S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 1150–1158 (2016) УДК 514.132

DOI 10.17377/semi.2016.13.090 MSC 52B15, 51M20, 51M25, 51M10

ОБЪЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ГЕКСАЭДРА, ДОПУСКАЮЩЕГО $\overline{3}$-СИММЕТРИЮ

Н.В. АБРОСИМОВ, Е.С. КУДИНА, А.Д. МЕДНЫХ

Abstract. We consider hyperbolic hexahedra with $\overline{3}$-symmetry. For these hexahedra, we find existence conditions, establish relations between the edge lengths and dihedral angles, and obtain exact formulas for the volumes.

Keywords: hyperbolic hexahedron, $\overline{3}$-symmetry, hyperbolic volume.

1. Введение

Вычисление объема многогранника — это классическая задача, известная со времен Евклида и не потерявшая актуальность в наши дни. В основном это связано с тем, что объем фундаментального многогранника является важным геометрическим инвариантом трехмерного многообразия. В данной работе рассматриваются гексаэдры в гиперболическом пространстве. Гексаэдром называют любой многогранник, имеющий комбинаторный тип куба, то есть 8 трехвалентных вершин, 12 ребер и 6 четырехугольных граней. В частности, куб — это правильный гексаэдр. Гексаэдр является двойственным многогранником по отношению к октаэдру, поэтому типы симметрий у них совпадают.

Отдельные частные результаты по вычислению объемов неевклидовых многогранников известны еще со времен Н. И. Лобачевского, Я. Больяи и Л. Шлефли. Так, например, объем бипрямоугольного тетраэдра (ортосхемы) в гиперболическом пространстве был найден Н. И. Лобачевским [1] и Я. Больяи (см. [2] или [3]). В сферическом случае объем ортосхемы впервые получен Л. Шлефли [4].

Abrosimov, N.V., Kudina, E.S., Mednykh, A.D., Volumes of hyperbolic hexahedra with $\overline{3}$-symmetry.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №16-41-02006).

Поступила 4 декабря 2016 г., опубликована 8 декабря 2016 г.

В последние 30 лет данное направление получило широкое развитие. Объем куба Ламберта и некоторых других многогранников получены Рут Келлерхальц [5], Д. А. Деревниным и А. Д. Медных [6], А. Ю. Весниным, А. Д. Медных и Дж. Паркером [7] и другими. Объемы гиперболических пирамид, имеющих хотя бы одну вершину на бесконечности, найдены Э. Б. Винбергом [8], [9].

Проблема получения общей формулы для объема неевклидового многогранника заданного комбинаторного типа оказывается очень сложной. Она была решена лишь для неевклидовых тетраэдров: формула объема компактного гиперболического тетраэдра впервые была получена в работе Дж. Сфорца [10]. В недавней работе первого и третьего авторов [11] предложено простое доказательство формулы Сфорца и ее аналога в сферической геометрии. В работе [11] дан обзор современных результатов по вычислению объемов неевклидовых многогранников.

В случае, когда многогранник имеет нетривиальную симметрию, вычисление объема упрощается. Впервые это было показано Н. И. Лобачевским, который нашел объем идеального гиперболического тетраэдра. Двугранные углы при противоположных ребрах такого тетраэдра попарно равны. Объем компактного гиперболического тетраэдра с указанным свойством найден в [12].

Точные формулы объемов сферических октаэдров, обладающих симметриями вида mmm и $2|m$, были получены в работе [13]. Объемы гиперболических октаэдров с mmm-симметрией найдены в [14], с симметриями $2|m$ и $mm2$ — в работах [15] и [16], с симметрией $\overline{3}$ — в работе авторов [17]. Эти исследования были инициированы работой Р. В. Галиулина, С. Н. Михалева и И. Х. Сабитова [18], в которой найдены объемы евклидовых октаэдров с нетривиальными симметриями. В данной статье мы рассматриваем гиперболические гексаэдры, допускающие $\overline{3}$-симметрию.

2. Группа симметрий гексаэдра

Как упоминалось выше, гексаэдр является двойственным многогранником по отношению к октаэдру, поэтому типы симметрий у них совпадают. Произвольный гексаэдр обладает одним из 17 типов симметрий. Полная группа симметрий гексаэдра имеет 25 формальных подгрупп, включая тривиальную, но некоторые из них отвечают одним и тем же геометрическим реализациям (см. [18]).

Говорят, что гексаэдр имеет $\overline{3}$-*симметрию*, если он допускает центральную симметрию и поворот на угол $2\pi/3$ (см. рис. 1).

$\overline{3}$-симметрии гексаэдра соответствует группа S_6 по классификации Шёнфлиса, $[2^+, 6^+]$ по классификации Кокстера или $3\times$ по орбифолдной классификации (см., например, [19] и [20]).

Из определения следует, что ребра и двугранные углы $\overline{3}$-симметричного гексаэдра $\mathcal{H}$ разбиваются на две орбиты относительно действия группы его симметрий. Обозначим длины ребер в этих орбитах через a и c, а двугранные углы при этих ребрах через A и C соответственно (как показано на рис. 1).

3. Евклидов гексаэдр с $\overline{3}$-симметрией

Для построения евклидова гексаэдра $\mathcal{H}$, обладающего $\overline{3}$-симметрией, рассмотрим прямоугольную систему координат (O, x_1, x_2, x_3) с началом в точке

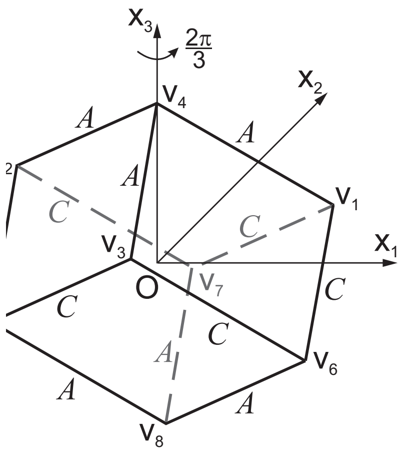

Рис. 1. Гексаэдр $\mathcal{H}$, допускающий $\overline{3}$-симметрию

O. Зададим поворот на угол $2\pi/3$ вокруг оси Ox_3 и отражение относительно начала координат следующими матрицами

$$R = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi}{3} & -\sin\dfrac{2\pi}{3} & 0 \\ \sin\dfrac{2\pi}{3} & \cos\dfrac{2\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Без ограничения общности можем считать, что вершина v_1 имеет координаты $(r, 0, h)$, где r, h — некоторые положительные числа. Таким образом, точка v_1 находится в общем положении, то есть не лежит ни на оси вращения Ox_3, ни на ортогональной к ней плоскости, проходящей через центр симметрии O. Орбита точки v_1 под действием R и S будет состоять из шести вершин гексаэдра $\mathcal{H}$: $v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, v_7$. Еще две вершины, v_4 и v_8, находим из условия, что они лежат на пересечении соответствующих плоских граней. Выпишем координаты всех вершин:

$$\begin{aligned} v_1 &= (r, 0, h), & v_5 &= (-r, 0, -h), \\ v_2 &= \left(-\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}\,r}{2}, h\right), & v_6 &= \left(\frac{r}{2}, -\frac{\sqrt{3}\,r}{2}, -h\right), \\ v_3 &= \left(-\frac{r}{2}, -\frac{\sqrt{3}\,r}{2}, h\right), & v_7 &= \left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}\,r}{2}, -h\right), \\ v_4 &= (0, 0, 3h), & v_8 &= (0, 0, -3h). \end{aligned} \tag{1}$$

Зная координаты вершин, вычислим квадраты длин ребер октаэдра. Далее, найдем косинусы его двугранных углов через скалярные произведения векторов внешних нормалей:

$$a^2 = c^2 = 4\,h^2 + r^2, \quad \cos A = -\cos C = \frac{8\,h^2 - r^2}{16\,h^2 + r^2}\,.$$

Как видно из полученных формул, евклидов гексаэдр с $\overline{3}$-симметрией не определяется только длиной ребра или только величинами двугранных углов.

Это объясняется тем, что все его грани — равные ромбы, а ромб является нежесткой фигурой. Зафиксировав длину ребра (все ребра имеют одинаковую длину), углы можно непрерывно варьировать. При этом многогранник сохраняет комбинаторный тип и симметрию. При $\cos A = -\cos C = -1$ он вырождается в плоский шестиугольник, а при $\cos A = -\cos C = 1/2$ — в отрезок прямой. В случае $\cos A = \cos C = 0$ получаем куб.

4. Проективная модель Кэли-Клейна

Рассмотрим пространство Минковского R_1^4 со скалярным произведением

$$\langle X, Y\rangle = -x_1\, y_1 - x_2\, y_2 - x_3\, y_3 + x_4\, y_4\,.$$

Моделью Кэли-Клейна называется множество векторов, образующих единичный шар

$$K = \{(x_1, x_2, x_3, 1)\ :\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}\,,$$

лежащий в гиперплоскости $x_4 = 1$. Прямыми и плоскостями в этой модели служат пересечения шара K с евклидовыми прямыми и плоскостями, лежащими в гиперплоскости $x_4 = 1$.

Пусть V, W — два вектора из K. Положим $V = (v, 1)$, $W = (w, 1)$, где $v, w \in R^3$. Тогда скалярное произведение указанных векторов в пространстве Минковского выражается через евклидово скалярное произведение по формуле

$$\langle V, W\rangle = 1 - \langle v, w\rangle_E\,.$$

Расстояние $\rho\,(V, W)$ между векторами V, W в модели Кэли-Клейна определяется равенством

$$\operatorname{ch}\rho\,(V, W) = \frac{\langle V, W\rangle}{\sqrt{\langle V, V\rangle\,\langle W, W\rangle}}\,. \tag{2}$$

Плоскость в модели K можно определить как геометрическое место точек $\mathcal{P} = \{V \in K\ :\ \langle V, N\rangle = 0\}$, где $N = (n, 1)$, $\langle n, n\rangle_E > 0$ — вектор нормали к плоскости $\mathcal{P}$. Точка $(n, 1)$ называется *полюсом* $\mathcal{P}$ и лежит вне K.

В модели Кэли-Клейна рассмотрим плоскости $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ с нормалями N, M соответственно. Двугранный угол между $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$, для которого нормали N, M являются внешними, определяется соотношением

$$\cos\,(\widehat{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}) = -\frac{\langle N, M\rangle}{\sqrt{\langle N, N\rangle\,\langle M, M\rangle}}\,. \tag{3}$$

Пусть $V_1 = (v_1, 1), V_2 = (v_2, 1), V_3 = (v_3, 1)$ — три некомпланарных вектора в K. Тогда через них проходит единственная плоскость $\mathcal{P} = \{V \in K : \langle V, N\rangle = 0\}$ с вектором нормали $N = (n, 1)$, где координаты вектора n однозначно определяются как решение системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} \langle v_1, n\rangle_E - 1 &= 0\,,\\ \langle v_2, n\rangle_E - 1 &= 0\,,\\ \langle v_3, n\rangle_E - 1 &= 0\,. \end{aligned} \tag{4}$$

5. Длины ребер гиперболического гексаэдра

В проективной модели Кэли-Клейна рассмотрим векторы $V_i = (v_i, 1)$, $i = 1, \dots, 8$, где векторы v_i отвечают вершинам евклидова гексаэдра с $\overline{3}$-симметрией и определяются по формулам (1).

Евклидовы изометрии R, S естественным образом продолжаются до изометрий $\overline{R} : (v, 1) \to (R\, v, 1)$ и $\overline{S} : (v, 1) \to (S\, v, 1)$ гиперболического пространства K. Как и в евклидовом случае, $\overline{R}$ — это поворот на угол $2\pi/3$ вокруг оси Ox_3, а $\overline{S}$ — отражение относительно точки $(O, 1)$, являющейся центром K.

В отличие от евклидова случая, в модели Кэли-Клейна должны быть выполнены дополнительные условия

$$r^2 + h^2 < 1\,, \quad r > 0\,, \quad 0 < 3h < 1\,, \tag{5}$$

эквивалентные тому, что вершины V_i, $i = 1, \dots, 8$, лежат в K. Тогда векторы $V_i = (v_i, 1)$, $i = 1, \dots, 8$, задают вершины гиперболического гексаэдра $\mathcal{H}$, допускающего $\overline{3}$-симметрию.

Зная координаты вершин, вычислим длины сторон $\mathcal{H}$ по формуле (2):

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} a &= \frac{1 - 3\,h^2}{\sqrt{(1 - r^2 - h^2)(1 - 9\,h^2)}}\,, \\ \operatorname{ch} c &= \frac{2 - r^2 + 2\,h^2}{2\,(1 - r^2 - h^2)}\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Условия (5) гарантируют выполнение неравенств $\operatorname{ch} a > 1$, $\operatorname{ch} c > 1$.

Случай правильного гексаэдра $a = c$ реализуется при $r^2 = 8\,h^2$. В этом случае

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} c = \frac{1 - 3\,h^2}{1 - 9\,h^2}, \quad 0 < h < \frac{1}{3}.$$

6. Двугранные углы гиперболического гексаэдра

Используя координаты вершин, найдем внешние нормали $N_{1436}, N_{1724}, N_{1687}$ к граням $\{V_1, V_4, V_3, V_6\}, \{V_1, V_7, V_2, V_4\}, \{V_1, V_6, V_8, V_7\}$. Как и раньше (см. п. 4), представим векторы нормалей в виде $N_{ijkl} = (n_{ijkl}, 1)$, где n_{ijkl} — подходящие трехмерные векторы, которые однозначно определяются из системы линейных уравнений (4). Получаем

$$\begin{aligned} N_{1436} &= \left(\frac{2}{3\,r}, -\frac{2}{\sqrt{3}\,r}, \frac{1}{3\,h}, 1 \right), \\ N_{1724} &= \left(\frac{2}{3\,r}, \frac{2}{\sqrt{3}\,r}, \frac{1}{3\,h}, 1 \right), \\ N_{1687} &= \left(\frac{4}{3\,r}, 0, -\frac{1}{3\,h}, 1 \right). \end{aligned}$$

По формуле (3) вычислим косинусы двугранных углов

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{8\,h^2 - r^2 + 9\,r^2\,h^2}{16\,h^2 + r^2 - 9\,r^2\,h^2}\,, \\ \cos C &= \frac{-8\,h^2 + r^2 + 9\,r^2\,h^2}{16\,h^2 + r^2 - 9\,r^2\,h^2}\,. \end{aligned}$$

Разрешая полученную систему уравнений относительно r^2 и h^2, имеем

$$r^2 = \frac{4\,(\cos A + \cos C)}{3\,(1+\cos A)}\,, \quad h^2 = \frac{\cos A + \cos C}{3\,(2-\cos A + 3\cos C)}\,. \tag{7}$$

Следовательно,

$$1 - 9\,h^2 = \frac{2\,(1-2\cos A)}{(2-\cos A+3\cos C)}\,,$$
$$1 - r^2 - h^2 = \frac{2\,(1-\cos A - 2\cos^2 C)}{(1+\cos A)(2-\cos A+3\cos C)}\,.$$

Согласно (5)-(6), необходимые и достаточные условия существования гиперболического гексаэдра $\mathcal{H}$ с $\overline{3}$-симметрией в модели Кели-Клейна, имеют вид

$$1-9\,h^2>0, \quad 1-r^2-h^2>0, \quad r^2>0, \quad h^2>0$$

или, эквивалентно,

$$\begin{aligned} 1-2\cos A > 0\,, &\quad 1-\cos A - 2\cos^2 C > 0\,, \\ \cos A + \cos C > 0\,, &\quad 2-\cos A + 3\cos C > 0\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Заметим, что

$$2-\cos A+3\cos C = 2\,(1-2\cos A) + 3\,(\cos A+\cos C)\,,$$

то есть четвертое неравенство в (8) следует из первых двух. Разрешая систему неравенств (8) относительно A и C, получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Компактный гиперболический гексаэдр $\mathcal{H}(A,C)$ с двугранными углами A,C, имеющий $\overline{3}$-симметрию существует, если, и только если, одновременно выполнены неравенства*

$$A > \frac{\pi}{3}\,, \quad A+C<\pi\,, \quad A+2\,C>\pi\,.$$

Обозначим область существования такого гексаэдра через

$$\Omega = \{(A,C)\in[0,\pi]\times[0,\pi]\ :\ A>\frac{\pi}{3}\,,\ A+C<\pi\,,\ A+2\,C>\pi\}.$$

7. Объем гиперболического гексаэдра

По формуле Шлефли (см., например, [9], с. 127) имеем

$$dV = -\sum_{\theta}\frac{\ell_\theta}{2}\,d\theta = -3\,a\,dA - 3\,c\,dC\,.$$

Пользуясь равенствами (6) и (7) перепишем дифференциальную форму объема в виде

$$dV = f(A,C)\,dA + g(A,C)\,dC\,,$$

где

$$\begin{aligned} f(A,C) &= -3\,\mathrm{arch}\sqrt{\frac{(1+\cos A)(1-\cos A+\cos C)^2}{(1-2\cos A)(1-\cos A-2\cos^2 C)}}\,, \\ g(A,C) &= -3\,\mathrm{arch}\,\frac{1+\cos C+\cos A\,\cos C-\cos^2 C}{1-\cos A-2\cos^2 C}\,. \end{aligned} \tag{9}$$

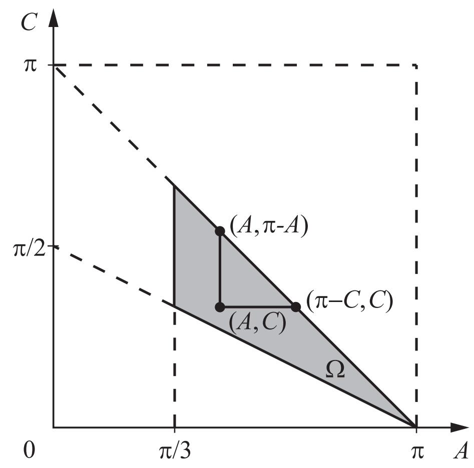

Рис. 2. Область существования гексаэдра $\mathcal{H}(A, C)$

Граница области Ω — это треугольник (см. рис. 2). Рассмотрим одну из сторон этого треугольника

$$\mathcal{L} = \left\{ A + C = \pi\,,\ \frac{\pi}{3} < A < \pi \right\}.$$

Согласно (7), если последовательность точек сходится к $\mathcal{L}$ изнутри области Ω, то величины r, h стремятся к нулю. При этом гексаэдр $\mathcal{H}$ колапсирует в точку и его объем $V \to 0$.

Интегрируя дифференциальную форму $dV = f(A, C)\, dA + g(A, C)\, dC$ по горизонтальному или вертикальному отрезку, соединяющему $\mathcal{L}$ с точкой $(A, C) \in \Omega$, получим следующее утверждение.

Теорема 2. *Объем гиперболического гексаэдра $\mathcal{H}(A, C)$ с двугранными углами A, C, допускающего $\overline{3}$-симметрию, выражается любой из следующих формул*

$$\text{(i)} \qquad V = \int_{\pi - A}^{C} f(A, t)\, dt\,,$$

$$\text{(ii)} \qquad V = \int_{\pi - C}^{A} g(t, C)\, dt\,,$$

где функции $f(A, C)$ и $g(A, C)$ определены равенствами (9).

Замечание 1. *В случае $A = C$ последняя теорема приводит к хорошо известной формуле для объема правильного гиперболического гексаэдра (см.* [21], *стр. 308)*

$$V = -6 \int_{\pi/2}^{C} \operatorname{arch} \frac{1}{1 - 2\cos t}\, dt$$

Доказательство. Действительно, из формулы (i) полная производная функции $V = V(C, C)$ по переменной C равна

$$(10) \quad \frac{dV}{dC} = f(C, C) - f(C, \pi - C) + \int_{\pi - A}^{C} \frac{\partial f(A, C)}{\partial A}\, dA \bigg|_{A = C} = -6 \operatorname{arch} \frac{1}{1 - 2\cos C}.$$

Заметим, что для правильного гексаэдра область существования представляет собой пересечение Ω и прямой $A = C$, то есть равна отрезку $C \in (\pi/3, \pi/2)$. Случай $C = \pi/3$ соответствует правильному идеальному гексаэдру, все вершины которого лежат на абсолюте. Чтобы получить объем, нужно проинтегрировать последнее выражение (10) от конца указанного отрезка $\pi/2$, где правильный гексаэдр колапсирует в точку, до точки C, соответствующей данному гексаэдру.

Аналогичные рассуждения можно провести, используя формулу (ii). $\square$

References

[1] N. I. Lobatschefskij, *Imaginäre Geometrie und ihre Anwendung auf einige Integrale*, Deutsche Übersetzung von H. Liebmann, Leipzig: Teubner, 1904.

[2] P. Stäckel, *Geometrische Untersuchungen von Wolfgang Bolyai und Johann Bolyai I – II*, Leipzig, 1913. JFM 44.0015.03

[3] T. Weszely, *Bolyai János matematikai munkássága (Mathematical works of János Bolyai)*, Bukarest: Kriterion Könyvkiado, 1981.

[4] L. Schläfli, *Theorie der vielfachen Kontinuität*, Gesammelte mathematishe Abhandlungen, Basel: Birkhäuser, 1950.

[5] R. Kellerhals, *On the volume of hyperbolic polyhedra*, Math. Ann., **285** (1989), 541–569. Zbl 0664.51012

[6] D. A. Derevnin, A. D. Mednykh, *The volume of the Lambert cube in spherical space*, Mathematical Notes, **86**:1 (2009), 176–186. Zbl 1187.52008

[7] A. D. Mednykh, J. Parker, A. Yu. Vesnin, *On hyperbolic polyhedra arising as convex cores of quasi-Fuchsian punctured torus groups*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3), **10** (2004), 357–381. Zbl 1094.30048

[8] E. B. Vinberg, *Volumes of non-Euclidean polyhedra*, Russian Mathematical Surveys, 48:2 (1993), 15–45. Zbl 0799.01019

[9] D. V. Alekseevskij, E. B. Vinberg, A. S. Solodovnikov, *Geometry: Volume 2. Spaces of Constant Curvature (Encyclopaedia of Mathematical Sciences)*, E. B. Vinberg (Ed.), Springer-Verlag, 1993. Zbl 0787.53001

[10] G. Sforza, *Ricerche di estensionimetria differenziale negli spazi metrico-projettivi*, Modena Mem. Acc., Ser. III, **VIII** (Appendice) (1906), 21–66.

[11] N. V. Abrosimov, A. D. Mednykh, *Volumes of polytopes in spaces of constant curvature*, Fields Inst. Commun., **70** (2014), 1–26. arXiv:1302.4919 [math.MG] Zbl 1320.52013

[12] D. A. Derevnin, A. D. Mednykh, M. G. Pashkevich, *On the volume of a symmetric tetrahedron in hyperbolic and spherical spaces*, Siberian Mathematical Journal, 45:5 (2004), 840–848. Zbl 1081.51012

[13] N. V. Abrosimov, M. Godoy-Molina, A. D. Mednykh, *On the volume of a spherical octahedron with symmetries*, J. Math. Sci. (N. Y.), **161**:1 (2009), 1–10. Zbl 1187.51021

[14] N. V. Abrosimov, G. A. Baigonakova, *Hyperbolic octahedron with mmm-symmetry*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **10** (2013), 123–140. Zbl 1330.52014

[15] V. A. Krasnov, *On the volume of hyperbolic octahedra with nontrivial symmetry*, J. Math. Sci. (N. Y.), **214**:5 (2016), 675–686. Zbl 06587841

[16] V. A. Krasnov, *Non-Euclidean octahedra with mm2-symmetry*, Mathematical Notes, **99**:1 (2016), 160–163. Zbl 1344.51001

[17] N. V. Abrosimov, E. S. Kudina, A. D. Mednykh, *On the volume of a hyperbolic octahedron with $\overline{3}$-symmetry*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **288** (2015), 1–9. Zbl 1341.52022

[18] R. V. Galiulin, S. N. Mikhalev, I. Kh. Sabitov, *Some applications of the formula for the volume of an octahedron*, Mathematical Notes, **76** (2004), 25–40. Zbl 1075.52006

[19] J. H. Conway, H. Burgiel, Ch. Goodman-Strass, *The Symmetries of Things*, 2008. Zbl 1173.00001

[20] N. W. Johnson, *Geometries and Transformations*, Manuscript, 2011. Chapter 11: Finite symmetry groups.

[21] F. L. Tóth, *Regular Figures*, Pergamon Press, Macmillan, New York, 1964. Zbl 0134.15705

Nikolay Vladimirovich Abrosimov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Novosibirsk State University,
Pirogova str., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: `abrosimov@math.nsc.ru`

Ekaterina Sergeevna Kudina
Gorno-Altaisk State University,
Socialisticheskaya str., 34,
649000, Gorno-Altaisk, Russia
E-mail address: `eskudina@hotmail.com`

Alexander Dmitrievich Mednykh
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Novosibirsk State University,
Pirogova str., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: `smedn@mail.ru`