S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 1129–1149 (2016) УДК 517.954
DOI 10.17377/semi.2016.13.089 MSC 35S15

ПОТЕНЦИАЛЫ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В КОНУСАХ

В.Б. ВАСИЛЬЕВ

Abstract. One discusses a solving procedure for elliptic pseudo differential equations in a model multidimensional cone, and using the concept of wave factorization one studies a solvability for this equation. Taking into account the construction for a general solution one needs some additional conditions for a unique solvability. For simplest cases one gives a reduction of the obtained boundary value problem to certain integral equation like classical potential method.

Keywords: elliptic pseudo differential equation, wave factorization, cone, boundary value problem.

1. Введение

Потенциалы для краевой задачи строятся по следующей схеме. Берется (если это возможно) фундаментальное решение (эллиптического) оператора, записывается «свертка» с фундаментальным решением в роли ядра (для задачи Неймана; если условие Дирихле, – нормальная производная фундаментального решения), изучаются граничные значения этой свертки, и, если повезет, получают эквивалентное уравнение Фредгольма.

Конечно, сказанное справедливо лишь с точки зрения современной математики, физические (и исторические) предпосылки здесь не затрагиваются. Что же касается интегрального представления решения краевой задачи, то, насколько известно автору, оно есть только для шара и полупространства (т. е. там, где имеется явный вид функции Грина). Формулу же для полупространства Г.И. Эскин [8] получил методом факторизации (интеграл Пуассона для лапласиана). Здесь предлагается нечто аналогичное для конуса методом волновой факторизации [11, 14]. Первые попытки уже сделаны [16, 18].

Vasilyev, V.B., Potentials for elliptic boundary value problems in cones.

Поступила 14 февраля 2016 г., 8 декабря 2016 г.

2. Предварительные сведения

2.1. **Пространства и операторы.** Основная цель исследования – описать возможные условия разрешимости (или хотя бы фредгольмовости) псевдодифференциального уравнения

$$(Au)(x) = f(x),\ x \in D, \tag{1}$$

где D – многообразие с негладким краем, A – эллиптический псевдодифференциальный оператор с символом $A(x,\xi)$. Переменная x называется пространственной переменной, переменная ξ – ко-переменной. Если символ $A(x,\xi)$ не зависит от пространственной переменной, $A(x,\xi) \equiv A(\xi)$, то псевдодифференциальный оператор определяется формулой

$$(Au)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{-ix\xi} A(\xi)\tilde{u}(\xi)d\xi,$$

где $\tilde{u}$ – преобразование Фурье функции u,

$$\tilde{u}(\xi) \equiv (Fu)(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{ix\xi} u(x)dx,$$

В общем случае псевдодифференциальный оператор в пространстве $\mathbb{R}^m$ можно задать формулой

$$u(x) \longmapsto \int\limits_{\mathbb{R}^m}\int\limits_{\mathbb{R}^m} A(x,\xi)u(y)e^{i(y-x)\cdot\xi}d\xi dy.$$

Обычно при исследовании фредгольмовости псевдодифференциального уравнения (оператора) пользуются локальным принципом, или, другими словами, методом замораживания коэффициентов. Грубо говоря, локальный принцип утверждает, что для фредгольмовость уравнения (1) (с гладким по (x,ξ) символом) эквивалентна обратимости локальных представителей оператора A. Кратко поясним механизм его применения.

На многообразии D выбираются два конечных покрытия так, что более мелкое $\{u_k\}_{k=1}^n \supset D$ содержится в более крупном $\{U_k\}_{k=1}^n \supset D, u_k \subset U_k, \forall k$. По каждому покрытию строится разбиение единицы, обозначим их соответственно $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^n$ и $\{\Phi_k(x)\}_{k=1}^n$. Оператор A в уравнении (1) представляется в виде

$$A = \sum_{k=1}^n \phi_k(x) A \sum_{k=1}^n \Phi_k(x) = \sum_{k=1}^n \phi_k(x) A \Phi_k(x) + T,$$

где T – вполне непрерывный оператор. В каждой окрестности выбираются локальные координаты, с помощью которых слагаемые последней суммы «переселяются» в соответствующие области пространства $\mathbb{R}^m$. Если символ оператора обладает какой-то гладкостью по x, то в пределах малой окрестности он представляет собой символ, не зависящий от пространственной переменной (с точностью до малого возмущения).

Ниже описываются варианты локальных представителей в зависимости от местоположения пространственной переменной x.

Локально (с «замороженной» пространственной переменной x) оператор A определяется формулой

$$u(x) \longmapsto \int\limits_{\mathbb{R}^m} \int\limits_{\mathbb{R}^m} A(\cdot,\xi)u(y)e^{i(y-x)\cdot\xi}d\xi dy,$$

если D – гладкое компактное многообразие. Для многообразия с гладким краем нужны другие локальные формулы для определения оператора A: конкретнее, во внутренних точках x многообразия D используется первая формула, однако в граничных точках гладкости нужна уже другая, именно

$$u(x) \longmapsto \int\limits_{\mathbb{R}^m_+} \int\limits_{\mathbb{R}^m} A(\cdot,\xi)u(y)e^{i(y-x)\cdot\xi}d\xi dy,$$

где $\mathbb{R}^m_+ = \{x \in \mathbb{R}^m : x = (x_1, ..., x_m),\ x_m > 0\}$ – полупространство.

Для обратимости последнего оператора с символом $A(\cdot,\xi)$, не зависящим от пространственной переменной x, можно воспользоваться теорией классической краевой задачи Римана [6, 7] для верхней и нижней комплексных полуплоскостей с параметром ξ'. Это было систематически проделано в работах М.И. Вишика, Г.И. Эскина [8]. Однако, если граница ∂D имеет хотя бы одну коническую точку, этот подход неприменим.

Коническая точка на границе – это такая точка, окрестность которой диффеоморфна конусу

$$C^a_+ = \{x \in \mathbb{R}^m :\ x_m > a|x'|,\ x' = (x_1, ..., x_{m-1}),\ a > 0\},$$

откуда возникает следующее локальное определение для псевдодифференциального оператора в окрестности конической точки

$$u(x) \longmapsto \int\limits_{C^a_+} \int\limits_{\mathbb{R}^m} A(\cdot,\xi)u(y)e^{i(y-x)\cdot\xi}d\xi dy.$$

(Автор считает нужным принести извинения возможному читателю его работы [10] – в приведенных определения всей тройки локальных операторов допущены досадные описки; правильные определения – здесь). Здесь не приводится точное определение псевдодифференциального оператора на многообразии с коническими точками и ребрами на границе, это делается с помощью выбора атласа и разбиения единицы, поскольку в данной работе будет идти речь о *модельном* операторе в *канонической* области.

Мы рассматриваем такой оператор в пространстве Соболева – Слободецкого $H^s(\mathbb{R}^m)$ с нормой

$$||u||^2_s = \int\limits_{\mathbb{R}^m} |\tilde{u}(\xi)|^2(1+|\xi|)^{2s}d\xi,$$

и вводим следующий класс символов, не зависящих от пространственной переменной x: $\exists c_1, c_2 > 0$, такие, что

$$c_1 \le |A(\xi)(1+|\xi|)^{-\alpha}| \le c_2,\ \xi \in \mathbb{R}^m. \qquad (*)$$

Число $\alpha \in \mathbb{R}$ называют порядком псевдодифференциального оператора A.

Хорошо известно (и легко доказывается), что такой псевдодифференциальный оператор является линейным ограниченным оператором, действующим из пространства $H^s(\mathbb{R}^m)$ в пространство $H^{s-\alpha}(\mathbb{R}^m)$ [8].

Перейдем к исследованию разрешимости модельного псевдодифференциального уравнения [11, 13, 14]

$$(Au_+)(x) = f(x),\ x \in C_+^a, \tag{2}$$

в пространстве $H^s(C_+^a)$, где C_+^a – m-мерный конус вида $C_+^a = \{x \in \mathbb{R}^m : x = (x_1, ..., x_{m-1}, x_m), x_m > a|x'|, a > 0\}$, $x' = (x_1, ..., x_{m-1})$, A – псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$, удовлетворяющим условию $(*)$.

По определению, пространство $H^s(C_+^a)$ состоит из обобщенных функций из пространства $H^s(\mathbb{R}^m)$, носители которых содержатся в $\overline{C_+^a}$. Норма в пространстве $H^s(C_+^a)$ индуцируется нормой пространства $H^s(\mathbb{R}^m)$.

Обозначим $S(\mathbb{R}^m)$ класс Шварца бесконечно дифференцируемых быстро убывающих на бесконечности функций, $S'(\mathbb{R}^m)$ – пространство обобщенных функций над $S(\mathbb{R}^m)$, $S'(C_+^a)$ – пространство обобщенных функций из $S'(\mathbb{R}^m)$ с носителями в $\overline{C_+^a}$. Правая часть f выбирается из пространства $H_0^{s-\alpha}(C_+^a)$, которое состоит из обобщенных функций из $S'(C_+^a)$, допускающих продолжение на все пространство $H^{s-\alpha}(\mathbb{R}^m)$. Норма в пространстве $H_0^{s-\alpha}(C_+^a)$ определяется формулой

$$||f||_{s-\alpha}^+ = \inf ||lf||_{s-\alpha},$$

где *infimum* берется по всем продолжениям l.

Далее, определяется специальный многомерный сингулярный интеграл следующей формулой

$$(G_m u)(x) = \lim_{\tau \to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{u(y', y_m) dy' dy_m}{(|x' - y'|^2 - a^2(x_m - y_m + i\tau)^2)^{m/2}}$$

(опущены некоторые константы, см. [11]). Здесь уместно напомнить, что этот оператор является многомерным аналогом интеграла типа Коши, а точнее, преобразования Гильберта.

Чтобы ввести определение, потребуются некоторые обозначения.

Символом $\overset{*}{C_+^a}$ обозначим сопряженный конус для C_+^a:

$$\overset{*}{C_+^a} = \{x \in \mathbb{R}^m : x = (x', x_m), ax_m > |x'|\},$$

$C_-^a \equiv -C_+^a$, $T(C_+^a)$ обозначает радиальную трубчатую область над конусом C_+^a, т.е. область многомерного комплексного пространства $\mathbb{C}^m$ вида $\mathbb{R}^m + iC_+^a$, знак «$\sim$» используется для преобразования Фурье как над знаком функции ($\tilde{u}_+$ – это преобразование Фурье функции u_+) , так и над знаком пространства ($\tilde{H}$ – это Фурье-образ пространства H).

Для описания картины разрешимости уравнения (2) вводится следующее

Определение. *Волновой факторизацией символа $A(\xi)$ называется его представление в виде*

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi) A_{=}(\xi),$$

где сомножители $A_{\neq}(\xi), A_{=}(\xi)$ должны удовлетворять следующим условиям:

1) $A_{\neq}(\xi), A_{=}(\xi)$ определены для всех значений $\xi \in \mathbb{R}^m$, кроме, возможно, точек $\{\xi \in \mathbb{R}^m : |\xi'|^2 = a^2\xi_m^2\}$;

2) $A_{\neq}(\xi), A_{=}(\xi)$ допускают аналитическое продолжение в радиальные трубчатые области $T(\overset{*}{C_+^a}), T(\overset{*}{C_-^a})$ соответственно, для которых справедливы оценки

$$|A_{\neq}^{\pm 1}(\xi + i\tau)| \leq c_1(1 + |\xi| + |\tau|)^{\pm æ},$$

$$|A_{=}^{\pm 1}(\xi - i\tau)| \leq c_2(1 + |\xi| + |\tau|)^{\pm(\alpha - æ)}, \ \forall \tau \in \overset{*}{C}{}_{+}^{a} .$$

Число $æ \in \mathbb{R}$ *называется индексом волновой факторизации.*

Класс символов, допускающих волновую факторизацию, достаточно богат. Отдельная глава книги [11] и статья [15] целиком посвящены этому вопросу, там приведено достаточно много примеров. Однако здесь для полноты изложения будет приведен один из ключевых примеров для широко распространенного оператора математической физики.

2.2. **О волновой факторизации.** Рассмотрим оператор Гельмгольца

$$A = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial x_1^m} + k^2, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

тогда в соответствии со свойствами преобразования Фурье символ этого оператора будет следующим

$$A(\xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_m^2 + k^2.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\sqrt{a^2+1}\, z_m + W(z),$$

$$W(z) = \sqrt{a^2 z_m^2 - z_1^2 - \cdots - z_{m-1}^2 - k^2},$$

в многомерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^m$, $z_j = \xi_j + i\eta_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Важную роль в последующих рассуждениях играет следующая лемма, доказанная в [27], с. 350., для случая светового конуса ($a = 1$), кроме этого, мы воспользуемся некоторыми фактами из [27, 28], которые приведем ниже.

Лемма 1. *Точка* $z = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m$ *принадлежит множеству* $T(\overset{*}{C}{}^{a}) \equiv T(\overset{*}{C}{}_{+}^{a}) \cup T(\overset{*}{C}{}_{-}^{a})$ *тогда и только тогда, когда выражение*

$$a^2(z_m - x_m)^2 - (z_{m-1} - x_{m-1})^2 - \ldots - (z_1 - x_1)^2$$

является либо комплексным, либо вещественным отрицательным числом для всех $x \in \mathbb{R}^m$.

Доказательство. Для краткости обозначим

$$z^2 = a^2 z_m^2 - z_{m-1}^2 - \cdots - z_1^2, \quad z = (z', z_m), \ z' = (z_1, \ldots, z_{m-1}).$$

Пусть $z = x' + iy$. Из условия

$$(x' - x + iy)^2 = (x' - x)^2 - y^2 + 2iy \cdot (x' - x) \neq \rho \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m,$$

где $y \cdot (x' - x) = a^2 y_m (x'_m - x_m) - \sum\limits_{k=1}^{m-1} y_k (x'_k - x_k)$, следует, что $y^2 \neq 0$. Если $y^2 < 0$. то, выбирая x таким. что

$$\begin{aligned}
&x'_m = x_m \\
&y_1(x_1 - x'_1) + \cdots + y_{m-1}(x_{m-1} - x'_{m-1}) = 0, \\
&(x_1 - x'_1)^2 + \cdots + (x_{m-1} - x'_{m-1})^2 = -y^2,
\end{aligned}$$

мы получим $(z - x')^2 = 0$, а это невозможно. Таким образом, $y^2 > 0$, т. е. $a^2 y_m^2 - y_{m-1}^2 - \cdots - y_1^2 > 0$, а это значит, что $z \in T(\overset{*}{C}{}^{a})$.

Обратно, если $y^2 > 0$, то либо

$$y_1(x_1 - x'_1) + \cdots + y_{m-1}(x_{m-1} - x'_{m-1}) \neq 0,$$

либо при $y_1(x_1-x_1')+\dots+y_{m-1}(x_{m-1}-x_{m-1}')=0$,

$$(x'-x)^2-y^2=\left[\frac{\overline{y}\cdot\left(\overline{x'}-\overline{x}\right)}{y_m}\right]^2-|\overline{x}-\overline{x'}|^2-y^2\le -y^2\left[1+\frac{\left|\overline{x}-\overline{x'}\right|^2}{y_m^2}\right]<0$$

(здесь $\overline{x}=(x_1,\dots,x_{m-1})$, $\overline{y}=(y_1,\dots,y_{m-1})$), что и требовалось доказать. □

Из леммы 1 следует, что функция

$$a^2z_m^2-z_1^2-\dots-z_{m-1}^2$$

не принимает неотрицательных значений (тем более это справедливо и для функции $a^2z_m^2-z_1^2-\dots-z_{m-1}^2-k^2$), откуда следует, что каждая из двух ветвей функции $W(z)$ однозначна и аналитична на множестве $T(\overset{*}{C}{}^a_+)\cup T(\overset{*}{C}{}^a_-)\equiv T(\overset{*}{C}{}^a)$.

2.2.1. *Комплексный анализ в радиальных трубчатых областях над конусами.* Здесь будут приведены вспомогательные факты о функциях, аналитических в радиальных трубчатых областях над конусами. Мы ограничимся лишь теми, которые понадобятся для наших целей. Следует отметить, что основополагающие результаты этой теории получены и описаны В.С. Владимировым [27, 28].

Класс $H_p(a,C)$. Говорят, что $f(z)$ принадлежит классу $H_p(a;C)$ $(p\ge 1, a\ge 0)$, если она аналитична в радиальной трубчатой области $T(C)$ и для любого конуса $C'\Subset C$ удовлетворяет оценке

$$|f(z)|\le M(C')(1+|z|)^\beta\left(1+|y|^{-\alpha}\right)e^{a|y|^p},\quad z\in T(C'),$$

для некоторых $\alpha\ge 0,\ \beta\ge 0$, не зависящих от C'.

Существование граничных значений. Пусть функция $f(z)$ аналитична в трубчатой области $T(C_R)=\mathbb{R}^m+iC_R$, где $C_R=C\cap U(0;R)$, $U(0;R)$ – шар с центром в 0 и радиусом R, C – связный конус, для любого числа $R'<R$ и конуса $C'\Subset C$ выполняется оценка

$$|f(x+iy)|\le c(R',C')|y|^{-\alpha}(1+|x|)^\beta,$$
$$z\in\mathbb{R}^m+i\left[C'\cap U(0;R')\right],$$

и числа $\alpha\ge 0$ и $\beta\ge 0$ не зависят от R' и C'.

Тогда существует единственное граничное значение в $S'(\mathbb{R}^m)$

$$f(x)=\lim_{y\to 0,\ y\in C}f(x+iy),$$

не зависящее от последовательности $y\to 0,\ y\in C$ (и эта последовательность содержится в некотором конусе $C'\Subset C$).

Спектральная функция, индикатриса и описание класса $H_1(a,C)$. Пусть функция $f(z), z=x+iy$, аналитична в трубчатой области $T(B)=\mathbb{R}^m+iB$. Спектральной функцией функции $f(z)$ называется обобщенная функция $g\in D'$ (пространство обобщенных функций над основным пространством D бесконечно дифференцируемых финитных функций), обладающая свойствами

$$1)\quad g(\xi)e^{-\xi\cdot y}\in S'\quad\forall y\in B;$$

$$2)\quad f(z)=F[g(\xi)e^{-y\cdot\xi}](x)=\int\limits_{\mathbb{R}^m}g(\xi)e^{iz\cdot\xi}d\xi,\quad\forall z\in T(B),$$

где S' здесь обозначает пространство обобщенных функций медленного роста [27, 28]. При этом функция $f(z)$ называется преобразованием Фурье–Лапласа спектральной функции $g(\xi)$. Критерий существования спектральных функций содержится в следующем предложении [28, 29].

Для того, чтобы функция $f(z)$, аналитическая в трубчатой области $T(B)$, была преобразованием Фурье–Лапласа некоторой спектральной функции, достаточно, чтобы для любого компакта $K \subset B$ существовали такие $M = M(K)$ числа и $n = n(K)$, что

$$|f(z)| \leq M(1+|x|)^n, \quad z \in \mathbb{R}^m + iK; \tag{3}$$

необходимо, чтобы $f(z)$ была аналитична в выпуклой оболочке $O(T(B) = T(O(B))$ и удовлетворяла в ней вместе со всеми производными оценке (3).

Индикатрисой конуса C называется функция

$$\mu_C(\xi) = \sup_{y \in pr\ C} (-\xi \cdot y),$$

где $pr\ C$ обозначает проекцию конуса – пересечение конуса C с единичной сферой $|y| = 1$.

Для конуса можно определить сопряженный конус

$$C^* = \{\xi \in \mathbb{R}^m : \xi \cdot y > 0, y \in C\}.$$

Стоит отметить, что если конус C выпуклый, то $(C^*)^* = C$.

Индикатриса определяет связь между конусами C и C^* [27], с.258:

$$C^* = \{\xi : \ \mu_C(\xi) < 0\}, \quad \mathbb{R}^m \setminus \overline{C^*} = \{\xi : \ \mu_C(\xi) > 0\}.$$

Мы приведем описание класса $H_1(0, C) \equiv H(C)$ для случая выпуклого острого конуса C, которое будет играть ключевую роль в наших последующих рассуждения (в более общей форме это описание дано в [27], с.280).

Пусть $f(z) \in H(C)$. Тогда ее спектральная функция $g(\xi) \in S'$ и

$$g(\xi) = 0, \quad \mu(\xi) > 0.$$

Обратно, если $g \in S'$ обращается в нуль в области $\mu(\xi) > 0$, то все производные $D^\alpha f(z)$ ее преобразования Фурье–Лапласа $f(z)$ принадлежат классу $H(C)$.

2.2.2. *Граничные значения и волновая факторизация.* Нетрудно убедиться в том, что функция $W(z)$ удовлетворяет определению класса $H_p(a, C)$ с $p = 1$, $a = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$ и универсальной постоянной M, не зависящей от подконуса $\overset{*}{C}{}^a_1$. Следовательно, $W(z) \in H_0(\overset{*}{C}{}^a)$, и тогда в соответствии с приведенным выше результатом у этой функции существуют граничные значения в смысле распределений при $\eta \to 0$, $\eta \in \overset{*}{C}{}^a_\pm$.Эти граничные значения представляют собой локально интегрируемые функции и легко вычисляются. Поскольку граничные значения не зависят от характера стремления η к нулю, можно рассмотреть следующие пределы:

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \sqrt{a^(\xi_m \pm i\varepsilon)^2 - \xi_1^2 - \cdots - \xi_{m-1}^2 - k^2}.$$

Выберем какую-нибудь ветвь функции $W(z)$, например, ту, которая отображает $T(\overset{*}{C})$ в верхнюю полуплоскость. Граничные значения этой ветви будут иметь следующий вид:

$$\sqrt{a^(\xi_m \pm i0)^2 - \xi_1^2 - \cdots - \xi_{m-1}^2 - k^2}$$

$$= \begin{cases} \pm\sqrt{a^2\xi_m^2 - |\xi'|^2 - k^2}, & a^2\xi_m^2 - |\xi'|^2 - k^2 > 0, \quad \xi_m > 0 \\ \mp\sqrt{a^2\xi_m^2 - \xi_1^2 - \dots - \xi_{m-1}^2 - k^2}, & a^2\xi_m^2 - |\xi'|^2 - k^2 > 0, \quad \xi_m < 0 \\ i\sqrt{|\xi'|^2 + k^2 - a^2\xi_m^2}, & a^2\xi_m^2 - |\xi'|^2 - k^2 < 0, \end{cases}$$

который получится, если аккуратно понаблюдать за поведением модуля и аргумента $W(\xi_1, \dots, \xi_{m-1}, \xi_m \pm i\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$.

Далее, отметим. что

$$\sqrt{a^2(\xi_m + i0)^2 - |\xi'|^2 - k^2} = -\overline{\sqrt{a^2(\xi_m - i0)^2 - |\xi'|^2 - k^2}},$$

где черта сверху обозначает комплексное сопряжение.

Возвращаясь к функции

$$\sqrt{a^2+1}\, z_m + W(z)$$

заключаем. что она аналитична в $T(\overset{*}{C}{}^a_+)$, и, аналогично, функция

$$\sqrt{a^2+1}\, z_m + \overline{W(z)}$$

аналитична в $T(\overset{*}{C}{}^a_-)$. Тогда можно записать

$$\begin{aligned} &\xi_m^2 + |\xi'|^2 + k^2 \\ &= \left(\sqrt{a^2+1}\,\xi_m + \sqrt{a^2(\xi_m + i0)^2 - \xi_1^2 - \cdots \xi_{m-1}^2 - k^2}\right) \\ &\times \left(\sqrt{a^2+1}\,\xi_m + \overline{\sqrt{a^2(\xi_m - i0)^2 - \xi_1^2 - \cdots \xi_{m-1}^2 - k^2}}\right), \end{aligned}$$

где каждый из сомножителей допускает аналитическое продолжение в $T(\overset{*}{C}{}^a_+)$, $T(\overset{*}{C}{}^a_-)$ соответственно. Очевидно, что эти аналитические продолжения принадлежат пространствам $H_0(\overset{*}{C}{}^a_+)$, $H_0(\overset{*}{C}{}^a_-)$.

Последнее равенство – это волновая факторизация для оператора Гельмгольца. Для краткости и удобства его можно записать как

$$\begin{gathered} \xi_m^2 + |\xi'|^2 + k^2 \\ = \left(\sqrt{a^2+1}\,\xi_m + \sqrt{a^2\xi_m^2 - |\xi'|^2 - k^2}\right)\left(\sqrt{a^2+1}\,\xi_m - \sqrt{a^2\xi_m^2 - |\xi'|^2 - k^2}\right) \end{gathered}$$

подразумевая под $\sqrt{a^2\xi_m^2 - |\xi'|^2 - k^2}$ граничное значение функции

$$\sqrt{a^2(\xi_m + i0)^2 - |\xi'|^2 - k^2}.$$

Последнюю формулу можно обобщить, рассматривая «комплексные степени» оператора Гельмгольца, т. е. операторы с символами

$$\left(\xi_m^2 + |\xi'|^2 + k^2\right)^{\alpha + i\beta}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

В этом случае волновая факторизация будет иметь вид

$$\begin{aligned} \left(\xi_m^2 + |\xi'|^2 + k^2\right)^{\alpha+i\beta} &= \left(\sqrt{a^2+1}\,\xi_m + \sqrt{a^2\xi_m^2 - |\xi'|^2 - k^2}\right)^{\alpha+i\beta} \\ &\times \left(\sqrt{a^2+1}\,\xi_m - \sqrt{a^2\xi_m^2 - |\xi'|^2 - k^2}\right)^{\alpha+i\beta}. \end{aligned}$$

Аналитичность множителей в $T(\overset{*}{C}{}^a_+)$, $T(\overset{*}{C}{}^a_-)$ следует из того факта, что функция $\sqrt{a^2+1} + W(z)$ не имеет нулей в $T(\overset{*}{C}{}^a_+)$. поскольку для $z \in T(\overset{*}{C}{}^a_+)$ справедливо $\operatorname{Im} z_m > 0$, $\operatorname{Im} W(z) > 0$, и образ функции $W(z)$ – односвязное множество. Такие же аргументы применимы к функции $\sqrt{a^2+1} + \overline{W(z)}$ в области $T(\overset{*}{C}{}^a_-)$.

2.2.3. *Достаточные условия факторизуемости.* В этом разделе будут приведены достаточные условия факторизуемости для специального класса символов, порожденных многомерными сингулярными интегральными операторами [9, 12]. Символы этих операторов удовлетворяют условию $(*)$ с $\alpha = 0$ и относятся к классу эллиптических символов.

Предложение 1. *Пусть $m \geq 3$ и символ $A(\xi)$ непрерывен на единичной сфере S^{m-1} в $\mathbb{R}^m$. Если supp $F^{-1}(\ln A) \subset C^a_+ \cup C^a_-$, то эллиптический символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию с нулевым индексом.*

Доказательство. Если прологарифмировать гипотетическое равенство

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi)A_{=}(\xi),$$

мы формально получим

$$\ln A(\xi) = \ln A_{\neq}(\xi) + \ln A_{=}(\xi),$$

или, другими словами, задачу скачка для пары аналитических в трубчатых областях $T(\overset{*}{C}{}^a_\pm)$ функций. Отметим, что комплексная функция $\ln A(\xi)$ однозначна, поскольку определена на единичной сфере, которая односвязна в случае $m \geq 3$. Если *supp* $F^{-1}(\ln A) \subset C^a_+ \cup C^a_-$, такая задача легко решается. Действительно, обозначив $F^{-1}(\ln A) \equiv B$ и записывая

$$B(x) = \chi_+(x)B(x) + \chi_-(x)B(x),$$

$\chi_\pm(x)$ – характеристическая функция конуса $C^a_\pm$, переходом к образам Фурье и потенцируя, получаем требуемую факторизацию. □

На основании предложения 1 и п. 2.2.2 легко сконструировать символы, допускающие волновую факторизацию с заданным индексом æ (см. также [15]).

Всюду ниже предполагается, что нужная волновая факторизация для символа $A(\xi)$ существует.

3. Исследование псевдодифференциального уравнения

Здесь мы рассмотрим уравнение (2) только для случая $æ - s = n + \delta, n \in \mathbf{N}, |\delta| < 1/2$. Общее решение псевдодифференциального уравнения можно сконструировать по следующей схеме. Продолжим f на все пространство $\mathbb{R}^m$ и обозначим это продолжение lf. Положим

$$u_-(x) = (Au_+)(x) - lf(x),$$

и перепишем уравнение в виде

$$(Au_+)(x) + u_-(x) = lf(x).$$

Теперь, применяя преобразование Фурье и волновую факторизацию, мы запишем исходное уравнение следующим образом:

$$A_{\neq}(\xi)\tilde{u}_+(\xi) + A_{=}^{-1}(\xi)\tilde{u}_-(\xi) = A_{=}^{-1}(\xi)\tilde{lf}(\xi). \quad (4)$$

Следует заметить, что $A_{=}^{-1}(\xi)\tilde{lf}(\xi)$ принадлежит пространству $\tilde{H}^{s-æ}(\mathbb{R}^m)$, и, если выбрать полином $Q(\xi)$, удовлетворяющий условию

$$|Q(\xi)| \sim (1+|\xi|)^n,$$

то функция $Q^{-1}(\xi)A_{=}^{-1}(\xi)\tilde{lf}(\xi)$ будет принадлежать пространству $\tilde{H}^{-\delta}(\mathbb{R}^m)$.

Далее, согласно теории многомерной задачи Римана [11], можно представить последнюю функцию в виде двух слагаемых (это так называемая задача скачка, которая решается с помощью оператора G_m):

$$Q^{-1}A_{=}^{-1}\tilde{lf} = f_+ + f_-,$$

где $f_+ \in \tilde{H}^{-\delta}(C_+^a), f_- \in \tilde{H}^{-\delta}(\mathbb{R}^m \setminus C_+^a)$,

$$f_+ = G_m(A_{=}^{-1}\widetilde{lf}), \quad f_- = (I - G_m)(A_{=}^{-1}\widetilde{lf}).$$

3.1. **Задача скачка.** Мы приведем здесь формулировку и решение задачи скачка [9], чтобы у читателя не осталось сомнений в возможности последнего представления.

Изначально упомянутая задача скачка была сформулирована для пространств $L_2(\mathbb{R}^m)$ в следующей постановке. Обозначим $A(\mathbb{R}^m)$ подпространство в $L_2(\mathbb{R}^m)$, состоящее из граничных значений функций, аналитических в $T(\overset{*}{C_+^a})$ и удовлетворяющих условию

$$\sup_{y \in \overset{*}{C_+^a}} \int\limits_{\mathbb{R}^m} |f(x+iy)|^2 dx < +\infty,$$

$B(\mathbb{R}^m)$ – его ортогональное дополнение в $L_2(\mathbb{R}^m)$, так то

$$A(\mathbb{R}^m) \oplus B(\mathbb{R}^m) = L_2(\mathbb{R}^m).$$

Задача заключалась в обоснования единственности разложения произвольной функции $u \in L_2(\mathbb{R}^m)$ на сумму (или разность) двух слагаемых

$$u = u_+ + u_-,$$

где $u_+ \in A(\mathbb{R}^m), u_- \in B(\mathbb{R}^m)$. Решение выписывалось сразу в виде

$$u_+ = G_m u,$$

поскольку спектральная функция функции $G_m u$ принадлежит классу $L_2(C_+^a)$. Грубо говоря, оператор G_m представляет собой свертку образов Фурье характеристической функции $\chi_{C_+^a}$ конуса C_+^a и прообраза функции u. Оставшаяся часть u_- легко выписывается

$$u_- = u - G_m u,$$

а единственность представления – это вариант многомерной теоремы Лиувилля [27, 29].

Если вместо пространства $L_2(\mathbb{R}^m)$ рассматривается пространство $\tilde{H}^s(\mathbb{R}^m)$ с малыми $s, |s| < 1/2$, аналогичные рассуждения применимы в силу вышеописанных свойств спектральных функций.

3.2. **Продолжение исследования.** Умножая равенство (4) на $Q^{-1}(\xi)$, перепишем его в виде

$$Q^{-1}A_{\neq}\tilde{u}_+ + Q^{-1}A_{=}^{-1}\tilde{u}_- = f_+ + f_-,$$

или

$$Q^{-1}A_{\neq}\tilde{u}_+ - f_+ = f_- - Q^{-1}A_{=}^{-1}\tilde{u}_-$$

Другими словами,

$$A_{\neq}\tilde{u}_+ - Qf_+ = Qf_- - A_{=}^{-1}\tilde{u}_-. \tag{5}$$

Для дальнейших рассуждений нам понадобится следующая [11, 12]

Лемма 2. *Если* $\tilde{u}_- \in \widetilde{H}^s(\mathbb{R}^m \setminus C_+^a), A_=^{-1}$ *– элемент волновой факторизации, то* $A_=^{-1}\tilde{u}_- \in \widetilde{H}^{s-\alpha+æ}(\mathbb{R}^m \setminus C_+^a)$.

Доказательство. Тот факт, что $A_=^{-1}\tilde{u}_- \in \widetilde{H}^{s-\alpha+æ}(\mathbb{R}^m)$, сразу следует из определения пространства H^s. Остается убедиться в том, что $supp\ F^{-1}(A_=^{-1}\tilde{u}_-) \subseteq \mathbb{R}^m \setminus C_+^a$.

Если обозначить $F^{-1}(A_=^{-1}) \equiv a_=$, то, очевидно, $supp\ a_= \subseteq C_-^a$. Перейдем к интегральному представлению

$$F^{-1}(A_=^{-1}\tilde{u}_-)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} a_=(x-y)u_-(y)dy = \int\limits_{C_-^a} a_=(y)u_-(x-y)dy.$$

Остается проверить, что $F^{-1}(A_=^{-1}\tilde{u}_-)(x) = 0, \forall x \in C_+^a$. Действительно, если $y \in C_-^a, x \in C_+^a$, то $x - y \in C_+^a$, и тогда $u_-(x-y) = 0$, поскольку $supp\ u_- \in \mathbb{R}^m \setminus C_+^a$. □

Вернемся к равенству (5). Левая часть равенства принадлежит пространству $\tilde{H}^{-n-\delta}(C_+^a)$, а правая часть равенства – пространству $\tilde{H}^{-n-\delta}(\mathbb{R}^m \setminus C_+^a)$, следовательно,

$$F^{-1}(A_{\neq}\tilde{u}_+ - Qf_+) = F^{-1}(Qf_- - A_=^{-1}\tilde{u}_-),$$

где левая часть равенства принадлежит пространству $H^{-n-\delta}(C_+^a)$, а правая часть равенства – пространству $H^{-n-\delta}(\mathbf{R}^m \setminus C_+^a)$, откуда немедленно вытекает, что это будет обобщенная функция, сосредоточенная на ∂C_+^a.

Остается выяснить вид такой обобщенной функции.

3.2.1. *Замена переменных в обобщенных функциях.* Обозначим T_a биекцию $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, которая переводит ∂C_+^a в гиперплоскость $x_m = 0$, и выглядит следующим образом

$$\begin{cases} t_1 = x_1, \\ \dots\dots\dots\dots \\ t_{m-1} = x_{m-1}, \\ t_m = x_m - a|x'|. \end{cases}$$

Очевидно, это гладкое преобразование, за исключением начала координат. Определим замену переменных для следующего класса обобщенный функций. В качестве основных функций мы выберем пространство $\Phi(\mathbb{R}^m)$ Лизоркина [32], которое является подпространством пространства Шварца $S(\mathbb{R}^m)$ бесконечно дифференцируемых быстро убывающих на бесконечности функций, и обращающихся в нуль в начале координат вместе со всеми своими производными. Если обозначить $\Phi'(\mathbb{R}^m), S'(\mathbb{R}^m)$ соответствующие пространства обобщенных функций, то, очевидно, $\Phi'(\mathbb{R}^m) \supset S'(\mathbb{R}^m)$, и все операции над распределениями из $\Phi'(\mathbb{R}^m)$ будут законны для распределений из $S'(\mathbb{R}^m)$.

Пусть f – локально интегрируемая функция, которая порождает обобщенную функцию, определяемую формулой

$$(f, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)\varphi(x)dx.$$

Функционал $T_a f$ определим формулой

$$(T_a f, \varphi) = (f, T_a^{-1}\varphi),$$

поскольку

$$(T_a f, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} (T_a f)(x)\varphi(x)dx \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(T_a x)\varphi(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(x)\varphi(T_a^{-1}x)dx = (f, T_a^{-1}\varphi).$$

Из этого определения вытекает следующий факт: *если обобщенная функция изначально порождена функцией из класса $H^s(\mathbb{R}^m)$, то преобразование T_a меняет лишь принцип действия этого функционала.*

3.2.2. *Другие операции над обобщенными функциями.* Преобразование Фурье для обобщенных функций определено как

$$(Ff, \varphi) = (f, F\varphi),$$

и, следовательно,

$$(FT_a f, \varphi) = (f, T_a^{-1}F\varphi).$$

Из этих свойств следует, что для установления связей между преобразованиями T_a и Фурье достаточно ограничиться основными функциями.

Обозначим $(m-1)$-мерное преобразование Фурье ($y' \to \xi'$ в смысле распределений) функции $e^{ia|y'|\xi_m}$ символом $E_a(\xi', \xi_m)$ и определим оператор V_a формулой

$$(V_a \tilde{u})(\xi) = (E_a \star \tilde{u})(\xi),$$

где знак $\star$ обозначает свертку по первым $m-1$ переменным и оператор умножения по последней переменной ξ_m. Таким образом, V_a – это комбинация свертки и мультипликатора с ядром $E_a(\xi', \xi_m)$.

Лемма 3. [18] *Оператор T_a унитарно эквивалентен оператору V_a,*

$$FT_aF^{-1} = V_a,$$

где

$$V_a : \tilde{u}(\xi) \longmapsto \int\limits_{\mathbb{R}^{m-1}} E_a(\xi' - \eta', \xi_m)\tilde{u}(\eta', \xi_m)d\eta'.$$

Доказательство. Установим связь между преобразованием Фурье и оператором T_a:

$$(FT_a u)(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{ix\cdot\xi} u(x_1, ..., x_{m-1}, x_m - a|x'|)dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{iy'\xi'} e^{i(y_m + a|y'|)\xi_m} u(y_1, ..., y_{m-1}, y_m)dy$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{m-1}} e^{ia|y'|\xi_m} e^{iy'\xi'} \hat{u}(y_1, ..., y_{m-1}, \xi_m)dy',$$

где $\hat{u}$ обозначает преобразование Фурье по последней переменной, а якобиан преобразования – это определитель вида

$$\frac{D(x_1, x_2, ..., x_m)}{D(y_1, y_2, ..., y_m)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots 1 & 0 \\ & \dots\dots\dots\dots\dots & & \\ \frac{ay_1}{|y'|} & \frac{ay_2}{|y'|} & \dots\frac{ay_{m-1}}{|y'|} & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Таким образом, мы получили

$$(FT_a u)(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^{m-1}} e^{ia|y'|\xi_m} e^{iy'\xi'} \hat{u}(y_1, ..., y_{m-1}, \xi_m) dy,$$

откуда следует утверждение леммы 3. □

Тогда функция

$$T_a F^{-1}(A_{\neq}\tilde{u}_+ - Qf_+)$$

будет сосредоточена на гиперплоскости $t_m = 0$ и содержаться в пространстве $H^{-n-\delta}(\mathbb{R}^m)$. Такая обобщенная функция – линейная комбинация дельта-функции Дирака и ее производных [19] и в данной ситуации выглядит так:

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k(t')\delta^{(k)}(t_m).$$

Следует отметить, что обобщенные функции, сосредоточенные на поверхности конуса, и их преобразования Фурье были подробно изучены в [19], но автору не удалось найти многомерного (конического) аналога теоремы о распределении, сосредоточенном в точке, ни в одном выпуске этой серии.

Возвращаясь к нашим рассуждениям и равенству (5), получаем

$$T_a F^{-1}(A_{\neq}\tilde{u}_+ - Qf_+) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(t')\delta^{(k)}(t_m).$$

Дальше следуют простые операции:

$$FT_a F^{-1}(A_{\neq}\tilde{u}_+ - Qf_+) = F\left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k(t')\delta^{(k)}(t_m)\right),$$

и по лемме 3

$$V_a(A_{\neq}\tilde{u}_+ - Qf_+) = F\left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k(t')\delta^{(k)}(t_m)\right),$$

следовательно,

$$A_{\neq}\tilde{u}_+ - Qf_+ = V_{-a}F\left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k(t')\delta^{(k)}(t_m)\right),$$

Замечание 1. *Может возникнуть вопрос, нельзя ли использовать такое преобразование в самом начале до применения волновой факторизации, чтобы свести коническую ситуацию (2) к гиперплоскости и затем применить результаты* [8]. *К сожалению, это невозможно, поскольку преобразование* T_a *негладкое, и следует помнить, что даже для гладкого преобразования в локальной ситуации получится тот же самый оператор* A *с обязательной* *«компактной» добавкой. Получение условий обратимости такого оператора – очень трудная задача.*

Чтобы пояснить смысл замечания 1, мы приведем пример, показывающий, почему нельзя использовать преобразование T_a для сведения искомой задачи к задаче в полупространстве (см. также [30, 31]). Мы разберем локальные ситуации в случае гладкой и негладкой границы.

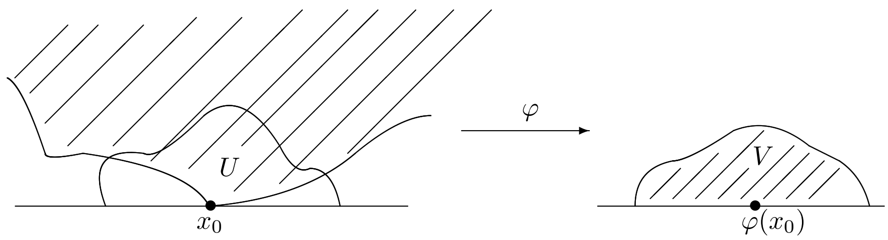

Рис. 1. "Выпрямление" границы

Пример 1. *Рассмотрим многомерный сингулярный интегральный оператор K с ядром Кальдерона–Зигмунда* [31]

$$(Ku)(x) \equiv \ v.\,p. \int\limits_{\mathbb{R}^m} K(x-y)u(y)dy \equiv \ v.\,p. \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{f(\theta)}{|x-y|^m} u(y)dy.$$

Если ядро $K(x)$ дифференцируемо на $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, то этот оператор ограничен в шкале пространств $H^s(\mathbb{R}^m)$ и имеет порядок 0. Добавим, что операторы Кальдерона–Зигмунда – это далекие «предки» современных псевдодифференциальных операторов и ограничимся здесь случаем $s = 0$ и пространством L_2. При исследовании фредгольмовости уравнения (1) *с оператором K пользуются локальным принципом* [30]*. В граничной окрестности (локально) интеграл имеет вид*

$$v.\,p. \int\limits_U K(x-y)u(y)dy, \quad x \in U.$$

Пусть φ — диффеоморфизм, переводящий окрестность U в V так, что часть гладкой границы ∂D в U переходит в часть гиперплоскости $x_m = 0$ (рис. 1). Обозначим $\varphi(x) = \widetilde{x}$, $\varphi(y) = \widetilde{y}$. Интеграл примет вид

$$v.\,p. \int\limits_V K\big(\varphi^{-1}(\widetilde{x}) - \varphi^{-1}(\widetilde{y})\big)|(\varphi^{-1})'(\widetilde{y})|\, u\big(\varphi^{-1}(\widetilde{y})\big)d\widetilde{y}, \quad \widetilde{x} \in V, \tag{6}$$

где $|(\varphi^{-1})'(\widetilde{y})|$ – якобиан преобразования φ^{-1} в точке $\widetilde{y}$. Поскольку точка x_0 остается на месте, матрица Якоби $(\varphi^{-1})'(x_0)$ будет единичной. Методами преобразования Фурье работать с интегралом (оператором) (6) *невозможно, — это не свертка, поэтому выделяется главная часть применением формулы*

Тейлора сначала к преобразованию φ^{-1}, *затем — к ядру* K *вне окрестности* $\widetilde{x}=\widetilde{y}$. *С учетом дифференцируемости ядра* K *вне* 0 *и дифференцируемости (!) преобразования* φ *интеграл* (6) *можно записать в виде*

$$v.\,p.\int\limits_{V} K\big(\varphi^{-1}(\widetilde{x})-\varphi^{-1}(\widetilde{y})\big)|(\varphi^{-1})'(\widetilde{y})|\,u\big(\varphi^{-1}(\widetilde{y})\big)d\widetilde{y}=$$

$$=v.\,p.\int\limits_{V} K\left(\left(\varphi^{-1}\right)'(\widetilde{x})(\widetilde{x}-\widetilde{y})\right)|(\varphi^{-1})'(\widetilde{y})|u\big(\varphi^{-1}(\widetilde{y})\big)d\widetilde{y}+\int\limits_{V} R(\widetilde{x},\widetilde{y})u\big(\varphi^{-1}(\widetilde{y})\big)d\widetilde{y},$$

где оператор $R(\widetilde{x},\widetilde{y})$ *является оператором со слабой особенностью. Давно известно, что такие операторы вполне непрерывны в пространствах* L_p [31].

Таким образом, отбросив «компактную» часть, можно утверждать, что локальным представителем оператора K *в точке* x_0 *будет оператор* **с тем же ядром** *(* $(\varphi^{-1})'(x_0)$ *— единичная матица), но уже в области с прямолинейной границей* $\mathbb{R}^m_+\cap V$.

Если так, для исследования обратимости таких операторов работает преобразование Фурье, теория парных интегральных уравнений типа свертки и классическая краевая одномерная задача Римана. Таким образом, для операторов в области с гладкой границей одной из моделей является уравнение в полупространстве [8, 30, 31].

Такие же соображения применимы для следующей ситуации.

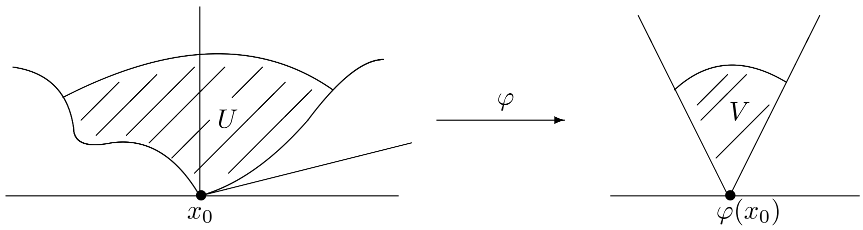

Рис. 2. Коническое "выпрямление" границы

На рис. 2 слева показана часть негладкой области в конической точке и две касательные в точке x_0 *к границе,* φ *— это диффеоморфизм (!) уже негладких областей. Рассуждая как выше, получим, что модельная ситуация для области рис. 2 — это уравнение в конусе. Для исследования последнего применяется концепция волновой факторизации и подходящий многомерный аналог краевой задачи Римана* [9, 14].

4. Общее решение

Имеет место следующий результат (по сути это доказано в предыдущем разделе).

Теорема 1. *Общее решение уравнения* (2) *в образах Фурье дается формулой*

$$\tilde{u}_+(\xi) = A_{\neq}^{-1}(\xi)Q(\xi)G_m Q^{-1}(\xi)A_{=}^{-1}(\xi)\widetilde{lf}(\xi)+$$
$$+A_{\neq}^{-1}(\xi)V_{-a}F\left(\sum_{k=1}^{n} c_k(x')\delta^{(k-1)}(x_m)\right),$$

где $c_k(x') \in H^{s_k}(\mathbb{R}^{m-1})$ *– произвольные функции,* $s_k = s - æ + k - 1/2,\ k = 1, 2, ..., n,\ lf$ *– произвольное продолжение* f *на* $H^{s-\alpha}(\mathbb{R}^m)$.

Примечание. Нетрудно убедиться, что результат не зависит от выбора продолжения lf [8, 11].

Исходя из этого представления, можно предлагать различные постановки краевых задач для уравнения (2).

Замечание 2. *В этой работе рассматривается случай* $m \geq 3$. *Стоит отметить, что в двумерном случае можно обойтись без использования преобразования* T_a [11, 14].

5. Граничное условие Дирихле

Рассмотрим простейший случай, когда $f \equiv 0,\ a = 1,\ n = 1$. Теорема дает следующее представление решения

$$\tilde{u}_+(\xi) = A_{\neq}^{-1}(\xi)V_{-1}\tilde{c}_0(\xi').$$

Применяя обратное преобразование Фурье, можно записать

$$u_+(x) = F^{-1}\{A_{\neq}^{-1}(\xi)V_{-1}\tilde{c}_0(\xi')\}.$$

Если выбрать граничное условие Дирихле на ∂C_+^1 для однозначной идентификации произвольной функции c_0, т. е.

$$(Pu)(y) = g(y),$$

где g – заданная функция на∂C_+^1, P – оператор сужения на поверхность конуса, то нам известны значения решения на границе ∂C_+^1.

Таким образом,

$$T_1 u(x) = T_1 F^{-1}\{A_{\neq}^{-1}(\xi)V_{-1}\tilde{c}_0(\xi')\},$$

так что мы имеем

$$FT_1 u(x) = FT_1 F^{-1}\{A_{\neq}^{-1}(\xi)V_{-1}\tilde{c}_0(\xi')\} = V_1\{A_{\neq}^{-1}(\xi)V_{-1}\tilde{c}_0(\xi')\}, \tag{7}$$

и нам известны значения $(P'T_1 u)(x') \equiv v(x')$, где P' – оператор сужения на гиперплоскость $x_m = 0$.

Связь между операторами P' и F очень простая [8]:

$$(FP'u)(\xi') = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(\xi', \xi_m)d\xi_m.$$

Возвращаясь к формуле (7), получаем следующее соотношение

$$\tilde{v}(\xi') = \int_{-\infty}^{+\infty} \{V_1\{A_{\neq}^{-1}(\xi)V_{-1}\tilde{c}_0(\xi')\}\}(\xi', \xi_m)d\xi_m, \tag{8}$$

где $\tilde{v}(\xi')$ – заданная функция. Следовательно, уравнение (8) – это интегральное уравнение относительно неизвестной функции $c_0(x')$.

Граничное условие Неймана приведет к аналогичному интегральному уравнению (см. ниже).

6. Интегральное уравнение

Рассматривается частный случай $f \equiv 0, n = 1$. Формула для общего решения уравнения (2) принимает вид

$$\tilde{u}_+(\xi)) = A_{\neq}^{-1}(\xi)V_{-a}F\{c_0(x')\delta^{(0)}(x_m)\},$$

и, далее, после применения преобразования Фурье (для простоты мы пишем $\tilde{c}$ вместо $V_{-1}\tilde{c}_0$)

$$\tilde{u}_+(\xi) = A_{\neq}^{-1}(\xi)\tilde{c}(\xi'), \tag{9}$$

или, эквивалентно, решение представляется следующим образом:

$$u_+(x) = F^{-1}\{A_{\neq}^{-1}(\xi)\tilde{c}(\xi')\}.$$

Теперь мы действуем оператором T_a на обе части равенства (9)

$$(T_a u_+)(t) = T_a F^{-1}\{A_{\neq}^{-1}(\xi)\tilde{c}(\xi')\}$$

и применяем преобразование Фурье $(FT_a u_+)(\xi) = FT_a F^{-1}\{A_{\neq}^{-1}(\xi)\tilde{c}(\xi')\}$.

Если известны граничные значения решения u_+ на ∂C_+^a, это означает, что заданы значения следующей функции

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (FT_a u_+)(\xi', \xi_m)d\xi_m.$$

Следовательно, если обозначить

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (FT_a u_+)(\xi)d\xi_m \equiv \tilde{g}(\xi'),$$

то для определения $\tilde{c}(\xi')$ мы имеем следующее уравнение

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (FT_a F^{-1})\{A_{\neq}^{-1}(\xi)\tilde{c}(\xi')\}d\xi_m = \tilde{g}(\xi'), \tag{10}$$

Это по сути уравнение в свертках, и, если вычислить обратное преобразование Фурье $\xi' \to x'$, получится некий конический аналог поверхностного потенциала.

6.1. **Исследование уравнения.** Здесь мы постараемся уточнить вид оператора FT_aF^{-1} (см. выше). В развернутой форме записываем

$$(FT_aF^{-1}\tilde{u})(\xi) = (FT_a u)(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^{m-1}} e^{ia|y'|\xi_m} e^{iy'\cdot\xi'}\hat{u}(y', \xi_m)dy', \tag{11}$$

где $y' = (y_1, ...y_{m-1}), \hat{u}$ – преобразование Фурье функции u по последней переменной y_m.

Обозначим $a(x)$ ядро оператора свертки с символом $A_{\neq}^{-1}(\xi)$, так что по определению

$$(a * u)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} a(x-y)u(y)dy,$$

или, в образах Фурье

$$F(a * u)(\xi) = A_{\neq}^{-1}(\xi)\tilde{u}(\xi).$$

Как и выше, обозначаем $\hat{a}(x', \xi_m)$ преобразование Фурье ядра $a(x)$ оператора свертки по последней переменной x_m. Интеграл в (10) примет вид (в соответствии с (11))

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{m-1}} e^{ia|y'|\xi_m} e^{iy'\cdot\xi'} (\hat{a} * c)(y', \xi_m)dy',$$

С учетом свойств свертки и преобразования Фурье получается следующее представление (см. раздел 3)

$$E_a \star (A_{\neq}^{-1}(\xi)\tilde{c}(\xi')),$$

или, в развернутом виде,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{m-1}} E_a(\xi' - \eta', \xi_m) A_{\neq}^{-1}(\eta', \xi_m)\tilde{c}(\eta')d\eta'.$$

Таким образом, уравнение (10) примет следующий вид

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{m-1}} K_a(\eta', \xi' - \eta')\tilde{c}(\eta')d\eta' = \tilde{g}(\xi'), \tag{12}$$

где

$$K_a(\eta', \xi') = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{E_a(\xi', \xi_m)}{A_{\neq}(\eta', \xi_m)} d\xi_m.$$

Итак, интегральное уравнение (12) – это уравнение для определения функции $\tilde{c}(\xi')$. По всей видимости, это и есть конический аналог потенциала двойного слоя.

Предположим, мы ухитрились решить это уравнение и сконструировали обратный оператор L_a, так что $L_a\tilde{g} = \tilde{c}$. Кстати, условие однозначной разрешимости уравнения (12) (т. е. ограниченного оператора L_a) – это необходимое и достаточное условие для однозначной разрешимости поставленной задачи Дирихле. Используя формулу (9), мы получаем

$$\tilde{u}_+(\xi) = A_{\neq}^{-1}(\xi)(L_a\tilde{g})(\xi'),$$

или, переобозначив,

$$\tilde{u}_+(\xi) = A_{\neq}^{-1}(\xi)\tilde{d}_a(\xi').$$

Тогда

$$u_+(x', x_m) = \int\limits_{\mathbb{R}^{m-1}} W(x' - y', x_m)d_a(y')dy', \tag{13}$$

where $W(x', x_m) = F_{\xi\to x}^{-1}(A_{\neq}^{-1}(\xi))$.

Формула (13) – это аналог интеграла Пуассона для полупространства.

7. Задача с косой производной

Вернемся к формуле (9). Можно записать

$$\xi_k \tilde{u}_+(\xi) = \xi_k A_{\neq}^{-1}(\xi)\tilde{c}(\xi),$$

или. эквивалентно, используя свойства преобразования Фурье,

$$\frac{\partial u_+}{\partial x_m} = F^{-1}\{\xi_k A_{\neq}^{-1}(\xi)\tilde{c}(\xi)\},$$

для произвольного фиксированного $k = 1, 2, ..., m$.

Далее, к обеим частям последнего равенства применяется оператор T_a и выполняются все описанные в п.6 действия. Все выкладки будут аналогичными, и во всех соответствующих местах следует заменить $A_{\neq}^{-1}(\xi)$ на $\xi_k A_{\neq}^{-1}(\xi)$.

Наверное, логично назвать эту ситуацию задачей с косой производной, поскольку $\frac{\partial}{\partial x_k}$, отнесенное к конической поверхности, явно не производная по нормали.

Замечание 3. *Несколько слов о задаче Неймана. Если попробовать задать значение нормальной производной в точках конической поверхности отличных от начала координат, получится краевая задача с «переменными» коэффициентами, поскольку коэффициент в граничном условии меняется от одной точки к другой на конической поверхности. Потребуется дополнительная «локализация» с целью сведе́ния к случаю постоянных коэффициентов и исследования соответствующей модельной задачи в $\mathbb{R}_+^m$. Грубо говоря, локально решение выглядит по-разному в зависимости от типа граничной точки. Другими словами, локальный принцип позволяет работать только с символами (внутренними и граничными), не зависящими от пространственной переменной.*

8. Заключение

Похоже, что для точного аналитического решения простейшей краевой задачи в областях с конической точкой понадобятся другие потенциалы, отличные от классических потенциалов простого и двойного слоя. Я постараюсь подтвердить последний тезис прямыми вычислениями для лапласиана с граничным условием Дирихле в моих последующих работах в этом направлении .

Естественно, возникает вопрос вопрос о сравнении моих выводов с выводами других авторов (см. например, [21, 22, 23, 24, 25, 26]). Это – два разных взгляда на одну и ту же, по сути, проблему, я уже многократно писал об этом [14, 15], принципиальная разница этих подходов заключается в том, как трактовать конус, как прямое произведение «базы» на полупрямую, как во всех вышеупомянутых работах, или как единое целое. У других авторов в дополнение к эллиптичности появляется условие обратимости некоего операторного пучка (так называемого конормального символа), здесь же при наличии волновой факторизации – однозначная разрешимость дополнительной системы линейных интегральных уравнений (которую иногда удается свести к системе линейных алгебраических уравнений [14] или линейных разностных [17]). Помимо этого, следует иметь в виду, что многообразие без края с особыми точками – это совсем другой объект, отличный от многообразия с краем с особыми точками на границе. Что лучше и удобнее, решать читателю и пользователю таких теорий. Кстати, предложенная автором теория объясняет, почему нужны граничные условия и сколько именно их нужно для однозначной разрешимости краевой задачи, более того, оставляет простор для выбора этих дополнительных условий. Похоже, в других теориях этого нет.

Что касается сведéния *уже поставленных* краевых задач к интегральным уравнениям, их действительно даже в случаях с *липшицевой* [1, 2, 3, 4, 5] границей сводят к эквивалентным интегральным уравнениям (и даже не сингулярным, а фредгольмовским). Проблема в том, что теория Фредгольма не дает рецепта решения таких уравнений, здесь же для частных конкретных случаев возможно получить интегральное представление для решения краевой задачи.

Еще несколько слов о компактных многообразиях с коническими точками. В одной из ранних работ автора [20] предлагалось рассматривать развертку конуса с последующим привлечением концепции волновой факторизации. Это – вместо использования понятия конормального символа.

Замечание 4. *Похоже, приведенные здесь рассуждения исключают наличие решений, сосредоточенных в вершине конуса. Видимо, в связи с этим автору придется провести дополнительные исследования для выяснения ситуаций, когда решение (или правая часть уравнения) может иметь импульсный характер.*

Благодарности

Автор выражает признательность рецензенту за высказанные замечания и пожелания, которые были учтены в работе и побудили автора отнестись с бóльшим вниманием к возможному читателю.

References

[1] S. Agmon, *Multiple layer potentials and the Dirichlet problem for higher order elliptic equations in the plane*, Commun. Pure Appl. Math., **10** (1957), 179–239. Zbl 0081.09801

[2] E. Fabes, *Layer potential methods for boundary value problems on Lipschitz domains*, Lect. Notes Math., **1344** (1988), 55–80. Zbl 0666.31007

[3] C. Kenig, *Harmonic analysis techniques for second order elliptic boundary value problems (CBMS Reg. Conf. Ser. Math.)*, AMS, Providence, 1994. Zbl 0812.35001

[4] D. Mitrea, M. Mitrea, M. Taylor, *Layer potentials, the Hodge Laplacian and global boundary problems in nonsmooth Riemannian manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc. **713** (2001). Zbl 1003.35001

[5] G. Hsiao, W. Wendland, *Boundary integral equations*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2008. Zbl 1157.65066

[6] F.D. Gakhov, *Boundary Value Problems*, Dover Publications. New York, 1981.

[7] N.I. Muskhelishvili, *Singular Integral Equations*, North Holland. Amsterdam, 1976.

[8] G. I. Eskin, *Boundary value problems for elliptic pseudodifferential equations*, AMS, Providence, R.I., 1981. Zbl 0458.35002

[9] V.B. Vasil'ev, *Regularization of multidimensional singular integral equations in non-smooth domains*, Trans. Moscow Math. Soc., **59** (1998) 65–93. Zbl 0912.45005

[10] V. B. Vasilyev, *Some problems of pseudo differential operators theory*, Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc., **10** (2013), 219–226. Zbl 1289.35086

[11] V. B. Vasil'ev, *Wave factorization of elliptic symbols: theory and applications. Introduction to the theory of boundary value problems in non-smooth domains*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 2000. Zbl 0961.35193

[12] V. B. Vasil'ev, *Wave factorization of elliptic symbols*, Mathematical Notes, **68** (2000), 556–568. Zbl 0992.35127

[13] V. B. Vasilyev, *Elliptic equations and boundary value problems in non-smooth domains*, Pseudo Differential Operators: Analysis, Applications and Computations. Operator Theory: Advances and Applications, **213** (2011),105–121. Zbl 1247.35215

[14] V.B. Vasilyev, *Fourier multipliers, pseudodifferential equations, the wave factorization, boundary value problems*, Editorial URSS, 2nd edition, Moscow, 2010 (Russian).

[15] V. B. Vasilyev, *Pseudo differential equations on manifolds with non-smooth boundaries*, Differential and Difference Equations and Applications. Springer Proc. Math. & Stat., **47** (2013), 625–637. Zbl 1319.35320

[16] V.B. Vasilyev, *On solvability of convolution equations in multidimensional cones*, Matematicheskii Forum (Itogi nauku. Yug Rossii), **8** (2014), 87–92. (Russian)

[17] V.B. Vasilyev, *General boundary value problems for pseudo differential equations and related difference equations*, Adv. Difference Equ. **289** (2013), 1–7.

[18] V. B. Vasilyev, *On the Dirichlet and Neumann problems in multi-dimensional cone*, Mathematica Bohemica, **39** (2014), 333–340. Zbl 1340.35029

[19] I.M. Gel'fand, G.E. Shilov, *Generalized functions. Vol. I: Properties and operations*, Academic Press, New York and London, 1964. Zbl 0115.33101

[20] V.B. Vasil'ev, *Singular integrals on compact manifolds with singularities*, Differential Equations, **29** (1993), 1427–1428. Zbl 0818.47051

[21] V. Kozlov, V. Maz'ya, J. Rossmann, *Spectral problems associated with corner singularities of solutions to elliptic equations*, AMS, Providence, 2001. Zbl 0965.35003

[22] S.A. Nazarov, B. A. Plamenevsky, *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries*, Walter de Gruyter, Berlin – New York, 1994. Zbl 0806.35001

[23] V. E. Nazaikinskii, A. Yu. Savin, B.-W. Schulze, B. Yu. Sternin, *Elliptic theory on singular manifolds*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2006.

[24] Ju.V. Egorov, B.-W. Schulze, *Pseudo-differential operators, singularities, applications*, Birkhäuser-Verlag, Basel, 1997. Zbl 0877.35141

[25] B.-W. Schulze, *Boundary value problems and singular pseudo-differential operators*, J. Wiley, Chichester, 1998. Zbl 0907.35146

[26] B.-W. Schulze, B. Sternin, V. Shatalov, *Differential equations on singular manifolds; semiclassical theory and operator algebras*, Wiley-VCH, Berlin, 1998. Zbl 0946.58021

[27] V.S. Vladimirov, *Methods of the Theory of Functions of Many Complex Variables*, Dover Publications, Mineola, NY, 2007.

[28] V.S. Vladimirov, *Generalized functions in mathematical physics*, Mir Publishers, Moscow, 1979. Zbl 0515.46034

[29] S. Bochner, W.T. Martin, *Several Complex Variables*, Princeton Univ. Press. Princeton, NY, 1948. Zbl 0041.05205

[30] I.B. Simonenko, *New general method for investigation of linear operator equations of singular integral equations type. I*, Izvestiya Acad. Sci. USSR, Ser. math. **29** (1965) 567 – 586; *II*, ibidem, 757 – 782 (Russian). Zbl 0146.13101

[31] S.G. Mikhlin, S. Prößdorf, *Singular integral operators*, Akademie-Verlag, Berlin, 1986. Zbl 0636.47039

[32] S. Samko, *Hypersingular integrals and their applications*, CRC Press, Boca Raton, 2002. Zbl 0998.42010

Vladimir B. Vasilyev
Lipetsk State Technical University,
Chair of Pure Mathematics,
Moskovskaya 30,
Lipetsk 398600, Russia

National Research Belgorod State University,
Chair of Differential Equations,
Studencheskaya 14/1,
Belgorod 308007, Russia
E-mail address: vbv57@inbox.ru