружения вершин цветов 0 и 1 в случае $m = 1$, получаем три фрагмента – два для $n \neq 3$:

$$\begin{pmatrix} \dots & n{-}1 & 0 & 1 & 2 & \dots \\ \dots & 2 & 1 & 0 & n{-}1 & \dots \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} \dots & n{-}1 & 0 & 1 & 2 & \dots \\ \dots & 1 & 2 & 0 & n{-}1 & \dots \end{pmatrix},$$

и один для $n = 3$:

$$\begin{pmatrix} \dots & 2 & 0 & 1 & 2 & \dots \\ \dots & 1 & 2 & 0 & 1 & \dots \end{pmatrix}.$$

Первый вариант продолжается до стандартной совершенной раскраски H, а второй и третий – до спорадических раскрасок с периодами $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ соответственно.

Пусть $m > 1$. Т.к. $m = \min_i |i-\varphi(i)| = |0-\varphi(0)|$, то сопряженная полураскраска, может быть получена из верхней полураскраски только циклическим сдвигом на k позиций. Очевидно, $k > 1$. Тогда нижняя полураскраска дополняет верхнюю до следующей раскраски всего графа:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & ... & k-1 & k & k+1 & ... & n-1 \\ n-k & n-k+1 & n-k+2 & ... & n-1 & 0 & 1 & ... & n-k-1 \end{pmatrix}.$$

Здесь сумма и разность соответствуют сумме и разности по модулю n. Рассмотрим окружение вершины цвета 0: $\{n-k-1, n-k, n-k+1\} = \{k-1, k, k+1\}$. Т.к. $k > 1$, последнее равенство верно для $k = \frac{n}{2}$ при четных n больших 3 (см. совершенную раскраску I) и для $n = 3$ с $k = 2$. Совершенная раскраска, соответствующая $n = 3$ и $k = 2$, является спорадической: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Дополнения зеркальных полураскрасок в n цветов до стандартных раскрасок призмы в недвудольном случае могут быть получены только циклическим сдвигом. Пусть полураскраска верхней доли графа P_∞ является зеркальной типа (1,1). Рассмотрим циклический сдвиг ее копии в нижней доле на k позиций. Описанные полураскраски дополняют друг друга до совершенной раскраски призмы, если окружения вершин цвета 1 верхней доли совпадают, т.е. цвета вершин x и y совпадают с цветами вершин z и t:

$$\begin{pmatrix} n-1 & n-2 & ... & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & ... & n-2 \\ & & ... & x & y & & z & t & ... & \end{pmatrix}.$$

Такое условие выполнено только для $k = 0$ и $k = n-1$ при любых n. Если сдвиг отсутствует, получается совершенная раскраска J, а при сдвиге на $n-1$ позицию – K.

Рассуждая аналогично, заключаем: дополнения зеркальной полураскраски типа (1,2) допустимы при циклическом сдвиге исходной полураскраски на $k = 0$ позиций при любых n (см. совершенную раскраску L). А при $n = 2$ совершенная раскраска призмы получается также циклическим сдвигом полураскраски [1 0 1] на одну позицию: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Такая раскраска является спорадической стандартной раскраской.

Рассмотрим зеркальную полураскраску типа (2,2) верхней доли призмы. Выполним циклический сдвиг ее копии в нижней доле на k позиций. Для того чтобы полученная полураскраска была дополнением исходной до совершенной раскраски призмы необходимо, чтобы цветовой состав окружений вершин цвета 0, расположенных в верхней доле совпадал, т.е. вершины, обозначенные буквой a, должны быть окрашены одним цветом:

$$\begin{pmatrix} n-1 & n-2 & ... & 1 & 0 & 0 & 1 & ... & n-2 & n-1 \\ & & ... & a & & & a & ... & & \end{pmatrix}.$$

Это условие выполняется лишь для $k = 0$ и $k = n$ при всех n. Циклический сдвиг на 0 и n позиций порождает дополнения полураскраски типа (2,2) до совершенных раскрасок M и N соответственно.

Лемма 5 доказана. □

5. Основные результаты

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. *Двудольные совершенные раскраски призмы исчерпываются следующим списком:*

1. стандартные бесконечные серии;

2. четыре спорадические стандартные раскраски:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & a & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & a & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & b & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & a & b \end{pmatrix};$$

3. две нестандартные раскраски:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & a & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ a & b & c & c \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Согласно определению и лемме 1 операция индуцирования продолжает всякую допустимую полураскраску до двудольной совершенной раскраски в минимальное количество цветов. Значит, любая двудольная совершенная раскраска призмы, содержащая заданную допустимую полураскраску, либо является индуцированной, либо получается из индуцированной расщеплением цветов второй доли. Т.к. обе доли в совершенной раскраске призмы окрашены допустимо, организуем перебор всех совершенных раскрасок призмы так, чтобы число цветов в допустимой полураскраске второй доли не превосходило числа цветов в первой.

Нетрудно убедиться в том, что индуцированные дополнения лишь двух стандартных полураскрасок — [0 0 1] и [0 1 2] – отличаются от своих штрих-дублированных дополнений и имеют следующий вид ($a \notin \{0, 1, 2\}$):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & a & a \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & a & a \end{pmatrix}.$$

Такие совершенные раскраски призмы являются спорадическими стандартными раскрасками.

Заметим, что расщепление цвета a на два цвета дает еще две неэквивалентные спорадические раскраски исследуемого графа:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & b & a \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a & a & b \end{pmatrix}.$$

Согласно условиям перебора других спорадических стандартных раскрасок в двудольном случае нет.

Индуцированные дополнения нестандартных полураскрасок [0 0 0 1] и [0 0 1 2] содержат 2 и 3 цвета соответственно и согласно условиям перебора расщепления цветов не допускают. Теорема 1 доказана. □

Теорема 2. *Недвудольные совершенные раскраски призмы исчерпываются следующим списком:*

1. стандартные бесконечные серии;

2. три спорадические стандартные раскраски:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

3. три нестандартные раскраски:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. В силу леммы 5 в доказательстве нуждается только п.3.

Напомним, что нестандартные раскраски призмы – результат сопряжения ее нестандартных полураскрасок, и множества цветов сопряженных полураскрасок совпадают в недвудвольных совершенных раскрасках графа P_∞. С учетом циклического сдвига и зеркального отражения полураскраски одной доли относительно другой возможны двенадцать вариантов такого сопряжения:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрев окружения вершин каждого цвета в этих раскрасках, заключаем, что совершенными являются только следующие три:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 2 доказана. □

6. Заключение

Данная статья завершает изучение совершенных раскрасок призмы и лестницы Мёбиуса. В работе описаны все совершенные раскраски для графа бесконечной призмы P_∞. Совершенные раскраски для конечных графов призмы $P(n)$ и лестниц Мёбиуса $M(n)$ могут быть получены из них в качестве следствия. Метод локально жестких фрагментов, использованный в [2] и [7] для изучения совершенных раскрасок упомянутых графов в 2 и 3 цвета, в случае произвольного числа цветов оказывается малоэффективным. В этом случае работают методы, опирающиеся на двудольность исследуемого графа, в частности, лемма об индуцировании.

Отметим, что в работе получено полное описание совершенных раскрасок не только графа бесконечной призмы, но также графа C_∞. Полученные результаты относятся к числу немногих известных описаний такого рода для бесконечных графов или бесконечных серий графов.

References

[1] S. V. Avgustinovich, A. Yu. Vasil'eva, I. V. Sergeeva, *Distance regular colorings of the infinite rectangular grid*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **18**:3 (2011), 3–10. Zbl 1249.05106

[2] S. V. Avgustinovich, M. A. Lisitsyna, *Perfect 2-colorings of transitive cubic graphs*, J. Appl. Industr. Math., **5**:4 (2011), 519–528. Zbl 1249.05105

[3] S. V. Avgustinovich, I. Yu. Mogil'nykh, *Induced perfect colorings*, Sibirskie Elektronnye Matematicheskie Izvestiya, **8** (2011), 310–316.

[4] M. A. Axenovich, *On multiple coverings of the infinite rectangular grid with balls of constant radius*, Discrete Math., **268**: 1–3 (2003), 31–48. Zbl 1018.05080

[5] D. B. Khoroshilova, *On the parameters of perfect 2-colorings of circulant graphs*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **18**:6 (2011), 82–89. Zbl 1249.05121

[6] D. B. Khoroshilova, *On two-color perfect colorings of circular graphs*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **16**:1 (2009), 80–92. Zbl 1249.05119

[7] M. A. Lisitsyna, *Perfect 3-colorings of prism and Mobius ladder graphs*, J. Appl. Industr. Math., **7**:2 (2013), 215–220. Zbl 1324.05061

[8] O. G. Parshina, *Perfect 2-colorings of infinite circulant graphs with a continuous set of distances*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **21**:2 (2014), 76–83. Zbl 1324.05064

[9] S. A. Puzynina, *Perfect colorings of vertices of the graph G_{Z^2} in three colors*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **12**:1 (2005), 37–54. Zbl 1249.05133

[10] S. A. Puzynina, S. V. Avgustinovich, *On periodicity of two-dimensional words*, Theor. Comput. Sci., **391** (2008), 178–187. Zbl 1133.68068

Mariya Aleksandrovna Lisitsyna
Budyonny Military Academy of Telecommunications,
Tikhoretsky pr., 3,
194064, St. Petersburg, Russia
E-mail address: lisicinama@ngs.ru

Sergey Vladimirovich Avgustinovich
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: avgust@math.nsc.ru