S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 1159–1169 (2016) УДК 514.74
DOI 10.17377/semi.2016.13.091 MSC 52C05

О ДИСКРЕТИЗАЦИИ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ КООРДИНАТ

Э.И. ШАМАЕВ

Abstract. In this paper we consider a problem of construction of discrete analogues of orthogonal curvilinear coordinate systems in the Euclidean space. In particular we find algebraic-geometric spectral data for discrete analogues of the parabolic coordinate system and the spiral coordinate system.

Keywords: discrete integrability, Baker–Akhiezer function, Darboux–Egoroff lattice, parabolic coordinate system, spiral coordinate system

1. Введение

Ортогональные криволинейные системы координат в $\mathbb{R}^n$ интенсивно изучались в конце XIX — в начале XX века (см. [1]). Интерес к ортогональным координатам вновь возник в наше время в связи с многочисленными приложениями, в частности, к системам гидродинамического типа [2] и к фробениусовым многообразиям [3]. Захаровым [4] и Кричевером [5] были применены методы интегрируемых систем к задаче построения ортогональных координат. В [6] метод Кричевера был распространен на случай сингулярных спектральных кривых.

Цеслиньский, Долива и Сантини [7] предложили в качестве дискретизации ортогональных криволинейных систем координат в $\mathbb{R}^n$ рассматривать циркулярные решетки $x : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}^n$, т.е. решетки, в которых каждый элементарный четырехугольник с вершинами

$$x(u),\ T_i x(u),\ T_j x(u),\ T_i T_j x(u),\ u \in \mathbb{Z}^n, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n,\ i \neq j,$$

Shamaev, E.I., On discretization of parabolic coordinates.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-11-00441).

Поступила 28 ноября 2016 г., опубликована 8 декабря 2016 г.

где $T_i x(u^1, \ldots, u^i, \ldots, u^n) = x(u^1, \ldots, u^i + 1, \ldots, u^n)$, является вписанным в окружность.

Напомним, что диагональная метрика $ds^2 = H_1^2(du^1)^2 + \ldots + H_n^2(du^n)^2$ в $\mathbb{R}^n$ называется *метрикой Дарбу – Егорова*, если *коэффициенты вращения* $\beta_{ij} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_j}{\partial u^i}$ являются *симметричными* $\beta_{ij} = \beta_{ji}$. Ахметшин, Вольвовский и Кричивер [8] показали, что дискретным аналогом условия симметрии коэффициентов вращения $\beta_{ij} = \beta_{ji}$ является условие попарной ортогональности следующих ребер

$$\langle \Delta_i x(u), \Delta_j^- x(u) \rangle = 0, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n,\ i \neq j, \tag{1}$$

где $\Delta_i x(u) = T_i x(u) - x(u)$, $\Delta_j^- x(u) = T_i^{-1} x(u) - x(u)$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Решетки, удовлетворяющие условиям вписанности и ортогональности, называются *решетками Дарбу – Егорова* (см. рис. 1).

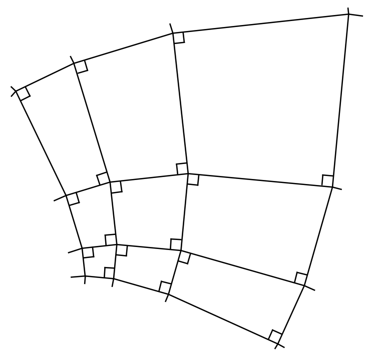

Рис. 1.

В [8] указаны алгебро-геометрические данные, отвечающие решеткам Дарбу – Егорова. В работе [9] конструкция [8] была реализована на сингулярных приводимых кривых в духе работы [6].

В этой работе мы модифицируем конструкцию работы [8], а именно мы изменяем условия нормировки функции Бейкера – Ахиезера (см. также [10]) для того, чтобы свести задачу построения решеток Дарбу – Егорова к некоторым разностным уравнениям. С помощью этой конструкции мы строим дискретные аналоги параболических координат и спиральной системы координат.

2. Конструкция Ахметшина – Вольвовского – Кричевера

Пусть Γ — гладкая алгебраическая кривая рода g, λ — мероморфная функция на Γ с простыми полюсами в точках $P_1, \ldots, P_n$ и нулями в $Q_1, \ldots, Q_n$. Обозначим через $P_1^{\pm}, \ldots, P_n^{\pm}$ точки такие, что $\lambda(P) = \pm 1$. Рассмотрим на Γ дивизоры

$$D = \gamma_1 + \ldots + \gamma_{g+l-1}, \quad R = R_1 + \ldots + R_l.$$

Для D в общем положении существует единственная функция $\psi(u, P)$, $u = (u^1, \ldots, u^n) \in \mathbb{Z}^n$, $P \in \Gamma$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) в окрестности P_i^+, $i = 1, \dots, n$, функция ψ имеет разложение

$$\frac{1}{(\lambda-1)^{u^i}}\left(\xi^i_{0,+} + \xi^i_{1,+}(\lambda-1) + \xi^i_{2,+}(\lambda-1)^2 + \dots\right),$$

в окрестности P_i^-, $i = 1, \dots, n$, функция ψ имеет разложение

$$(\lambda+1)^{u^i}\left(\xi^i_{0,-} + \xi^i_{1,-}(\lambda+1) + \xi^i_{2,-}(\lambda+1)^2 + \dots\right);$$

2) вне точек $P_i^\pm$, $i = 1, \dots, n$, функция ψ мероморфна с простыми полюсами в γ_j, $j = 1, \dots, g + l - 1$;

3) выполнены условия нормировки $\psi(u, R_i) = 1$, $i = 1, \dots, l$.

Функция ψ называется функцией Бейкера – Ахиезера. Она может быть явно выражена через тэта-функцию кривой Γ [8].

Теорема 1 (Ахметшин, Вольвовский, Кричевер [8])**.** *Пусть Γ — гладкая алгебраическая кривая рода g с голоморфной инволюцией $\sigma : \Gamma \to \Gamma$ такой, что $\lambda \circ \sigma = -\lambda$.*

Пусть дивизоры D и R не содержат неподвижные точки инволюции σ и существует дифференциал Ω на Γ такой, что

$$\begin{aligned}(\Omega)_0 &= P_1 + \dots + P_n + D + \sigma(D),\\ (\Omega)_\infty &= Q_1 + \dots + Q_n + R + \sigma(R).\end{aligned}$$

Тогда вектор-функция

$$x(u) = \left(\sqrt{\operatorname{Res}_{Q_1}\Omega}\,\psi(u, Q_1), \dots, \sqrt{\operatorname{Res}_{Q_n}\Omega}\,\psi(u, Q_n)\right), u \in \mathbb{Z}^n, \tag{2}$$

задает планарную решетку в $\mathbb{C}^n$, т.е. векторы $\Delta_i x$, $\Delta_j x$, $\Delta_i \Delta_i x$ линейно зависимы над полем $\mathbb{C}$ для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$, и удовлетворяет условию

$$\langle \Delta_i x(u), \Delta_j^- x(u)\rangle_{\mathbb{C}} = 0, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad i \neq j,$$

где $\langle (v^1, \dots, v^n), (w^1, \dots, w^n)\rangle_{\mathbb{C}} = v^1 w^1 + \dots + v^n w^n$.

В общем случае решетка (2) является комплексной. В [8] также показано, что если Γ допускает антиголоморфную инволюцию τ такую, что

$$\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma,\ \tau(D) = D,\ \tau(R) = R,\ \tau(Q_i) = Q_i,\ \tau(P_j^+) = P_j^+, 1 \leqslant i, j \leqslant n,$$

и

$$\sqrt{\operatorname{Res}_{Q_1}\Omega}, \dots, \sqrt{\operatorname{Res}_{Q_n}\Omega} \in \mathbb{R},$$

то решетка (2) вещественна и является решеткой Дарбу – Егорова в $\mathbb{R}^n$.

3. Решетки Дарбу – Егорова, отвечающие сингулярным спектральным кривым

Далее считаем, что $n = 2$. Пусть Γ — приводимая алгебраическая кривая, состоящая из двух компонент Γ_1 и Γ_2. Компоненты Γ_1 и Γ_2 выберем изоморфными $\mathbb{C}P^1 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ с комплексными координатами z_1 и z_2 в аффинной части $\mathbb{C}$. Будем предполагать, что на Γ определена голоморфная инволюция $\sigma : z_i \mapsto -z_i$. Считаем, что точки пересечения компонент выбраны так, что функция $\lambda : z_i \mapsto z_i$, $i = 1, 2$, корректно определена на всей Γ. Пересечения компонент выбираем трансверсальными. Обозначим точки $\infty \in \Gamma_i$ через P_i и $0 \in \Gamma_i$ — через Q_i, $i = 1,\ 2$.

Под дифференциалом Ω на Γ понимаем мероморфные дифференциалы Ω_1 на Γ_1 и Ω_2 на Γ_2 с простыми полюсами в точках склейки $a \in \Gamma_1$, $b \in \Gamma_2$ такими, что выполнено условие регулярности $\mathrm{Res}_a \Omega_1 + \mathrm{Res}_b \Omega_2 = 0$. Такой подход был предложен в [6].

Обозначим через $P_1^\pm, P_2^\pm$ точки $(\pm 1) \in \Gamma_1$, $(\pm 1) \in \Gamma_2$. Рассмотрим на Γ дивизоры $D = \gamma_1 + \ldots + \gamma_{p+l-1}$ и $R = R_1 + \ldots + R_l$, где $p+1$ — количество точек пересечения компонент Γ. Для D в общем положении существует единственная функция $\psi(u, P)$, $u = (u^1, u^2) \in \mathbb{Z}^2$, $P \in \Gamma$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) в окрестности P_i^+, $i = 1, 2$, функция ψ имеет разложение

$$(\lambda - 1)^{-u^i} \left(\zeta_0^i + \zeta_1^i(\lambda - 1) + \zeta_2^i(\lambda - 1)^2 + \ldots\right)$$

и в окрестности P_i^-, $i = 1, 2$, функция ψ имеет вид

$$(\lambda + 1)^{u^i} \left(\xi_0^i + \xi_1^i(\lambda + 1) + \xi_2^i(\lambda + 1)^2 + \ldots\right);$$

2) вне точек $P_i^\pm$ функция ψ мероморфна с простыми полюсами, точками полюсов ψ могут быть только γ_j, $j = 1, \ldots, p + l - 1$;

3) выполнены условия нормировки $\psi(u, R_i) = h_i(u)$, $i = 1, \ldots, l$.

Справедлива следующая теорема

Теорема 2. *Пусть на* Γ *существует 1-форма* Ω *такая, что*

$$\begin{aligned}(\Omega)_0 &= P_1 + P_2 + D + \sigma(D),\\ (\Omega)_\infty &= Q_1 + Q_2 + R + \sigma(R)\end{aligned}$$

и выполнено условие

$$\sum_{k=1}^{l} \Big(\lambda_k(T_1 h_k - h_k)\big(T_2^{-1}\psi(u, \sigma R_k) - \psi(u, \sigma R_k)\big) + \lambda_k^\sigma\big(T_1\psi(u, \sigma R_k) - \psi(u, \sigma R_k)\big)\big(T_2^{-1}h_k - h_k\big)\Big) = 0, \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{l} \Big(\lambda_k(T_2 h_k - h_k)\big(T_1^{-1}\psi(u, \sigma R_k) - \psi(u, \sigma R_k)\big) + \lambda_k^\sigma\big(T_2\psi(u, \sigma R_k) - \psi(u, \sigma R_k)\big)\big(T_1^{-1}h_k - h_k\big)\Big) = 0, \tag{4}$$

где $\lambda_k = \mathrm{res}_{R_k}(\lambda - 1)\,\Omega$ *и* $\lambda_k^\sigma = \mathrm{res}_{\sigma R_k}(\lambda - 1)\,\Omega$.

Тогда вектор-функция

$$x(u) = \Big(\sqrt{\mathrm{Res}_{Q_1}\Omega}\,\psi(u, Q_1), \sqrt{\mathrm{Res}_{Q_2}\Omega}\,\psi(u, Q_2)\Big) \in \mathbb{C}^2, u \in \mathbb{Z}^2, \tag{5}$$

задает решетку в $\mathbb{C}^2$*, удовлетворяющую условию ортогональности*

$$\langle \Delta_1 x(u), \Delta_2^- x(u)\rangle_{\mathbb{C}} = 0, \quad \langle \Delta_2 x(u), \Delta_1^- x(u)\rangle_{\mathbb{C}} = 0.$$

Если Γ *допускает антиголоморфную инволюцию* τ *такую, что* $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$, $\tau(D) = D$, $\tau(R) = R$, $\tau(Q_i) = Q_i$, $\tau(P_j^+) = P_j^+$ *и* $\sqrt{\mathrm{Res}_{Q_1}\Omega}$, $\sqrt{\mathrm{Res}_{Q_2}\Omega}$ — *вещественны, то решетка (5) является решеткой Дарбу – Егорова на* $\mathbb{R}^2$.

Замечание. Уравнения (3) – (4) в общем случае являются достаточно сложными. Ниже мы приведем явные решения уравнений (3) – (4), приводящие к дискретным аналогам параболических и спиральных координат.

4. Доказательство теоремы 2

Покажем, что для $i \neq j$ дифференциал

$$\Omega_{ij} = (\lambda - 1)\Delta_i\psi(u,P)\Delta_j^-\psi(u,\sigma(P))\,\Omega$$

имеет полюсы только в Q_1, Q_2, в точках дивизоров R, σR и точках склейки Γ_1 и Γ_2. Полюсы $\lambda - 1$ в точках P сокращаются с нулями Ω. Полюсы дифференциала $\Delta_i\psi\Delta_j^-\psi\,\Omega$ в точках $D + \sigma(D)$ сокращаются с нулями самого дифференциала. При $k \neq i, j$ в точках $P_k^{\pm}$

$$\Delta_i\psi\Delta_j^-\psi = (\pm\lambda - 1)^{-u^k}(\mp\lambda + 1)^{u^k}\Big(\zeta_0^k\xi_0^k + O(\lambda - 1) + \dots\Big)$$

полюсы сокращаются. При $k = i$ или $k = j$ в точках P_k^+ функция

$$\Delta_k\psi\Delta_j^-\psi = (\lambda - 1)^{-u^k - 1}(-\lambda + 1)^{u^k}\Big(T_k\zeta_0^k\xi_0^k + O(\lambda - 1) + \dots\Big)$$

имеет простой полюс, который сокращается с нулем функции $\lambda - 1$. Таким образом, Ω_{12} и Ω_{21} имеют простые полюсы в Q_1, Q_2, точках дивизоров R, σR и точках склейки Γ_1 и Γ_2. Прямыми выкладками проверяется, что левые части условий (3), (4) являются суммами вычетов Ω_{12} и Ω_{21} соответственно, взятых в точках дивизоров R и σR. Из условия регулярности и условий (3) и (4) следует, что $\operatorname{Res}_{Q_1}\Omega_{ij} + \operatorname{Res}_{Q_2}\Omega_{ij} = 0$. С другой стороны,

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{Q_1}\Omega_{ij} + \operatorname{Res}_{Q_2}\Omega_{ij} &= -\sum_{k=1}^{2}\Delta_i\psi(u,Q_k)\cdot\Delta_j^-\psi(u,Q_k)\operatorname{Res}_{Q_k}\Omega\\ &= -\sum_{k=1}^{2}\Delta_i x^k(u)\cdot\Delta_j^- x^k(u) = -\langle\Delta_i x(u), \Delta_j^- x(u)\rangle_{\mathbb{C}}.\end{aligned}$$

Таким образом, решетка $x(u)$ удовлетворяет условию ортогональности.

Из определения λ и инвариантности дивизоров D и R относительно инволюции τ следует, что условия определяющие $\psi(u,P)$ и $\overline{\psi(u,\tau(P))}$ совпадают. В силу единственности функции Бейкера – Ахиезера $\psi(u,P) = \overline{\psi(u,\tau(P))}$. Поэтому из вещественности $\sqrt{\operatorname{Res}_{Q_1}\Omega}$ и $\sqrt{\operatorname{Res}_{Q_2}\Omega}$ следует $x(u) = \overline{x(u)}$ для $u \in \mathbb{Z}^n$.

5. Спиральная система координат

Спиральной системой координат называется ортогональная криволинейная система координат, у которой координатные линии являются логарифмическими спиралям с одинаковыми скоростями роста. Спиральная система координат (ξ, ζ) определяется соотношениями

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\xi+\zeta}\cos(\xi - \zeta), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\xi+\zeta}\sin(\xi - \zeta).$$

Опишем спектральные данные для дискретного аналога спиральной системы координат. Рассмотрим кривую Γ, где точки P_1, P_2 выбраны на Γ_1 и $Q_1, Q_2 \in \Gamma_2$. Положим

$$\Omega_1 = \frac{z_1(a^2 - R^2)\,dz_1}{(z_1^2 - R^2)(z_1^2 - a^2)}, \quad \Omega_2 = -\left(\frac{2z_2}{z_2^2 - b^2} + \frac{2\gamma^2}{(b^2 - \gamma^2)z_2}\right)dz_2,$$

т.е. $R \in \Gamma_1$ и $\gamma \in \Gamma_2$ (см. рис. 2).

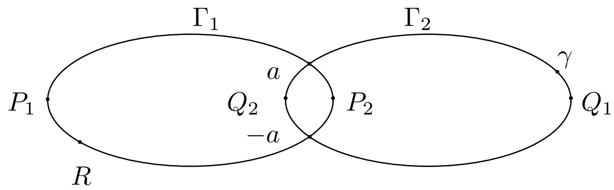

Рис. 2.

На Γ рассмотрим функцию Бейкера – Ахиезера вида

$$\psi_1(z_1) = \left(\frac{-z_1-p}{z_1-p}\right)^{u^1} \left(\frac{-z_1-q}{z_1-q}\right)^{u^2} f_0, \quad \psi_2(z_2) = g_0 + \frac{g_1}{z_2-\gamma}.$$

Из условий $\psi_1(a) = \psi_2(b)$, $\psi_1(-a) = \psi_2(-b)$ и $\psi_1(R) = 2b\left(\frac{p+R}{p-R}\right)^{u^1}\left(\frac{q+R}{q-R}\right)^{u^2} h(u)$ следует, что

$$\psi_1(z_1) = 2b\left(\frac{-z_1-p}{z_1-p}\right)^{u^1}\left(\frac{-z_1-q}{z_1-q}\right)^{u^2} h(u),$$

$$(6) \quad \psi_2(z_2) = (-1)^{u^2+1}\Bigg((b-\gamma)\,\mu^{u^1-u^2} + (b+\gamma)\,\mu^{-u^1+u^2} - \left(b^2-\gamma^2\right)\frac{\mu^{u^1-u^2} - \mu^{-u^1+u^2}}{z_2-\gamma}\Bigg)h(u),$$

где $\mu = \frac{p+a}{p-a}$. По определению Ω_{12} (см. доказательство теоремы 2) имеет вид

$$\frac{(z_1-p)(z_1-q)}{z_1}\Delta_1\psi(u,P)\Delta_2^-\psi(u,\sigma(P))\,\Omega_1,$$

дифференциал Ω_{21} имеет вид

$$\frac{(z_1-p)(z_1-q)}{z_1}\Delta_2\psi(u,P)\Delta_1^-\psi(u,\sigma(P))\,\Omega_1.$$

Функция $\frac{(z_1-p)(z_1-q)}{z_1}$ продолжается на всю кривую Γ если выполнено условие $pq = -a^2$. Будем считать, что $p = -\frac{a^2}{q}$. Теперь условие (3) примет вид

$$\begin{aligned} &\operatorname{res}_R \Omega_{12} + \operatorname{res}_{\sigma R} \Omega_{12} = \\ &\qquad 8b^2(a^2+q^2)h(u^1,u^2)\left(h(u^1+1,u^2) - h(u^1,u^2-1)\right) \\ &\qquad\quad - 8b^2(a^2-q^2)\left(h^2(u^1,u^2) - h(u^1+1,u^2)h(u^1,u^2-1)\right) = 0. \end{aligned}$$

Также выпишем условие (4)

$$\begin{aligned} &\operatorname{res}_R \Omega_{21} + \operatorname{res}_{\sigma R} \Omega_{21} = \\ &\qquad 8b^2(a^2+q^2)h(u^1,u^2)\left(h(u^1-1,u^2) - h(u^1,u^2+1)\right) \\ &\qquad\quad - 8b^2(a^2-q^2)\left(h^2(u^1,u^2) - (u^1-1,u^2)h(u^1,u^2+1)\right) = 0. \end{aligned}$$

Разность $T_2(\operatorname{res}_R \Omega_{12} + \operatorname{res}_{\sigma R} \Omega_{12}) - T_1(\operatorname{res}_R \Omega_{21} + \operatorname{res}_{\sigma R} \Omega_{21})$ представима в виде следующего произведения

$$-8b^2(a^2+q^2)(T_1h+T_2h)\left(h + \rho(T_2h - T_1h) - T_1T_2h\right) = 0, \quad \rho = \frac{a^2-q^2}{a^2+q^2}.$$

Далее отдельно рассмотрим два случая: $T_1h + T_2h = 0$ и $h + \rho(T_2h - T_1h) - T_1T_2h = 0$. В первом случае имеем равенство $h(u^1, u^2) = (-1)^{u^2}\tilde{h}(u^1 + u^2)$, где $\tilde{h}(u^1)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\tilde{h}(u^1 + 2) = \frac{\rho\tilde{h}(u^1 + 1) - \tilde{h}(u^1)}{\tilde{h}(u^1 + 1) - \rho\tilde{h}(u^1)}\tilde{h}(u^1 + 1), \quad u^1 \in \mathbb{Z}.$$

Введем обозначение $\theta = \frac{\tilde{h}(2)}{\tilde{h}(0)}$. Математической индукцией по u^1 и прямыми выкладками проверяется, что функция $\tilde{h}$ полностью определяется своими значениями $\tilde{h}(0)$ и $\tilde{h}(1)$, а именно

$$\tilde{h}(2u^1) = \theta^{u^1}\tilde{h}(0), \quad \tilde{h}(2u^1 + 1) = \theta^{u^1}\tilde{h}(1), \quad u^1 \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Заметим, что справедливы равенства

$$\operatorname{res}_{Q_1}\Omega_2 = \frac{-2\gamma^2}{b^2 - \gamma^2}, \quad \operatorname{res}_{Q_2}\Omega_2 = \frac{2b^2}{b^2 - \gamma^2}.$$

Следовательно, по теореме 2 функции

$$x^1(u^1, u^2) = (-(b - \gamma)\mu^{u^1 - u^2} + (b + \gamma)\mu^{-u^1 + u^2})(-1)^{u^2}\tilde{h}(u^1 + u^2),$$

$$x^2(u^1, u^2) = \sqrt{-1}((b - \gamma)\mu^{u^1 - u^2} + (b + \gamma)\mu^{-u^1 + u^2})(-1)^{u^2}\tilde{h}(u^1 + u^2),$$

где $\tilde{h}$ определена равенствами (7), задают ортогональные решетки в $\mathbb{C}^2$. При подходящих спектральных данных построенная решетка вещественна, но, видимо, не вкладывается в $\mathbb{R}^2$ без самопересечений.

Далее рассмотрим второй случай, т.е. считаем $h + \rho(T_2h - T_1h) - T_1T_2h = 0$. Поэтому $T_1T_2h = h + \rho(T_2h - T_1h)$. Исключая T_1T_2h из уравнения $T_2(\operatorname{res}_R\Omega_{12} + \operatorname{res}_{\sigma R}\Omega_{12}) = 0$, получим рекуррентное соотношение

$$h(u^1, u^2 + 1) = -\frac{\rho h(u^1 + 1, u^2) - h(u^1, u^2)}{h(u^1 + 1, u^2) - \rho h(u^1, u^2)}h(u^1, u^2).$$

Этому уравнению, в частности, удовлетворяет

$$h(u^1, u^2) = \sqrt{-1}\chi^{u^1}\left(-\frac{\rho\chi - 1}{\chi - \rho}\right)^{u^2}, \quad \rho = \frac{a^2 - q^2}{a^2 + q^2},$$

где $\chi \in \mathbb{C}$. Следовательно, по теореме 2 функции

$$x^1(u^1, u^2) = \sqrt{-1}(-(b - \gamma)\mu^{u^1 - u^2} + (b + \gamma)\mu^{-u^1 + u^2})\chi^{u^1}\left(\frac{\rho\chi - 1}{\chi - \rho}\right)^{u^2}, \tag{8}$$

$$x^2(u^1, u^2) = ((b - \gamma)\mu^{u^1 - u^2} + (b + \gamma)\mu^{-u^1 + u^2})\chi^{u^1}\left(\frac{\rho\chi - 1}{\chi - \rho}\right)^{u^2} \tag{9}$$

где $\mu = \frac{a-q}{a+q}$, задают ортогональные решетки в $\mathbb{C}^2$.

Рассмотрим наиболее интересный частный случай формул (8) – (9). Пусть $b = \frac{1}{2}$, $\gamma = 0$, $\mu = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, χ удовлетворяет соотношению $\chi^k = \frac{\chi - \cos\frac{2\pi}{n}}{\chi\cos\frac{2\pi}{n} - 1}$. Тогда элементарные четырехугольники решетки не имеют самопересечений. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть k и n — произвольные натуральные числа и χ — вещественный корень уравнения* $\chi^k = \frac{\chi - \cos\frac{2\pi}{n}}{\chi\cos\frac{2\pi}{n} - 1}$. *Тогда решетка* $x(u^1, u^2) = (x^1(u^1,u^2), x^2(u^1,u^2))$, $(u^1,u^2) \in \mathbb{Z}^2$, *определенная уравнениями*

$$x^1(u^1,u^2) = \chi^{u^1+ku^2}\cos\frac{2\pi(u^1-u^2)}{n}, \tag{10}$$

$$x^2(u^1,u^2) = \chi^{u^1+ku^2}\sin\frac{2\pi(u^1-u^2)}{n}, \tag{11}$$

является решеткой Дарбу – Егорова.

Пример построенной решетки при $k = 3$ и $n = 14$ приведен на рис. 3. Другой пример решетки для $k = 1$ и $n = 14$ показан на рис. 4. Координаты, определенные равенствами (10) и (11), задают дискретный аналог спиральной системы координат.

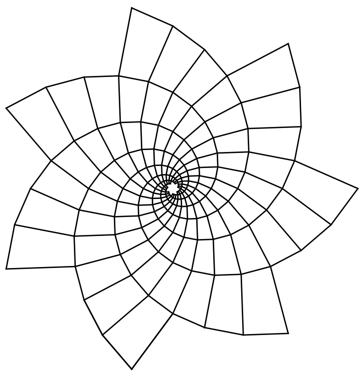

Рис. 3.

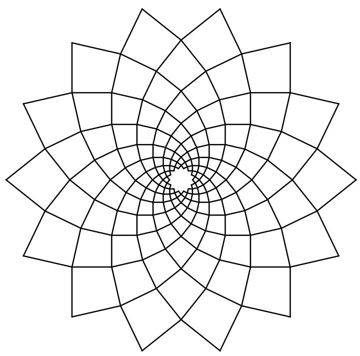

Рис. 4.

6. Дискретный аналог параболических координат

Напомним, что параболическими координатами на плоскости называется ортогональная криволинейная система координат, координатные линии которой являются софокусными и соосными параболами. Параболические координаты (ξ, ζ) определены следующими соотношениями

$$x = 2\xi\zeta, \quad y = \xi^2 - \zeta^2.$$

Дадим описание спекральных данных дискретного аналога параболических координат. Пусть Γ состоит из Γ_1 и Γ_2 изоморфных $\mathbb{C}P^1$. Пусть Γ_1 и Γ_2 пересекаются по двум точкам:

$$a \sim b, \quad (-a) \sim (-b), \quad \{a, -a\} \subset \Gamma_1, \quad \{b, -b\} \subset \Gamma_2$$

(см. рис. 5). Далее считаем $a = b$.

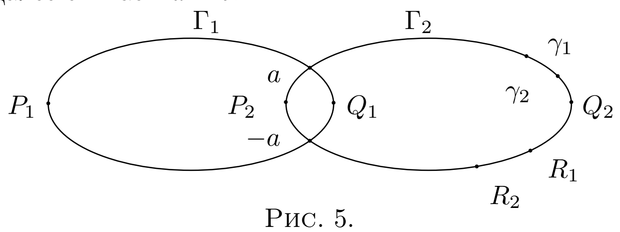

Рис. 5.

Выберем $R_1, R_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_2$. Пусть дифференциал Ω на Γ задан следующими дифференциалами

$$\Omega_1 = -\frac{dz_1}{z_1(z_1^2 - a^2)}, \quad \Omega_2 = \frac{(z_2^2 - \gamma_1^2)(z_2^2 - \gamma_2^2)(a^2 - R_1^2)(a^2 - R_2^2)dz_2}{z_2(z_2^2 - a^2)(a^2 - \gamma_1^2)(a^2 - \gamma_2^2)(z_2^2 - R_1^2)(z_2^2 - R_2^2)},$$

которые удовлетворяют условию регулярности Ω. Будем считать, что $\gamma_2 = -\gamma_1$, $R_2 = -2R_1$. В этом случае условие вещественности следующих выражений

$$\sqrt{\operatorname{Res}_{Q_1} \Omega_1} = \frac{1}{\sqrt{a^2}}, \quad \sqrt{\operatorname{Res}_{Q_2} \Omega_2} = \sqrt{-\frac{\gamma_1^4(a^2 - R_1^2)(a^2 - 4R_1^2)}{4(a^2 - \gamma_1^2)^2 a^2 R_1^4}}$$

выполнено для всех вещественных a таких, что $(a^2 - R_1^2)(a^2 - 4R_1^2) < 0$.

Функцию Бейкера – Ахиезера ищем в виде

$$\psi_1(z_1) = \left(\frac{-z_1 - 1}{z_1 - 1}\right)^{u^1} f_0, \quad \psi_2(z_2) = \left(\frac{-z_2 - 1}{z_2 - 1}\right)^{u^2} \left(g_0 + \frac{g_1}{z_2 - \gamma_1} + \frac{g_2}{z_2 - \gamma_2}\right).$$

Из условий $\psi_1(a) = \psi_2(a)$, $\psi_1(-a) = \psi_2(-a)$ и $\psi_2(R_1) = \tilde{h}(u)h_1(u)$ и $\psi_2(R_2) = \tilde{h}(u)h_2(u)$ найдем функцию ψ. Вспомогательную функцию $\tilde{h}(u)$ выберем так, чтобы f_0, g_0, g_1 были многочленами показательных функций от u^1 и u^2. Пусть

$$\tilde{h}(u) = 3R_1(a^2 - \gamma_1^2)\left((a - R_1)(a + 2R_1)\nu^{2u2} - (a - 2R_1)(a + R_1)\nu^{2u1}\right),$$

где $\nu = \frac{1+a}{1-a}$. Функции $h_1(u)$ и $h_2(u)$ для сокращения записи положим равными

$$h_1(u) = \frac{\tilde{h}_1(u)}{(\gamma_1^2 - R_1^2)(a^2 - 4R_1^2)} \left(\frac{1 + R_1}{1 - R_1}\right)^{-u^2},$$

$$h_2(u) = -\frac{\tilde{h}_2(u)}{(\gamma_1^2 - 4R_1^2)(a^2 - R_1^2)} \left(\frac{1 + 2R_1}{1 - 2R_1}\right)^{-u^2}.$$

Если считать $R_1 = 3a$, то вычет, например, $\operatorname{Res}_{R_1} \Omega_{21}$ примет простой вид

$$4\nu^{2u^1+2u^2-1}\left(T_1^2(\tilde{h}_1+\tilde{h}_2)-\nu(\tilde{h}_1+\tilde{h}_2)\right)\left(T_1^{-1}(\tilde{h}_1+\tilde{h}_2)-\nu(\tilde{h}_1+\tilde{h}_2)\right),$$

хотя уравнения (3) и (4) останутся громоздкими. Примем, что $\tilde{h}_1$ и $\tilde{h}_2$ — постоянные с суммой s и разностью d. В этом случае условие ортогональности (3) и (4) равносильно условию на спектральные данные

$$16(\nu-1)^2R_1^2s^2 = a^2(\nu+1)^2(3d+s)^2. \tag{12}$$

Таким образом, из разрешимости (12) относительно d и теоремы 2 следует справедливость теоремы

Теорема 4. *Решетка $x(u^1,u^2) = (x^1(u^1,u^2), x^2(u^1,u^2))$, $(u^1,u^2)\in\mathbb{Z}^2$, определенная функциями*

$$x^1(u^1,u^2) = (a-1)b\mu^{2u^1} + \frac{(a+1)}{b}\mu^{2u^2},$$

$$x^2(u^1,u^2) = 2\mu^{u^1+u^2},$$

где $a,b\in\mathbb{R}$, $\mu = \frac{1+a}{1-a}$, является решеткой Дарбу – Егорова.

Построенная решетка является естественным аналогом параболических координат, поскольку координатные ломаные лежат на соосных параболах (см. рис. 6).

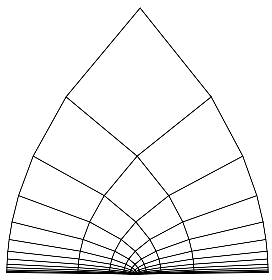

Рис. 6.

Проективное преобразование

$$\xi^1(u^1,u^2) = \frac{x^1(u^1,u^2)}{x^1(u^1,u^2)+x^2(u^1,u^2)+1},$$

$$\xi^2(u^1,u^2) = \frac{x^2(u^1,u^2)}{x^1(u^1,u^2)+x^2(u^1,u^2)+1}$$

задает новую решетку

$$\xi^1(u^1,u^2) = \frac{(a-1)b^2\mu^{2u^1}+(a+1)\mu^{2u^2}}{(a-1)b^2\mu^{2u^1}+(a+1)\mu^{2u^2}+2b\mu^{u^1+u^2}+b},$$

$$\xi^2(u^1,u^2) = \frac{2b\mu^{u^1+u^2}}{(a-1)b^2\mu^{2u^1}+(a+1)\mu^{2u^2}+2b\mu^{u^1+u^2}+b}.$$

Координатные линии $u^1 = \mathrm{const}$ лежат на кривых второго порядка

$$(\xi^2)^2 - (2\rho_1+\rho_2)\xi^1(\xi^2-1) - (\rho_1+\rho_2)(\xi^1)^2 + \rho_1(2\xi^2-1) = 0,$$

где $\rho_1 = \frac{4b^2}{\mu^{-4u^1+1}-4b^2}$, $\rho_2 = \frac{4b\mu^{-2u^1+1}}{(1+a)(\mu^{-4u^1+1}-4b^2)}$. Если выполнено неравенство

$$(1+a)^3 b - (2-a^2)b^2 \left(\frac{1+a}{1-a}\right)^{2u^1} > 0,$$

то эти кривые являются эллипсами. Последнее неравенство выполнено, например, при $a \in (0,1)$, $b > 0$ и u^1 меньших некоторой отрицательной постоянной. Таким образом, при выполнении перечисленных выше условий координатные линии, также как и в эллиптической системе координат, являются эллипсами. Пример такой решетки приведен на рис. 7 в случае $a = \frac{1}{10}$, $b = 1$.

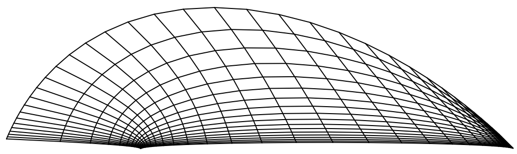

Рис. 7.

References

[1] Darboux G., *Leçons sur le systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*, Paris: Gauthier-Villars, 1910. JFM 41.0674.04

[2] Tsarev S.P., *The geometry of Hamiltonian systems of hydrodynamic type. The generalized hodograph method*, Mathematics of the USSR-Izvestiya:Mathematics, **37**, No. 2 (1991), 397–419. MR1086085

[3] Dubrovin B., *Geometry of 2D topological field theories. Lecture Notes in Math.*, 1620, Berlin: Springer, 1995. P. 120–348.

[4] Zakharov V.E., *Description of the n-orthogonal curvilinear coordinate systems and Hamiltonian integrable systems of hydrodynamic type. I: Integration of the Lamé equations*, Duke Math. J., **94** (1998), 103-139. MR1635908

[5] Krichever I.M., *Algebraic-geometric n-orthogonal curvilinear coordinate systems and the solution of associativity equations*, Funct. Anal. Appl., **31**, No. 1 (1997), 25–39. MR1459831

[6] Mironov A.E., Taimanov I.A., *Orthogonal curvilinear coordinate systems that correspond to singular spectral curves*, Proc. Steklov Inst. Math., **255**, No. 4 (2006), 169–184. MR2301618

[7] Cieśliński J., Doliwa A., Santini P.M., *The integrable discrete analogues of orthogonal coordinate systems are multi-dimensional circular lattices*, Phys. Lett. A., **235** (1997), 480–488. MR1480090

[8] Akhmetshin A.A., Vol'vovskii Yu.S., Krichever I.M., *Discrete Analogs of the Darboux – Egorov Metrics*, Tr. Mat. Inst. im. V.A. Steklova, Ross. Akad. Nauk , **225** (1999) 21–45. [Proc. Steklov Inst. Math. **225** (1999), 16–39]. MR1725931

[9] Shamaev E. I., *On Darboux – Egorov lattices, Siberian Electronic Mathematical Reports*, **10** (2013), 113–122.

[10] Bogoyavlenskaya O. A., *On one family of finite gap curvilinear orthogonal coordinates*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **12** (2015), 947–954.

Elley Ivanovich Shamaev
Ammosov North-Eastern Federal University,
str. Kulakovskogo, 48,
677000, Yakutsk, Russia
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: eshamaev@mail.ru