

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 13, стр. 1170–1186 (2016)

DOI 10.17377/semi.2016.13.092

УДК 517.925

MSC 34C05

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКИХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ТИПА ДАРБУ

Е. П. ВОЛОКИТИН, В. М. ЧЕРЕСИЗ

АБСТРАКТ. We study the local and global behavior of the trajectories of polynomial differential systems of the form $\dot{x} = x + p_n(x, y)$, $\dot{y} = y + q_n(x, y)$.

Keywords: polynomial systems, limit cycles, singular points, Poincaré equator, phase portraits.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть мы имеем плоскую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(1) \quad \dot{x} = x + p_n(x, y) \equiv P(x, y), \quad \dot{y} = y + q_n(x, y) \equiv Q(x, y),$$

где зависимые переменные x, y и независимая переменная t предполагаются действительными, $p_n(x, y)$, $q_n(x, y)$ — однородные многочлены степени $n \geq 2$.

С системой (1) ассоциируется векторное поле

$$\mathcal{X} = (x + p_n(x, y))\partial_x + (y + q_n(x, y))\partial_y,$$

а также дифференциальное уравнение (поле направлений)

$$(y + q_n(x, y))dx - (x + p_n(x, y))dy = 0.$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$(2) \quad (M(x, y) + yR(x, y))dx - (N(x, y) + xR(x, y))dy = 0,$$

где M, N, R — целые комплексные многочлены относительно x, y впервые исследовал G. Darboux [1]. Поэтому это уравнение иногда называют уравнением

VOLOKITIN, E.P., CHERESIZ, V.M., THE QUALITATIVE ANALYSIS OF THE PLANE POLYNOMIAL DARBOUX SYSTEMS.

© 2016 Волокитин Е.П., Чересиз В.М.

Работа частично поддержана РФФИ (грант 15-01-00745).

Поступила 27 октября 2016 г., опубликована 8 декабря 2016 г.

Дарбу [2]. В настоящей работе мы будем использовать этот термин также для системы (1) и называть её системой типа Дарбу¹.

Системы вида (1) рассматривались различными авторами, см. [4] и процитированную там литературу. В основном в этих работах рассматривались вопросы, связанные с аналитическим и динамическими свойствами систем типа Дарбу (интегрируемость, наличие или отсутствие предельных циклов, локальные и глобальные фазовые портреты и т. д.).

В частности, много работ посвящено исследованию квадратичных систем типа Дарбу, то есть систем, в которых $p_n(x, y)$, $q_n(x, y)$ — однородные многочлены второй степени. Подробности об этих работах и полученных результатах можно найти в [5], [6, с. 219–244].

Наша работа по полученным результатам, методам и приёмам исследования примыкает к [4].

Работа состоит из двух разделов.

В первом разделе мы исследуем общие свойства систем типа Дарбу, такие как существование, количество и типы особых точек, наличие или отсутствие предельных циклов, строение экватора Пуанкаре. Затем мы проводим полное топологическое исследование систем типа Дарбу, предлагая способ построения глобального фазового портрета.

Во втором разделе в качестве примера приложения полученных результатов мы исследуем грубые системы типа Дарбу с кубическими нелинейностями и получаем полный набор их возможных фазовых портретов.

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СИСТЕМАХ ТИПА ДАРБУ

В полярных координатах $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta$ система (1) имеет вид

$$\dot{r} = r + r^n f(\vartheta), \quad r\dot{\vartheta} = r^n g(\vartheta),$$

где

$$\begin{aligned} f(\vartheta) &= \cos \vartheta p_n(\cos \vartheta, \sin \vartheta) + \sin \vartheta q_n(\cos \vartheta, \sin \vartheta), \\ g(\vartheta) &= \cos \vartheta q_n(\cos \vartheta, \sin \vartheta) - \sin \vartheta p_n(\cos \vartheta, \sin \vartheta), \end{aligned}$$

то есть при $r \neq 0$ мы имеем дело с системой

$$(3) \quad \dot{r} = r + r^n f(\vartheta), \quad \dot{\vartheta} = r^{n-1} g(\vartheta),$$

Ввиду однородности функций $f(\vartheta)$, $g(\vartheta)$ имеем $f(\vartheta + \pi) = (-1)^n f(\vartheta)$, $g(\vartheta + \pi) = (-1)^n g(\vartheta)$.

На протяжении всей статьи мы будем рассматривать системы вида (1), для которых выполнены следующие условия:

(А) Уравнение $g(\vartheta) = 0$ имеет только простые корни: $g(\vartheta_i) = 0 \Rightarrow g'(\vartheta_i) \neq 0$.

(В) Многочлены $p_n(x, y)$, $q_n(x, y)$ взаимно просты.

Мы будем называть такие системы грубыми системами типа Дарбу.

Условие (В), в частности, влечёт за собой тот факт, что функции $f(\vartheta)$, $g(\vartheta)$ не обращаются в 0 одновременно. В самом деле, пусть имеет место $f(\vartheta^*) = g(\vartheta^*) = 0$ при некотором $\vartheta^* \neq \pi/2, 3\pi/2$. В таком случае имеем $p_n(\cos \vartheta^*, \sin \vartheta^*) = q_n(\cos \vartheta^*, \sin \vartheta^*) = 0$. Значит, уравнения $p_n(1, t) = 0$, $q_n(1, t) = 0$ имеют общий корень $t = t^* = \tan \vartheta^*$, а это означает, что многочлены $p_n(x, y)$, $q_n(x, y)$

¹В случае, когда M, N — однородные многочлены степени k , а R — однородный многочлен степени m , уравнение (2) иногда называют уравнением Миндинга – Дарбу [3, с. 82].

имеют общий множитель $\mu = y - t^*x$, что противоречит условию (В). Если $\vartheta^* = \pi/2, 3\pi/2$, общим множителем будет $\mu = x$.

Координаты (x_0, y_0) точек покоя системы (1) удовлетворяют равенствам

$$x_0 + p_n(x_0, y_0) = 0, \quad y_0 + q_n(x_0, y_0) = 0.$$

В таком случае точки покоя системы (3) (r_0, ϑ_0) ($x_0 = r_0 \cos \vartheta_0, y_0 = r_0 \sin \vartheta_0$) удовлетворяют системе

$$r_0 + r_0^n f(\vartheta_0) = 0, \quad r_0^{n-1} g(\vartheta_0) = 0.$$

Начало координат $(0, 0)$ всегда является точкой покоя системы (1). Далее, говоря о стационарах, мы, как правило, будем иметь в виду нетривиальные стационары (отличные от $(0, 0)$).

При наличии нетривиальной точки покоя $(x_0, y_0) = (r_0 \cos \vartheta_0, r_0 \sin \vartheta_0)$ имеем

$$(4) \quad 1 + r_0^{n-1} f(\vartheta_0) = 0, \quad g(\vartheta_0) = 0.$$

Матрица линейного приближения в окрестности стационара (r_0, θ_0) с учётом (4) имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} 1 + nr_0^{n-1} f(\vartheta_0) & * \\ (n-1)r_0^{n-2} g(\vartheta_0) & r_0^{n-1} g'(\vartheta_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-n & * \\ 0 & r_0^{n-1} g'(\vartheta_0) \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\det J \neq 0$, особые точки системы (3), а значит, и системы (1) являются простыми.

Система (3) имеет инвариантный луч (частный интеграл) $\vartheta = \vartheta_0, r > 0$, и инвариантный луч (частный интеграл) $\vartheta = \vartheta_0 + \pi, r > 0$, которые вместе образуют инвариантную прямую (частный интеграл) системы (1) $x \cos \vartheta_0 - y \sin \vartheta_0 = 0$.

Таким образом, каждый нетривиальный стационар лежит на подходящей инвариантной прямой; начало координат принадлежит любой инвариантной прямой.

Отсюда, в частности, следует, что состояния равновесия системы (1) не могут быть фокусами или центрами, то есть особые точки системы (1) — узлы или седла.

Признаком существования инвариантной прямой является условие $g(\vartheta_0) = 0$. Напомним, что при этом $f(\vartheta_0) \neq 0$. В том случае, если $f(\vartheta_0) > 0$, на луче $\vartheta = \vartheta_0, r > 0$ нет нетривиальных точек покоя, если $f(\vartheta_0) < 0$, этот луч содержит точку покоя $(r_0, \vartheta_0) = (-1/f(\vartheta_0))^{1/(n-1)}, \vartheta_0$. При нечётном n , имеется также симметричная точка покоя $(r_0, \vartheta_0 + \pi)$.

Значит, при нечётных n инвариантная прямая либо не содержит точек покоя, либо содержит две симметричных точки покоя.

Если же n — чётное, то $f(\vartheta_0) = -f(\vartheta_0 + \pi)$, и любая инвариантная прямая содержит единственную точку покоя.

В любой области, не содержащей инвариантных прямых, траектории системы (1) имеют одно и то же направление вращения.

Теорема 1. *Если уравнение $g(\vartheta) = 0$ имеет вещественные корни на отрезке $[0, 2\pi]$, система (1) не имеет предельных циклов.*

Доказательство. Если условие, теоремы выполнено, система (1) имеет, по крайней мере, одну инвариантную прямую.

Любая замкнутая траектория плоской автономной системы (1) должна содержать внутри себя точку покоя, и в таком случае должна будет пересекаться

с инвариантной прямой, проходящей через эту точку, что невозможно. Отсюда следует, что у системы (1) отсутствуют замкнутые траектории, а значит, у неё нет предельных циклов. \square

Если $g(\vartheta) \neq 0$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$, то у системы (1) заведомо нет точек покоя, отличных от начала координат.

Так как каждая замкнутая траектория плоской автономной системы должна содержать внутри себя точку покоя, заключаем, что при $g(\vartheta) \neq 0$ система (1) не имеет циклов, не содержащих внутри себя начало координат.

Теорема 2. Система (1) имеет единственный устойчивый предельный цикл (огибающий начало координат) тогда и только тогда, когда

$$(5) \quad g(\vartheta) \neq 0, \quad \vartheta \in [0, 2\pi],$$

$$(6) \quad g(0) \int_0^{2\pi} \frac{f(\vartheta)}{g(\vartheta)} d\vartheta < 0.$$

Доказательство. Поскольку $g(\vartheta) \neq 0$ система (3) в области $r > 0$ может быть заменена уравнением

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \frac{f(\vartheta)}{g(\vartheta)} r + \frac{1}{g(\vartheta)} r^{2-n}.$$

Последнее представляет собой уравнение Бернулли и после замены $\varrho = r^{n-1}$ сводится к линейному уравнению

$$(7) \quad \frac{d\varrho}{d\vartheta} = \frac{(n-1)f(\vartheta)}{g(\vartheta)} \varrho + \frac{n-1}{g(\vartheta)}.$$

Уравнение (7) представляет собой линейное уравнение с 2π -периодической правой частью. Ответ на вопрос о существовании у таких уравнений периодических решений даёт следующая теорема.

Теорема 3 ([6, с. 47]). Если в уравнении $\dot{y} = a(t)y + b(t)$ с периодической (периода $T > 0$ по t) правой частью среднее по периоду значение функции $a(t)$ отлично от нуля, то уравнение имеет T -периодическое решение, и притом ровно одно (устойчивое, если среднее значение отрицательно, и неустойчивое, если оно положительно).

Для уравнения (7) указанное среднее за период равно

$$m = \frac{n-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\vartheta)}{g(\vartheta)} d\vartheta.$$

В силу (6) имеем $m \neq 0$, откуда следует, что уравнение (7) имеет единственное 2π -периодическое решение. Это периодическое решение будет порождать предельный цикл системы (1) в том случае, когда $\varrho(\vartheta) > 0$ при всех $\vartheta \in [0, 2\pi]$.

Функция $g(\vartheta)$ сохраняет постоянный знак на всём промежутке $[0, 2\pi]$, который совпадает со знаком величины $g(0)$. Если $m < 0$, $g(\vartheta) > 0$, уравнение (7) имеет устойчивое положительное периодическое решение. Если $m > 0$, $g(\vartheta) < 0$, уравнение (7) имеет неустойчивое положительное периодическое решение. Таким образом, если $mg(0) < 0$, уравнение (7) имеет единственное положительное периодическое решение. Это периодическое решение соответствует предельному циклу. Поскольку найденный цикл содержит внутри себя единственную неустойчивую точку покоя, он является глобально устойчивым.

Направление движения по циклу (по или против часовой стрелки) определяется знаком функции $g(\vartheta)$.

Достаточность доказана. Переходим к доказательству необходимости.

Пусть имеется единственный устойчивый предельный цикл вокруг начала координат. Тогда у системы (1) нет инвариантных прямых, и значит, $g(\vartheta) \neq 0$ для всех $\vartheta \in [0, 2\pi]$.

Покажем, что $m \neq 0$. Обозначим $\lambda = e^m$. Тогда существует постоянная C такая, что для любого решения $\varrho(\vartheta)$ уравнения (7) имеет место следующее равенство: $\varrho(2\pi) = \lambda\varrho(0) + C$, являющееся следствием формулы общего решения неоднородного линейного уравнения (7).

Покажем, что $\lambda \neq 1$. Действительно, если $\lambda = 1$, то при $C \neq 0$ для любого решения $\varrho(\vartheta)$ уравнения (7) $\varrho(2\pi) \neq \varrho(0)$, то есть нет ни одного периодического решения уравнения (7). Это противоречит тому, что уравнение (7) имеет периодическое решение (образ предельного цикла). Если же $C = 0$, то для любого решения уравнения (7) $\varrho(2\pi) = \varrho(0)$, то есть каждое решение — периодическое, что противоречит единственности периодического решения уравнения (7). Таким образом, $\lambda \neq 1$, откуда следует, что $m \neq 0$.

Покажем, что $g(0)$ и m разных знаков. Действительно, пусть $m < 0$ и $g(0) < 0$. Из того, что $m < 0$ следует, что уравнение (7) имеет единственное положительное устойчивое решение, все остальные решения стремятся к нему при $\vartheta \rightarrow +\infty$. Из того, что $g(\vartheta) < 0$, следует что $g'(\vartheta) < 0$ на всей оси ϑ . В таком случае решение $\varrho(\vartheta)$, у которого $\varrho(0) < 0$, будет оставаться отрицательным для всех $\vartheta > 0$ и поэтому не стремится к положительному периодическому решению. Получили противоречие. Значит, при $m < 0$ имеем $g(0) > 0$. Если $m > 0$, то у уравнения (7) есть положительное периодическое решение, к которому должны стремиться все решения уравнения (7) при $\vartheta \rightarrow -\infty$. Если при этом $g(0)$ тоже положительно, то на оси ϑ наклоны положительны, и тогда решения уравнения (7) с $\varrho(0) < 0$ будут оставаться отрицательным при всех $\vartheta < 0$ и значит не стремятся к положительному периодическому решению при $\vartheta \rightarrow -\infty$. Получили противоречие. Значит, при $m > 0$ $g(0) < 0$.

Необходимость доказана. □

Замечание 1. Возможность существования предельного цикла у системы (1) была доказана в [4]. Наше доказательство представляется нам более простым. Кроме того в нашей формулировке теоремы мы сняли излишнее условие о единственности нулевого состояния равновесия, которое имелось в [4]. Наш метод доказательства позволил также доказать необходимость условий (??), (6).

Чтобы изучить поведение траекторий системы (1) в бесконечно удалённой части плоскости (в окрестности экватора Пуанкаре) кроме точек, лежащих на концах оси Oy , сделаем в системе замену переменных (подробнее см. [8, с. 241], [9, 10])

$$x = \frac{1}{z}, \quad y = \frac{u}{z}.$$

Получаем систему

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -uzP\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) + zQ\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) = \frac{P^*(u, z)}{z^k}, \\ \dot{z} &= -z^2P\left(\frac{1}{z}, \frac{u}{z}\right) = \frac{Q^*(u, z)}{z^k},\end{aligned}$$

где k — минимальное неотрицательное число, возможное при таком представлении.

Доопределяем полученную систему для $z = 0$, домножив её правые части на z^k , и рассматриваем систему

$$(8) \quad \dot{u} = P^*(u, z), \quad \dot{z} = Q^*(u, z).$$

Поведение траекторий системы (1) в окрестности экватора Пуанкаре определяется поведением траекторий системы (8) в окрестности оси $z = 0$, которая инвариантна для этой системы.

Исследование поведения траекторий системы (1) в окрестности концов оси Oy проводится аналогичным образом с применением замены

$$x = \frac{v}{z}, \quad y = \frac{1}{z}.$$

В нашем случае система (8) имеет вид

$$(9) \quad \dot{u} = -up_n(1, u) + q_n(1, u), \quad \dot{z} = -z(z^{n-1} + p_n(1, u)).$$

Точки покоя системы (9), лежащие на оси $z = 0$, определяются из уравнения

$$(10) \quad -up_n(1, u) + q_n(1, u) = 0,$$

которое при замене $u = \operatorname{tg} \vartheta$ превращается в уравнение

$$g(\vartheta) = 0.$$

Таким образом, точки покоя являются точками пересечения инвариантных прямых с экватором Пуанкаре.

Обозначим $G(u) = -up_n(1, u) + q_n(1, u)$. Пусть $G(u^*) = 0$, при этом $G'(u^*) \neq 0$ в силу условия (A). В окрестности особой точки $(u^*, 0)$ системы (9) матрица линейного приближения имеет вид

$$(11) \quad J = \begin{pmatrix} G'(u^*) & 0 \\ 0 & -p_n(1, u^*) \end{pmatrix}.$$

Если $p_n(1, u^*) = 0$, то в силу равенства $G(u^*) \equiv -u^*p_n(1, u^*) + q_n(1, u^*) = 0$ получим $q_n(1, u^*) = 0$, а в таком случае $p_n(x, y)$, $q_n(x, y)$ имеют общий множитель $y - u^*x$, что противоречит условию (B). Значит $p_n(1, u^*) \neq 0$. Далее $G'(u^*) \neq 0$ в силу условия (A). Мы заключаем, что бесконечно удалённые точки грубой системы типа Дарбу являются простыми узлами или седлами.

Особые направления этих точек направлены вдоль инвариантных прямых и инвариантного экватора. Направления движения по ним определяются знаками функций $f(\vartheta)$ и $g(\vartheta)$. На рисунке приведены возможные варианты поведения траекторий системы (1) в окрестности инвариантного луча $x = r \cos \vartheta_0$, $y = \sin \vartheta_0$, $r > 0$ для случая, когда ϑ_0 является простым корнем уравнения $g(\vartheta) = 0$.

В работе [11] доказано, что в случае однородной системы степени n

$$(12) \quad \dot{x} = p_n(x, y), \quad \dot{y} = q_n(x, y)$$

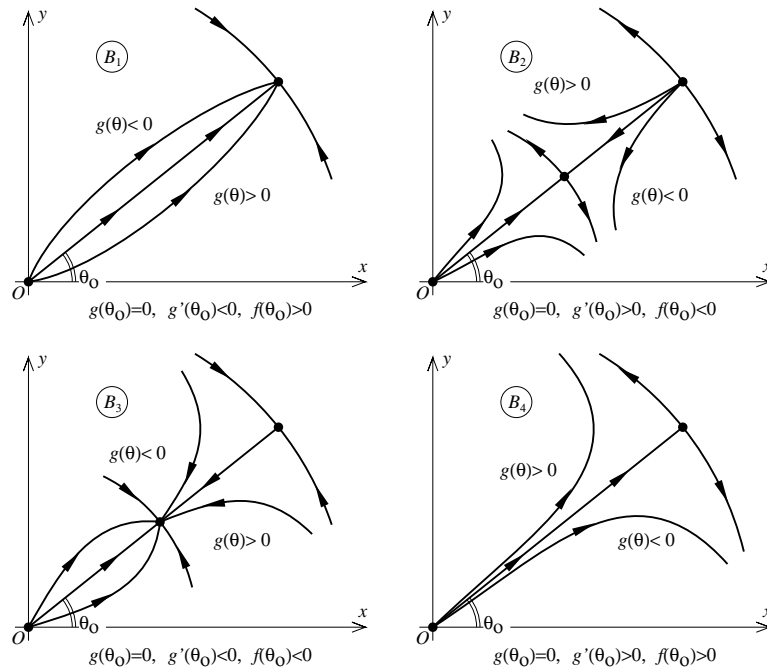


Рис. 1. Траектории системы (1) в окрестности инвариантного луча

имеет место соотношение

$$(13) \quad 2(1 - n) \leq \Sigma_{\infty} \leq 2(n + 1),$$

где Σ_{∞} — сумма индексов особых точек, расположенных на экваторе Пуанкаре.

Из результатов этой же работы следует, что строение экватора Пуанкаре грубой системы (1) совпадает с устройством экватора соответствующей однородной системы (12), и в частности, для грубой системы (1) имеет место оценка (13). В таком случае мы имеем следующее

Предложение 1. *Грубая система типа Дарбу степени n не может иметь на экваторе Пуанкаре $2(n + 1)$ сёдел.*

Доказательство. Система (1) имеет на экваторе не более, чем $2(n + 1)$ особых точек. Если имеется $2(n + 1)$ сёдел, то других особых точек на экваторе нет. В таком случае $\Sigma_{\infty} = -2(n + 1)$, что противоречит неравенству (13). \square

Полученных сведений достаточно, чтобы построить глобальный фазовый портрет системы (1) в грубых случаях.

В случае, когда $g(\vartheta) \neq 0$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$, система имеет единственную точку покоя $(0, 0)$, которая является неустойчивым дикритическим узлом.

Если $tg(0) \geq 0$, то на основании теоремы 2 заключаем, что предельные циклы отсутствуют, и все траектории, отличные от точки покоя $(0, 0)$, будут стремиться к бесконечности, раскручиваясь по спирали в направлении по или против часовой стрелки, если $g(\vartheta) < 0$ или $g(\vartheta) > 0$ соответственно. Экватор Пуанкаре представляет собой бесконечно удалённый устойчивый предельный цикл.

Если выполнены условия теоремы 2, то система имеет устойчивый предельный цикл вокруг начала координат. Экватор Пуанкаре в данном случае будет неустойчивым.

Пусть уравнение $g(\vartheta) = 0$ имеет простые вещественные корни $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_s$. В таком случае каждому корню соответствует инвариантная прямая. В совокупности все инвариантные прямые образуют «каркас» фазового портрета. Глобальный фазовый портрет получается непротиворечивым комбинированием изображённых на рис. 1 блоков B_1 – B_4 . В частности следует иметь в виду, что бесконечные состояния равновесия расположены в точках пересечения экватора Пуанкаре с инвариантными прямыми и представляют собой узлы и седла. В случае нечётного n фазовый портрет системы (1) симметричен относительно начала координат.

Будем различать седла на экваторе в зависимости от того, является или нет экватор устойчивым многообразием рассматриваемого седла, и будем называть такое седло устойчивым или неустойчивым соответственно. В таком случае каждому из возможных блоков B_i однозначно соответствует точка покоя на экваторе соответствующего типа: B_1 — устойчивый узел, B_2 — неустойчивый узел, B_3 — устойчивое седло, B_4 — неустойчивое седло.

Простым перебором можно убедиться в том, что любое заданное сочетание блоков B_i однозначно определяет расположение сепаратрис конечных седел, если таковые имеются.

В итоге мы видим, что конфигурация экватора Пуанкаре единственным образом задаёт расположение и характер особых элементов фазового портрета, которыми будут стационары (конечные и бесконечные) и сепаратрисы седел, т. е. задаёт сепаратрисную конфигурацию системы. Тем самым с точностью до топологической эквивалентности определён фазовый портрет системы (1) [12, 13].

Замечание 2. В [5] было доказано, что строение экватора Пуанкаре однозначно определяет фазовый портрет квадратичной системы типа Дарбу (не обязательно грубой). Аналогичное утверждение было доказано в [4] для однородных систем произвольной степени.

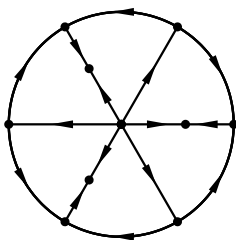


Рис. 2

Замечание 3. Необходимо отметить, что предложенный алгоритм построения фазового портрета даёт лишь в принципе возможные варианты фазовых портретов, которые вообще говоря, не обязаны реализовываться для конкретных подклассов систем типа Дарбу.

Так, например, для чётных n в качестве возможной может быть предложена непротиворечивая схема грубого фазового портрета, приведённая на рис. 2. Однако эта схема не может быть реализована, например, в классе квадратичных систем типа Дарбу. Непреодолимым препятствием для её реализации является классическая теорема Берлинского, которая утверждает, что в случае, когда три точки покоя квадратичной системы образуют треугольник, внутри которого лежит четвёртая точка покоя, то либо вершины треугольника являются седлами, а внутренняя точка покоя — неседлом, то есть узлом, центром или фокусом, либо вершины треугольника — несёдла, а внутреннее состояние равновесия — седло, см. подробнее [5], [6, с. 229]. В случае же схемы на рис. 2 все конечные точки покоя являются узлами.

Отметим, что невозможность построить квадратичную систему типа Дарбу с указанным фазовым портретом, вытекает также из утверждения 1, так как он содержит на экваторе 6 седел, что невозможно.

2. ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ КУБИЧЕСКИХ ГРУБЫХ СИСТЕМ ТИПА ДАРБУ

Рассмотрим систему (1) с кубическими однородными нелинейностями ($n = 3$)

$$(14) \quad \dot{x} = x + p_3(x, y), \quad \dot{y} = y + q_3(x, y).$$

В грубых ситуациях система (14) либо не имеет инвариантных кривых, либо имеет две инвариантные кривые $x \sin \vartheta_i - y \cos \vartheta_i = 0$, $i = 1, 2$, либо четыре инвариантные прямые $x \sin \vartheta_i - y \cos \vartheta_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$. Здесь и далее ϑ_i — корни уравнения $g(\vartheta) = 0$, принадлежащие промежутку $[0, \pi)$ и упорядоченные по возрастанию. При этом без ущерба для общности полагаем $\vartheta_1 = 0$.

В первом случае в системе (14) $g(\vartheta) \neq 0$, и возможен один из двух типов фазовых портретов, содержащий или нет предельный цикл, в зависимости от того, выполнено или нет условие (6).

В соответствии с замечанием 3 мы предъявляем конкретные системы, которые реализуют декларированные возможности, и их фазовые портреты.

Система

$$\dot{x} = x - 5x^3 + 5x^2y + 9xy^2 - 10y^3, \quad \dot{y} = y + 9x^3 - 5x^2y + 3xy^2 + y^3$$

удовлетворяет условиям теоремы 2 и имеет устойчивый предельный цикл, рис. 3.

Для системы

$$\dot{x} = x - x^3 + 4x^2y - 4xy^2 - 7y^3, \quad \dot{y} = y + 10x^3 - 5x^2y + 4xy^2 + 6y^3$$

не выполнено условие (6), поэтому фазовый портрет состоит из единственной точки покоя в начале координат и раскручивающихся от неё к бесконечности траекторий, рис. 3.

Пусть система (14) имеет инвариантные прямые. Напомним, что одну из них мы полагаем совпадающей с осью Ox .

На каждой из инвариантных прямых либо нет конечных нетривиальных стационаров, либо они присутствуют симметричными парами. Каждый из стационаров устойчив относительно начальных данных, лежащих на содержащей его инвариантной прямой. Устойчивость относительно не принадлежащих прямой начальных данных определяется знаком функции $g(\vartheta)$ в окрестности точки ϑ_i , и особая точка может оказаться либо седлом, либо узлом. Если стационары лежат на соседних прямых, они противоположного типа.

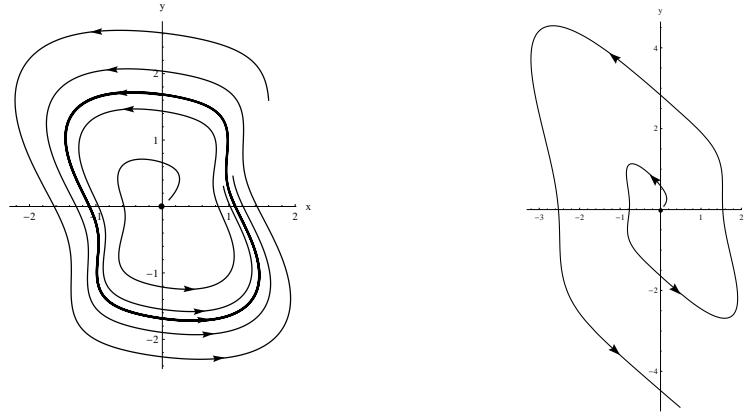


Рис. 3. Фазовые портреты системы (14) в отсутствие инвариантных прямых

Бесконечно удалённые особые точки лежат на экваторе Пуанкаре, и каждая из них будет устойчивым или неустойчивым узлом либо устойчивым или неустойчивым седлом. Мы получаем 4 возможных типа особых точек на экваторе. Сопоставим каждой из них один из символов a, A, b, B : a — устойчивый узел, A — устойчивое седло, b — неустойчивый узел, B — неустойчивое седло. В таком случае экватор Пуанкаре описывается последовательностью из этих букв. В качестве первого члена последовательности поставим букву, отвечающую бесконечно удалённой точке на положительном конце оси Ox , а остальные точки кодируются последовательными элементами последовательности при обходе окружности в направлении против часовой стрелки. Из-за симметричности фазового портрета последовательность состоит из двух идентичных звеньев и тем самым имеет чётную длину. Из соображений непротиворечивости соседние стационары должны иметь различный тип устойчивости относительно начальных данных на экваторе, поэтому соседние члены последовательности должны принадлежать различным классам $\{a, A\}$, $\{b, B\}$.

Пусть система (14) имеет две инвариантные прямые.

Возможны следующие определяющие последовательности:

$$s_1 = \{abab\}, s_2 = \{aBaB\}, s_3 = \{baba\}, s_4 = \{bAbA\},$$

$$s_5 = \{AbAb\}, s_6 = \{ABAB\}, s_7 = \{BaBa\}, s_8 = \{BABA\},$$

совокупность которых мы обозначим через S .

На множестве последовательностей s_i определим два отображения:

$$g_1(\{x_1x_2x_1x_2\}) = \{x_1x_2x_1x_2\}, g_2(\{x_1x_2x_1x_2\}) = \{x_2x_1x_2x_1\}.$$

Пусть \mathbb{G} — подгруппа группы всех биекций множества S , состоящая из двух элементов g_1, g_2 . Отображение g_1 отвечает тождественному преобразованию. Отображение g_2 циклически переставляет члены последовательности.

Подгруппа \mathbb{G} естественным образом действует на множестве S .

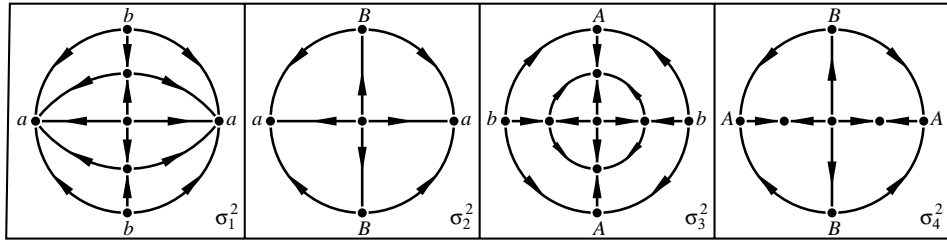


Рис. 4. Схемы фазовых портретов системы (14) с двумя инвариантными прямыми

Последовательности из множества S , совмещаемые друг с другом отображениями из группы \mathbb{G} (лежащие на одной орбите группы \mathbb{G}), задают эквивалентные конфигурации особых точек на экваторе, которые впоследствии определяют топологически эквивалентные фазовые портреты системы (14).

Теорема 4 (Теорема Бернсайда, [14, с. 19]). *Количество орбит $N(\mathbb{G})$ действия группы \mathbb{G} на множестве X равно*

$$(15) \quad N(\mathbb{G}) = \frac{1}{|\mathbb{G}|} \sum_{g \in \mathbb{G}} |X^g|,$$

где X^g — множество неподвижных точек элемента g .

В нашем случае $X = S$, $\mathbb{G} = \{g_1, g_2\}$, $|\mathbb{G}| = 2$. Далее очевидно, что $X^{g_1} = S$, $X^{g_2} = \emptyset$, откуда $|X^{g_1}| = 8$, $|X^{g_2}| = 0$. В таком случае на основе (15) имеем $N(\mathbb{G}) = 4$. Таким образом, множество всех конфигураций экватора, распадается на 4 непересекающихся подмножества (орбиты) $\{s_1, s_3\}$, $\{s_2, s_7\}$, $\{s_4, s_5\}$, $\{s_6, s_8\}$, в качестве представителей которых мы возьмём последовательности

$$\sigma_1^2 = s_1 = \{abab\}, \quad \sigma_2^2 = s_2 = \{aBaB\}, \quad \sigma_3^2 = s_4 = \{bAbA\}, \quad \sigma_4^2 = s_6 = \{ABAB\}.$$

Полное представление о всех различных фазовых портретах грубой кубической системы типа Дарбу в том случае, когда она имеет две инвариантные прямые, дают схемы, приведенные на рис. 4.

Предложенные схемы реализуются следующими системами:

$$\begin{aligned} (\sigma_1^2) \quad \dot{x} &= x + 2x^3, \quad \dot{y} = y - y^3; & (\sigma_2^2) \quad \dot{x} &= x + 2x^3, \quad \dot{y} = y + y^3; \\ (\sigma_3^2) \quad \dot{x} &= x - x^3, \quad \dot{y} = y - 2x^2y - y^3; & (\sigma_4^2) \quad \dot{x} &= x - x^3 - 2xy^2, \quad \dot{y} = y - x^2y + y^3. \end{aligned}$$

Если система (14) имеет 4 инвариантные прямые, её экватор Пуанкаре содержит 8 особых точек, каждая из которых по-прежнему будет устойчивым или неустойчивым узлом, устойчивым или неустойчивым седлом. В данном

случае имеется 32 определяющие последовательности длины 8:

$$\begin{aligned} s_1 &= \{abababab\}, s_2 = \{abaBabaB\}, s_3 = \{abAbabAb\}, s_4 = \{abABabAB\}, \\ s_5 &= \{aBabaBab\}, s_6 = \{aBaBaBaB\}, s_7 = \{aBAbaBAb\}, s_8 = \{aBABAbaB\}, \\ s_9 &= \{babababa\}, s_{10} = \{babAbabA\}, s_{11} = \{baBabaBa\}, s_{12} = \{baBAbaBA\}, \\ s_{13} &= \{bAbabAba\}, s_{14} = \{bAbAbAbA\}, s_{15} = \{bABabABa\}, s_{16} = \{bABAbABA\}, \\ s_{17} &= \{AbabAbab\}, s_{18} = \{AbaBAbab\}, s_{19} = \{AbAbAbAb\}, s_{20} = \{AbABAbAB\}, \\ s_{21} &= \{ABabABab\}, s_{22} = \{ABaBABAba\}, s_{23} = \{ABAbABAb\}, s_{24} = \{ABABABAB\}, \\ s_{25} &= \{BabaBaba\}, s_{26} = \{BabABabA\}, s_{27} = \{BaBaBaBa\}, s_{28} = \{BaBABAba\}, \\ s_{29} &= \{BAbaBaba\}, s_{30} = \{BAbABAbA\}, s_{31} = \{BABAbaBa\}, s_{32} = \{BABABABA\}. \end{aligned}$$

В этом наборе присутствуют, в частности, две последовательности

$$s_{24} = \{ABABABAB\}, s_{32} = \{BABABABA\},$$

определяющие одинаковую структуру экватора. Однако фазовый портрет, отвечающий любой из последовательностей s_{24} , s_{32} , не соответствует никакой системе вида (14), поскольку он содержит 8 седел на экваторе, в то время как для кубической системы это невозможно в силу утверждения 1.

Удалим последовательности s_{24} , s_{32} . Множество из оставшихся 30 последовательностей обозначим через S .

На множестве S определим отображения:

$$\begin{aligned} g_1(\{x_1x_2x_3x_4x_1x_2x_3x_4\}) &= \{x_1x_2x_3x_4x_1x_2x_3x_4\}, \\ g_2(\{x_1x_2x_3x_4x_1x_2x_3x_4\}) &= \{x_2x_3x_4x_1x_2x_3x_4x_1\}, \\ g_3(\{x_1x_2x_3x_4x_1x_2x_3x_4\}) &= \{x_3x_4x_1x_2x_3x_4x_1x_2\} \equiv g_2^2, \\ g_4(\{x_1x_2x_3x_4x_1x_2x_3x_4\}) &= \{x_4x_1x_2x_3x_4x_1x_2x_3\} \equiv g_2^3, \\ g_5(\{x_1x_2x_3x_4x_1x_2x_3x_4\}) &= \{x_2x_1x_4x_3x_2x_1x_4x_3\}, \\ g_6(\{x_1x_2x_3x_4x_1x_2x_3x_4\}) &= \{x_3x_2x_1x_4x_3x_2x_1x_4\} \equiv g_5g_2, \\ g_7(\{x_1x_2x_3x_4x_1x_2x_3x_4\}) &= \{x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_2x_1\} \equiv g_5g_3, \\ g_8(\{x_1x_2x_3x_4x_1x_2x_3x_4\}) &= \{x_1x_4x_3x_2x_1x_4x_3x_2\} \equiv g_5g_4. \end{aligned}$$

Отображения g_1, \dots, g_8 образуют подгруппу \mathbb{G} группы всех биекций множества S .

Отображение g_1 — тождественное. Отображение g_2 представляет собой циклический сдвиг элементов последовательности на одну позицию влево, при этом первый элемент переходит в последний. Наглядно его можно рассматривать как «поворот» экватора вместе с особыми точками на одну позицию в направлении по часовой стрелке. Отображения g_3 , g_4 являются его степенями и осуществляют циклические сдвиги особых точек на экваторе на 2 и на 3 позиции в том же направлении. Отображение g_5 переводит заданную последовательность в последовательность, состоящую из тех же элементов и расположенных в том же порядке при условии, что мы будем двигаться по окружности в направлении по часовой стрелке (это означает, что мы читаем строку справа налево), начав с элемента, в который перешёл первый член первоначальной последовательности (например, последовательность $\{abABabAB\}$, состоящая

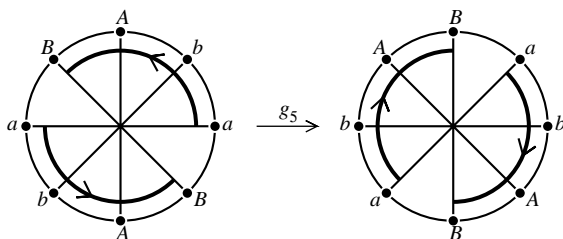


Рис. 5

из двух блоков $(abAB)$, перейдёт в последовательность $\{baVAbA\}$, составленную из двух блоков $(baVA)$, см. рис. 5. Оставшиеся отображения являются суперпозициями отображения g_5 с отображениями g_2, g_3, g_4 .

Очевидно, последовательности из множества S , лежащие на одной орбите подгруппы \mathbb{G} , задают эквивалентные конфигурации особых точек на экваторе, которые определяют топологически эквивалентные фазовые портреты системы (14).

Найдём неподвижные точки отображений $g \in \mathbb{G}$, принадлежащие подмножеству $S' = \{s_i \in S, i = 1, \dots, 8\}$.

Все последовательности, входящие в S' , имеют a своим первым элементом, в таком случае x_2, x_4 принимают значения b или B .

Тождественное отображение g_1 оставляет неизменными все последовательности s_1, \dots, s_8 . Поэтому число неподвижных точек отображения g_1 из множества $S' |X^{g_1}|_{S'} = 8$.

Имеем

$$g_2(\{ax_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8\}) = \{x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8a\}.$$

Как было отмечено выше $x_2 = b$ или $x_2 = B$, то есть $x_2 \neq a$. Значит, $g_2(s_i) \neq s_i$ для всех $s_i \in S'$, то есть g_2 не имеет неподвижных точек в S' . Поэтому $|X^{g_2}|_{S'} = 0$.

Аналогичным образом можно показать, что $|X^{g_4}|_{S'} = |X^{g_5}|_{S'} = |X^{g_7}|_{S'} = 0$.

Отображение g_3 переводит последовательности, составленные из циклов длины 2, в себя (и только их). В множестве S' таких последовательностей 2: $s_1 = \{abababab\}$, $s_6 = \{aBaBaBaB\}$. Значит, $|X^{g_3}|_{S'} = 2$.

Отображение g_6 оставляет в исходной последовательности на месте элементы x_2, x_4 , поэтому его неподвижными точками будут последовательности, в которых совпадают x_1, x_3 , то есть $x_1 = x_3 = a$. Очевидно, таких последовательностей 4:

$$s_1 = \{abababab\}, s_2 = \{abaBabaB\}, s_5 = \{aBabaBab\}, s_6 = \{aBaBaBaB\},$$

и $|X^{g_6}|_{S'} = 4$.

Отображение g_8 оставляет на месте элементы $x_1 = a$ и x_3 , поэтому его неподвижными точками будут последовательности, в которых совпадают x_2, x_4 . Как и в предыдущем случае, таких последовательностей 4:

$$s_1 = \{abababab\}, s_3 = \{abAbabAb\}, s_6 = \{aBaBaBaB\}, s_8 = \{aBABAaB\},$$

и $|X^{g_8}|_{S'} = 4$.

Тот же результат получится, если мы рассмотрим последовательности с любым другим фиксированным первым элементом.

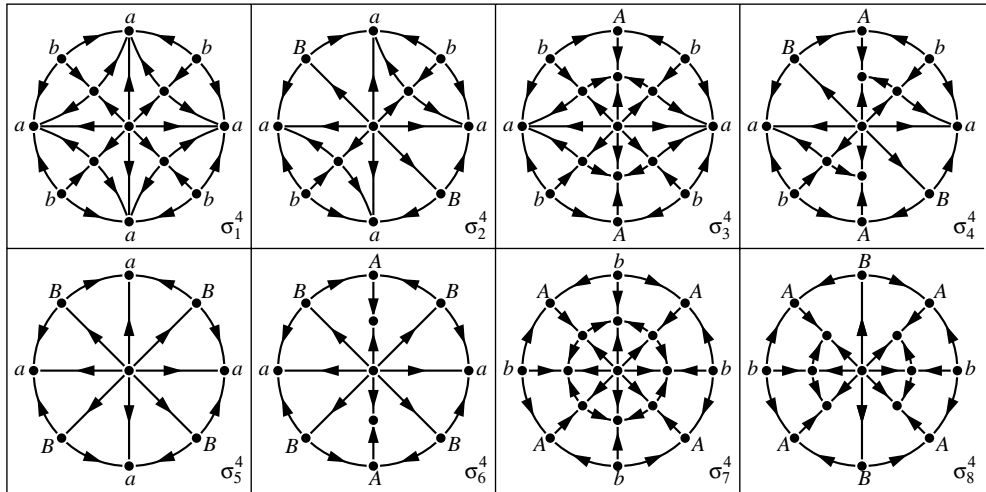


Рис. 6. Схемы фазовых портретов системы (14) с четырьмя инвариантными прямыми

Окончательно имеем

$$|X^{g_1}| = 32, |X^{g_2}| = |X^{g_4}| = |X^{g_5}| = |X^{g_7}| = 0, |X^{g_3}| = 8, |X^{g_6}| = |X^{g_8}| = 16.$$

Поскольку $|\mathbb{G}| = 9$, используя теорему Бернсайда, найдём число орбит $N(\mathbb{G})$ действия группы \mathbb{G} на множестве S : $N(\mathbb{G}) = 8$.

Мы получаем, что множество S разбивается на 8 классов эквивалентности

$$\{s_1, s_9\}, \{s_2, s_5, s_{11}, s_{25}\}, \{s_3, s_{10}, s_{13}, s_{17}\}, \{s_4, s_7, s_{12}, s_{15}, s_{18}, s_{21}, s_{26}, s_{29}\}, \\ \{s_6, s_{27}\}, \{s_8, s_{22}, s_{28}, s_{31}\}, \{s_{14}, s_{19}\}, \{s_{16}, s_{20}, s_{23}, s_{30}\}, \{s_{24}, s_{32}\},$$

в качестве представителей которых могут быть взяты последовательности

$$\sigma_1^4 = s_1 = \{abababab\}, \sigma_2^4 = s_2 = \{abaBabaB\}, \sigma_3^4 = s_3 = \{abAbabAb\}, \\ \sigma_4^4 = s_4 = \{abABabAB\}, \sigma_5^4 = s_6 = \{aBaBaBaB\}, \sigma_6^4 = s_8 = \{aBABAaBABA\}, \\ \sigma_7^4 = s_{14} = \{bAbAbAbA\}, \sigma_8^4 = s_{16} = \{bABAbaBABA\}.$$

На рис. 6 приведены схемы фазовых портретов грубой кубической системы типа Дарбу, в том случае, когда она имеет четыре инвариантные прямые.

Приведённые схемы реализуются следующими системами:

$$(\sigma_1^4) \quad \dot{x} = x + 2x^3 + x^2y - 4xy^2, \quad \dot{y} = y - 3x^2y + xy^2 + y^3; \\ (\sigma_2^4) \quad \dot{x} = x + 2x^3 - 3x^2y, \quad \dot{y} = y + xy^2 - 3xy^2 + y^3; \\ (\sigma_3^4) \quad \dot{x} = x + 2x^3 - 3xy^2, \quad \dot{y} = y + x^2y - 2y^3; \\ (\sigma_4^4) \quad \dot{x} = x + 3x^3 - 2x^2y - 2xy^2, \quad \dot{y} = y + 2x^2y - 2xy^2 - y^3; \\ (\sigma_5^4) \quad \dot{x} = x + 2x^3 - xy^2, \quad \dot{y} = y + y^3; \\ (\sigma_6^4) \quad \dot{x} = x + 3x^3 - 2xy^2, \quad \dot{y} = y + 2x^2y - y^3; \\ (\sigma_7^4) \quad \dot{x} = x - x^3, \quad \dot{y} = y - y^3; \\ (\sigma_8^4) \quad \dot{x} = x - 3x^3 + 2xy^2, \quad \dot{y} = y - 2x^2y + y^3.$$

Из проведённых рассуждений вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 5. *Грубая кубическая система типа Дарбу имеет 14 типов топологически орбитально неэквивалентных фазовых портретов, схемы которых приведены на рис. 3, 4, 6.*

Расположение особых точек на экваторе определяется уравнением (10):

$$(10) \quad G(u) \equiv -up_3(1, u) + q_3(1, u) = 0.$$

Тип этих особых точек определён собственными числами матрицы (11): $\lambda_1 = G'(u_i)$, $\lambda_2 = -p_3(1, u_i)$, где u_i — корень уравнения (10). Таким образом, при желании мы можем получить условия, которые определяют конфигурацию экватора, а значит, и тип фазового портрета системы (14) в терминах условий на её коэффициенты, заданных в виде аналитических выражений.

Выше было сказано, что грубая кубическая система типа Дарбу не может иметь 8 бесконечно удалённых точек, которые все являются седлами. Этот факт вытекает из утверждения 1.

Однако такой фазовый портрет может быть реализован с помощью грубой системы Дарбу более высокой степени.

Пусть в системе (1) многочлены $p_n(x, y)$, $q_n(x, y)$ удовлетворяют условиям Коши–Римана: $p_{nx} = q_{ny}$, $p_{ny} = -q_{nx}$. Такая система с помощью введения комплексной переменной $z = x + iy$ может быть записана в виде

$$(16) \quad \dot{z} = z + \mathcal{P}_n(z),$$

где $\mathcal{P}_n(z)$ — комплексный многочлен степени n : $\mathcal{P}_n(z) = p_n((z + \bar{z})/2, (z - \bar{z})/2i) + iq_n((z + \bar{z})/2, (z - \bar{z})/2i)$.

Теорема 6 ([15]). *Экватор диска Пуанкаре для системы (16) состоит из равномерно распределённых $2(n-1)$ гиперболических седел и соединяющих их двоякоасимптотических траекторий. Сепаратрисы, идущие во внутренность диска, чередуются как входящие и исходящие.*

Из сформулированной теоремы вытекает, что если мы возьмём систему вида (16) с $n = 5$, то её экватор Пуанкаре будет содержать 8 седел.

В качестве примера рассмотрим систему

$$(17) \quad \dot{x} = x - x^5 + 10x^3y^2 - 5x^4y, \quad \dot{y} = y - 5x^4y - 10x^2y^3 - y^5,$$

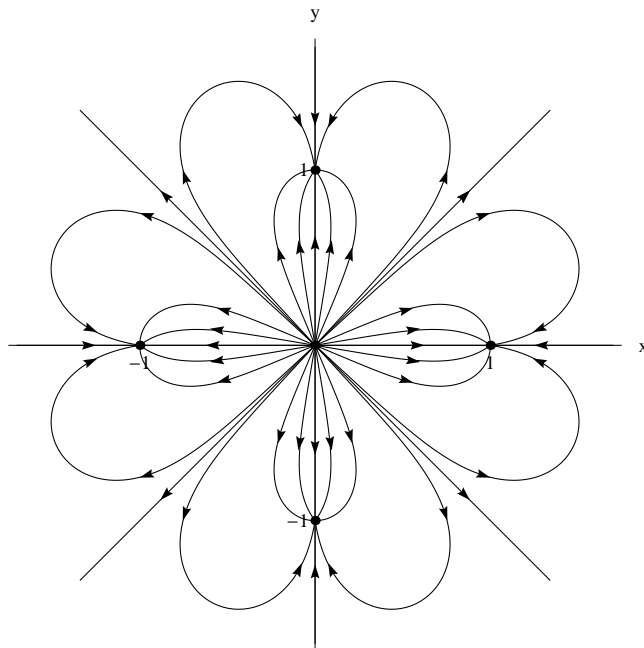
которая получена овеществлением комплексной системы $\dot{z} = z - z^5$.

Точки покоя системы (17) находятся из соотношения $z - z^5 = 0$ и имеют вид $O(0, 0)$, $O_1(1, 0)$, $O_2(0, 1)$, $O_3(-1, 0)$, $O_4(0, -1)$. Начало координат является неустойчивым дикритическим узлом, остальные четыре стационара устойчивые дикритические узлы. Система имеет 4 инвариантные прямые: $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$. Бесконечно удалённые особые точки лежат на пересечении экватора Пуанкаре с инвариантными прямыми. Согласно теореме 6 они являются седлами.

Система (17) имеет рациональный первый интеграл [16]

$$H(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^4 - (x^2 + y^2)^2 + 8x^2y^2}$$

На рис. 7 приведён фазовый портрет системы (17).

Рис. 7. Фазовый портрет системы $\dot{z} = z - z^5$

Рисунки 3, 7 а также необходимые численные и символьные выкладки были выполнены с помощью системы *Mathematica*.

Авторы выражают благодарность В. Н. Потапову за полезные обсуждения.

REFERENCES

- [1] Darboux G., *Mémoire sur les équations différentielles algébrique du premier ordre et du premier degré (Mélanges)*, Bull. Sci. Math. (1878), 60–96, 123–144, 151–200. JFM 10.0214.01
- [2] Rozov N. Kh., *Darbu uravneniye*, V kn.: Matematicheskaya entsiklopediya. T. 2. M.: Sovetskaya entsiklopediya, 1979. (Russian)
- [3] Boyarchuk A. K., Golovach G. P., *Spravochnoye posobiye po vysshey matematike*, T. 5. Ch. 1. Izd. 5-e. M.: KomKniga, 2006. (Russian).
- [4] Bendjeddou A., Llibre J., Salhi T., *Dynamics of the polynomial differential systems with ogeneous nonlinearities and a star node*, J. Diff. Equ., **254**:8 (2013), 3530–3537. MR 3020886
- [5] Berlinskii, *A qualitative investigation of the differential equation $dy/dx = (y + a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2)/(x + b_0x^2 + b_1xy + b_2y^2)$* , Differencial'nye Uravneuija, **2** (1966), 353–360. MR 0197850
- [6] Yan Qian Ye, et al., *Theory of Limit Cycles*, Trans. Math. Monogr. **66**, Amer. Math. Soc., 1986. MR 0854278
- [7] Arnol'd V/ I/, *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya*, [Ordinary differential equations], Third edition. M.: Nauka, 1984. (Russian)
- [8] Andronov A. A., et al., *Kachesnvennaya teoriya dinamicheskikh sistem vtorogo poryadka*, [Qualitative theory of dinamic sysyems of the second order], M.: Nauka, 1966. MR 0199506 (Russian)
- [9] Enrique A. González Velasco, *Generic propeties of polynomial vector fields at infinity*, Trans. Amer. Math. Soc., **143** (1969), 201–222. MR 0252788
- [10] Azamov A., Suvanov Sh., Tilavov A., *Studing of behavior at infinity of vector fields on Poincaré's sphere*, Qual. Theory Dyn. Sys., **15**:1 (2016), 211–220. DOI 10.1007/s12346-015-0176-6. Zbl 1343.34076

- [11] Cima A., Llibre J., *Algebraic and topological classification of the homogeneous cubic vector fields in the plane*, J. Math. Anal. Appl., **147**:2 (1990), 420–448. MR 1050216
- [12] Markus L., *Global structure of ordinary differential equations in the plane*, Trans. Amer. Math. Soc., **76** (1954), 127–148. MR0060657
- [13] Neumann D. A., *Classification of continuous flows on 2-manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc., **48**:1 (1975), 73–81. MR0356138
- [14] Bogopolsky O. V., *Vvedeniye v teoriyu grupp* [An introduction to the theory of groups]. Izhevsk.: Institut kompyuternykh issledovany, 2002. (Russian)
- [15] Volokitin E. P., Cheresiz V. M., *Osobyie tochki i pervye integraly golomorfnykh dinamicheskikh sistem*, Vestnik NGU. Ser.: Matematika, mekhanika, informatika, **13**:2 (2013), 21–37. Engl. transl.: Volokitin E. P., Cheresiz V. M. Singular points and first integrals of holomorphic systems J. Math. Sci. (N. Y.), **203**:4 (2014), 605–620. (Russian) MR 3279924
- [16] Volokitin Evgenii P., *Algebraic first integrals of the polynomial systems satisfying the Cauchy–Riemann conditions*, Qual. Theory Dyn. Sys., **15**:2 (2016), 575–596. MR 3563437

VOLOKITIN EVGENII PAVLOVICH
 SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS
 4 ACAD. KOPTYUG AVENUE
 630090 NOVOSIBIRSK RUSSIA
 NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY
 2 PIROGOVA STR.
 630090 NOVOSIBIRCK RUSSIA
E-mail address: volok@math.nsc.ru

CHERESIZ VLADIMIR MIKHAIĬLOVICH
 SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS
 4 ACAD. KOPTYUG AVENUE
 630090 NOVOSIBIRCK RUSSIA
E-mail address: vladimir.cheresiz@gmail.com