S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 1187–1206 (2016) УДК 517.954
DOI 10.17377/semi.2016.13.093 MSC 35M99

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Ю.А. КОШЕЛЕВА

Abstract. The work is devoted to studying the solvability of nonlinear inverse problems finding together with the decision of an unknown factor.

Keywords: ultraparabolic equations, inverse problems, regular solutions, a priori estimates, existence, uniqueness.

Работа посвящена исследованию разрешимости нелинейных обратных задач нахождения вместе с решением неизвестного коэффициента при решении в самом уравнении. Следует отметить, что подобные обратные задачи хорошо изучены для параболических уравнений — см., например, монографии [1-5] и имеющуюся в них библиографию. В то же время нелинейные обратные задачи для ультрапараболических уравнений ранее не изучались (линейные обратные задачи для данного типа уравнений ранее изучались автором в работах [6,7]).

Пусть Ω есть ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты — бесконечно дифференцируемой) границей Γ, t есть число из интервала $(0,T)$, $0 < T < +\infty$, a есть число из интервала $(0,A)$, $0 < A < +\infty$, Q есть цилиндр $\Omega \times (0,T) \times (0,A)$. Далее, пусть $f(x,t,a)$, $N(x,t,a)$, $u_0(x,a)$, $v_0(x,t)$, $\psi(x,t,a)$ суть заданные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$, $a \in [0,A]$ функции.

Обратная задача I: *Найти функции $u(x,t,a)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением*

$$Lu \equiv u_t + u_a - \Delta u + q(t)u = f(x,t,a) \tag{1}$$

(Δ — *оператор Лапласа по переменным $x_1, x_2, \dots, x_n$), при выполнении для функции $u(x,t,a)$ условий*

$$u(x,0,a) = u_0(x,a), \quad x \in \Omega, \quad a \in (0,A), \tag{2}$$

Kosheleva, Yu.A. On the solvability of the nonlinear inverse problems for ultraparabolic equations.

Поступила 18 апреля 2016 г., опубликована 10 декабря 2016 г.

$$u(x,t,0) = v_0(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,T), \tag{3}$$

$$u(x,t,a)|_{x\in\Gamma,\, t\in(0,T)\; a\in(0,A)} = \psi(x,t,a), \tag{4}$$

а также условия

$$\int_0^A \int_\Omega N(x,t,a)u(x,t,a)\,dx\,da = \mu(t), \quad x \in \Omega, \quad a \in (0,A). \tag{5}$$

Обратная задача II: *Найти функции $u(x,t,a)$ и $q(t)$, связанные в цилиндре Q уравнением* (1) *при выполнении для функции $u(x,t,a)$ условий* (2), (3) *и* (5), *а также условия*

$$\left.\frac{\partial u(x,t,a)}{\partial \nu}\right|_{x\in\Gamma,\, t\in(0,T)\; a\in(0,A)} = \psi(x,t,a)$$

$\Big(\frac{\partial u(x,t,a)}{\partial \nu} = \sum\limits_{i=1}^n u_{x_i}(x,t,a)\nu_i$, ν_i *— компоненты вектора внутренней нормали к Γ в текущей точке x*$\Big)$.

В обратных задачах I и II условия (2)–(4) есть условия обычной первой или соответственно второй начально-краевых задач для ультрапараболических уравнений, условие же (5) есть условие интегрального переопределения.

Обозначим через D область $\Omega \times (0,T)$, через G область $\Omega \times (0,A)$. Далее, введем обозначения:

$$f_1(t) = \int_G N(x,t,a)f(x,t,a)\,dx\,da, \quad \Phi(t,u) = \int_G N_t(x,t,a)u(x,t,a)\,dx\,da$$

$$- \int_G N(x,t,a)u_a(x,t,a)\,dx\,da + \int_G N(x,t,a)\Delta u(x,t,a)\,dx\,da,$$

$$c_1(t) = \frac{f_1(t) - \mu'(t)}{\mu(t)},$$

$$N_1 = \sum_{i=1}^n \int_G u_{0x_i}^2(x,a)\,dx\,da + \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_\Omega v_{0x_i}^2(x,t)\,dx\,dt + \int_Q f^2(x,t,a)\,dx\,dt\,da,$$

$$N_2 = \int_G (\Delta u_0(x,a))^2\,dx\,da + \int_0^T \int_\Omega (\Delta v_0(x,\tau))^2\,dx\,d\tau + \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_G f_{x_i}^2\,dx\,d\tau\,da,$$

$$N_3 = N_1 + N_2 + \int_0^A \int_\Omega u_{0a}^2(x,a)\,dx\,da, \quad N_4 = \max_{0\le t\le T}\left(\int_G N^2(x,t,a)\,dx\,da\right),$$

$$N_5 = \max_{0\le t\le T}\left(\int_G N_t^2(x,t,a)\,dx\,da\right).$$

Проведем некоторые формальные (пока) построения. Пусть выполняются условия

$$|\mu(t)| \ge \mu_0 > 0 \quad \text{при} \quad t \in [0,T], \tag{7}$$

$$c_1(t) \ge k_0 > 0 \quad \text{при} \quad t \in [0,T]. \tag{8}$$

Умножим уравнение (1) на $N(x,t,a)$ и проинтегрируем по области G. Получим

$$\int\limits_G N(x,t,a)u_t(x,t,a)\,dx\,da + \int\limits_G N(x,t,a)u_a(x,t,a)\,dx\,da$$

$$- \int\limits_G N(x,t,a)\Delta u(x,t,a)\,dx\,da + \int\limits_G N(x,t,a)q(t)u(x,t,a)\,dx\,da$$

$$= \int\limits_G N(x,t,a)f(x,t,a)\,dx\,da.$$

Отсюда

$$\mu'(t) - \Phi(t,u) + q(t)\mu(t) = f_1(t).$$

Выразим функцию $q(t)$:

$$q(t) = \frac{1}{\mu(t)}(f_1(t) - \mu'(t) + \Phi(t,u)).$$

Подставим полученное представление в уравнение (1):

$$u_t + u_a - \Delta u + \left[c_1(t) + \frac{1}{\mu(t)}\Phi(t,u)\right]u(x,t,a) = f(x,t,a).$$

Пусть R_0 есть число из промежутка $(0, k_0\mu_0]$. Определим срезывающую функцию $W(\varsigma)$:

$$W(\varsigma) = \begin{cases} \varsigma & \textit{при} \quad |\varsigma| \le R_0, \\ R_0 & \textit{при} \quad \varsigma \ge R_0, \\ -R_0 & \textit{при} \quad \varsigma \le -R_0. \end{cases}$$

Положим

$$\widetilde{q}(t) = c_1(t) + \frac{1}{\mu(t)}W(\Phi(t,u)).$$

Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x,t,a)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$u_t + u_a - \Delta u + c_1(t)u + \frac{1}{\mu(t)}W(\Phi(t,u))u = f(x,t,a) \tag{9}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2)–(4). Разрешимость этой задачи будет установлена с помощью метода регуляризации. Пусть ε есть число из интервала $(0, \varepsilon_0)$ (число ε_0 — произвольное фиксированное). Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x,t,a)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$u_t + u_a - \Delta u + c_1(t)u + \frac{1}{\mu(t)}W(\Phi(t,u))u - \varepsilon u_{aa} + \varepsilon\Delta^2 u = f(x,t,a) \tag{9_ε}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2)-(4), а также условия

$$u_a(x,t,A) = 0 \quad \textit{при} \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,T), \tag{10}$$

$$\Delta u(x,t,a)|_{x\in\Gamma,\, t\in(0,T),\, a\in(0,A)} = 0. \tag{11}$$

Обозначим через V_1 множество функций

$$V_1 = \{v(x,t,a) : \int\limits_Q \{v^2(x,t,a) + v_t^2(x,t,a) + v_a^2(x,t,a) + v_{aa}^2(x,t,a)$$

$$+\sum_{i=1}^{n} v_{x_i}^2(x,t,a) + (\Delta v(x,t,a))^2 + \sum_{i=1}^{n} (\Delta v_{x_i}(x,t,a))^2 +$$
$$+(\Delta^2 v(x,t,a))^2\}\, dx\, dt\, da < +\infty\}.$$

Лемма 1. *Пусть выполняются условия* (7), (8). *Далее, пусть также выполняются условия* $u_0(x,a) \in L_2(G)$, $\Delta u_0(x,a) \in L_2(G)$, $u_{0a}(x,a) \in L_2(G)$, $v_0(x,t) \in L_2(D)$, $\Delta v_0(x,t) \in L_2(D)$, $v_{0t}(x,t) \in L_2(D)$, $\Delta^2 v_0(x,t) \in L_2(D)$, $f(x,t,a) \in L_2(Q)$, $f_a(x,t,a) \in L_2(Q)$, $\mu(t) \in C^1([0,T])$, $f_{x_i}(x,t,a) \in L_2(Q)$, $i = 1,\ldots,n$, $N(x,t,a) \in C(\overline{Q})$, $N_t(x,t,a) \in C(\overline{Q})$, $\psi(x,t,a) \equiv 0$ *при* $x \in \Gamma$, $t \in (0,T)$, $a \in (0,A)$, $f(x,t,a) \equiv 0$ *при* $x \in \Gamma$, $t \in (0,T)$, $a \in (0,A)$, $\Delta v_0(x,t) \equiv 0$ *при* $x \in \Gamma$, $t \in (0,T)$. *Тогда существует постоянная* M_0, *определяющаяся функциями* $f(x,t,a)$, $N(x,t,a)$, $u_0(x,a)$, $v_0(x,t)$, *областью* Ω, *а также числами* T *и* A, *такая, что для решений* $u(x,t,a)$ *задачи* (9_ε), (2)–(4), (10), (11) *из пространства* V_1 *при всех* t *из отрезка* $[0,T]$ *будет справедлива оценка*

$$\int_G (u^2(x,t,a) + u_a^2(x,t,a) + (\Delta u(x,t,a))^2)\, dx\, da \le M_0. \tag{12}$$

Доказательство. Рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_G (u_\tau + u_a - \Delta u + \widetilde{q}(\tau)u - \varepsilon u_{aa} + \varepsilon \Delta^2 u)(-\Delta u)\, dx\, d\tau\, da = \int_0^t \int_G f(-\Delta u)\, dx\, d\tau\, da.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_G u_{x_i}^2\, dx\, da + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_\Omega u_{x_i}^2(x,\tau,A)\, dx\, d\tau + \int_0^t\int_G (\Delta u)^2\, dx\, d\tau\, da$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \widetilde{q}(\tau)\int_G u_{x_i}^2\, dx\, d\tau\, da + \varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_G u_{x_ia}^2\, dx\, d\tau\, da$$
$$+\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_G (\Delta u_{x_i})^2\, dx\, d\tau\, da = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_G u_{0x_i}^2\, dx\, da + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_\Omega v_{0x_i}^2\, dx\, d\tau$$
$$+\varepsilon\int_0^t\int_\Omega \Delta v_0 u_a(x,\tau,0)\, dx\, d\tau - \int_0^t\int_G f\Delta u\, dx\, d\tau\, da.$$

Применяя неравенство Юнга и учитывая неотрицательность функции $c_1(t) + \frac{1}{\mu(t)}W(\Phi(t,u))$, получаем неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}\int_G u_{x_i}^2\, dx\, da + \sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_\Omega u_{x_i}^2(x,\tau,A)\, dx\, d\tau + \int_0^t\int_G (\Delta u)^2\, dx\, d\tau\, da$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \widetilde{q}(\tau)\int_G u_{x_i}^2\, dx\, d\tau\, da + \varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_G u_{x_ia}^2\, dx\, d\tau\, da$$

$$+\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_G(\Delta u_{x_i})^2\,dx\,d\tau\,da\le N_1+2\varepsilon_0\left|\int_0^t\int_\Omega \Delta v_0 u_a(x,\tau,0)\,dx\,d\tau\right|. \tag{13}$$

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$\int_0^t\int_G(u_\tau+u_a-\Delta u+\widetilde{q}(\tau)u-\varepsilon u_{aa}+\varepsilon\Delta^2u)\Delta^2u\,dx\,d\tau\,da=\int_0^t\int_G f\Delta^2u\,dx\,d\tau\,da.$$

Это равенство интегрированием по частям приводится к виду

$$\frac{1}{2}\int_G(\Delta u(x,t,a))^2\,dx\,da+\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega(\Delta u(x,\tau,A))^2\,dx\,d\tau$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_G(\Delta u_{x_i})^2\,dx\,d\tau\,da+\int_0^t\widetilde{q}(\tau)\int_G(\Delta u)^2\,dx\,d\tau\,da$$

$$+\varepsilon\int_0^t\int_G(\Delta u_a)^2\,dx\,d\tau\,da+\varepsilon\int_0^t\int_G(\Delta^2u)^2\,dx\,d\tau\,da=\frac{1}{2}\int_G(\Delta u_0)^2\,dx\,da$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega(\Delta v_0)^2\,dx\,d\tau-\int_0^t\int_G f_{x_i}\Delta u_{x_i}\,dx\,d\tau\,da-\varepsilon\int_0^t\int_\Omega u_a(x,\tau,0)\Delta^2v_0\,dx\,d\tau.$$

Из последнего равенства нетрудно получить неравенство

$$\int_G(\Delta u(x,t,a))^2\,dx\,da+\int_0^t\int_\Omega(\Delta u(x,\tau,A))^2\,dx\,d\tau$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_G(\Delta u_{x_i})^2\,dx\,d\tau\,da+2\int_0^t\widetilde{q}(\tau)\int_G(\Delta u)^2\,dx\,d\tau\,da$$

$$+2\varepsilon\int_0^t\int_G(\Delta u_a)^2\,dx\,d\tau\,da+2\varepsilon\int_0^t\int_G(\Delta^2u)^2\,dx\,d\tau\,da$$

$$\le N_2+2\varepsilon_0\left|\int_0^t\int_\Omega u_a(x,\tau,0)\Delta^2v_0\,dx\,d\tau\right|. \tag{14}$$

Рассмотрим следующее равенство

$$\int_0^t\int_G(u_\tau+u_a-\Delta u+\widetilde{q}(\tau)u-\varepsilon u_{aa}+\varepsilon\Delta^2u)(-u_{aa})\,dx\,d\tau\,da=\int_0^t\int_G f(-u_{aa})\,dx\,d\tau\,da.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\frac{1}{2}\int_G u_a^2(x,t,a)\,dx\,da+\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega u_a^2(x,\tau,0)\,dx\,d\tau+\sum_{i=1}^{n}\int_0^t\int_G u_{x_ia}^2\,dx\,d\tau\,da$$

$$+\int\limits_0^t \widetilde{q}(\tau)\int\limits_G u_a^2\,dx\,d\tau\,da+\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_G u_{aa}^2\,dx\,d\tau\,da+\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_G(\Delta u_a)^2\,dx\,d\tau\,da$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_G u_{0a}^2\,dx\,da+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega v_{0\tau}u_a(x,\tau,0)\,dx\,d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega \Delta v_0 u_a(x,\tau,0)\,dx\,d\tau$$

$$+\int\limits_0^t \widetilde{q}(\tau)\int\limits_\Omega v_0 u_a(x,\tau,0)\,dx\,d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_G f_a u_a\,dx\,d\tau\,da$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_\Omega f(x,\tau,0)u_a(x,\tau,0)\,dx\,d\tau-\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_a(x,\tau,0)\Delta^2 v_0\,dx\,d\tau.$$

Следствием данного равенства является неравенство

$$\int\limits_0^A\int\limits_\Omega u_a^2(x,t,a)\,dx\,da+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_a^2(x,\tau,0)\,dx\,d\tau+2\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_G u_{x_ia}^2\,dx\,d\tau\,da$$

$$+2\int\limits_0^t \widetilde{q}(\tau)\int\limits_G u_a^2\,dx\,d\tau\,da+\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_G u_{aa}^2\,dx\,d\tau\,da+\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_G(\Delta u_a)^2\,dx\,d\tau\,da$$

$$\le\int\limits_0^A\int\limits_\Omega u_{0a}^2\,dx\,da+2\left|\int\limits_0^t\int\limits_G f_a u_a\,dx\,d\tau\,da\right|+2\left|\int\limits_0^t\int\limits_\Omega f(x,\tau,0)u_a(x,\tau,0)\,dx\,d\tau\right|$$

$$+2\left|\int\limits_0^t\int\limits_\Omega v_{0\tau}u_a(x,\tau,0)\,dx\,d\tau\right|+2\left|\int\limits_0^t\int\limits_\Omega \Delta v_0 u_a(x,\tau,0)\,dx\,d\tau\right|$$

$$+2\left|\int\limits_0^t \widetilde{q}(\tau)\int\limits_\Omega v_0 u_a(x,\tau,0)\,dx\,d\tau\right|+2\varepsilon_0\left|\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_a(x,\tau,0)\Delta^2 v_0\,dx\,d\tau\right|. \qquad (15)$$

Сложим (13), (14) и (15). Получим неравенство

$$\sum_{i=1}^n\int\limits_G u_{x_i}^2\,dx\,da+\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{x_i}^2(x,\tau,A)\,dx\,d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_G(\Delta u)^2\,dx\,d\tau\,da$$

$$+\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t \widetilde{q}(\tau)\int\limits_G u_{x_i}^2\,dx\,d\tau\,da+2\int\limits_0^t \widetilde{q}(\tau)\int\limits_G u_a^2\,dx\,d\tau\,da$$

$$+(2+\varepsilon)\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_G u_{x_ia}^2\,dx\,d\tau\,da+(1+\varepsilon)\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_G(\Delta u_{x_i})^2\,dx\,d\tau\,da$$

$$+\int\limits_G(\Delta u(x,t,a))^2\,dx\,da+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega(\Delta u(x,\tau,A))^2\,dx\,d\tau+\int\limits_G u_a^2(x,t,a)\,dx\,da$$

$$+\int_0^t\int_\Omega u_a^2(x,\tau,0)\,dx\,d\tau+\varepsilon\int_0^t\int_G u_{aa}^2\,dx\,d\tau\,da+\varepsilon\int_0^t\int_G(\Delta u_a)^2\,dx\,d\tau\,da$$

$$\le N_1+N_2+(2+2\varepsilon_0)\left|\int_0^t\int_\Omega \Delta v_0 u_a(x,\tau,0)\,dx\,d\tau\right|$$

$$+4\varepsilon_0\left|\int_0^t\int_\Omega u_a(x,\tau,0)\Delta^2 v_0\,dx\,d\tau\right|+\int_0^A\int_\Omega u_{0a}^2\,dx\,da+2\left|\int_0^t\int_G f_a u_a\,dx\,d\tau\,da\right|$$

$$+2\left|\int_0^t\int_\Omega f(x,\tau,0)u_a(x,\tau,0)\,dx\,d\tau\right|+2\left|\int_0^t\int_\Omega v_{0\tau}u_a(x,\tau,0)\,dx\,d\tau\right|$$

$$+2\left|\int_0^t\widetilde{q}(\tau)\int_\Omega v_0 u_a(x,\tau,0)\,dx\,d\tau\right|.$$

Используя неравенства Гельдера и Юнга, мы можем перейти от последнего неравенства к следующему

$$\sum_{i=1}^n\int_G u_{x_i}^2(x,t,a)\,dx\,da+\int_G u_a^2(x,t,a)\,dx\,da+\int_G(\Delta u(x,t,a))^2\,dx\,da$$

$$+\sum_{i=1}^n\int_0^t\int_\Omega u_{x_i}^2(x,\tau,A)\,dx\,d\tau+\int_0^t\int_G(\Delta u)^2\,dx\,d\tau\,da$$

$$+\sum_{i=1}^n\int_0^t\widetilde{q}(\tau)\int_G u_{x_i}^2\,dx\,d\tau\,da+(2+\varepsilon)\sum_{i=1}^n\int_0^t\int_G u_{x_ia}^2\,dx\,d\tau\,da$$

$$+\left(\frac{1}{2}-5\delta_0^2\right)\int_\Omega u_a^2(x,\tau,0)\,dx\,d\tau+\varepsilon\int_0^t\int_G u_{aa}^2\,dx\,d\tau\,da$$

$$+\varepsilon\int_0^t\int_G(\Delta u_a)^2\,dx\,d\tau\,da+2\int_0^t\widetilde{q}(\tau)\int_G u_a^2\,dx\,d\tau\,da$$

$$+(1+\varepsilon)\sum_{i=1}^n\int_0^t\int_G(\Delta u_{x_i})^2\,dx\,d\tau\,da+\int_0^t\int_\Omega(\Delta u(x,\tau,A))^2\,dx\,d\tau$$

$$\le N_3+\delta_1^2\int_0^t\int_G u_a^2\,dx\,d\tau\,da+\frac{1}{\delta_0^2}\int_0^T\int_\Omega v_{0\tau}^2\,dx\,d\tau+\frac{1}{\delta_0^2}\int_0^T\int_\Omega f^2(x,\tau,0)\,dx\,d\tau$$

$$+\frac{1}{\delta_1^2}\int_0^T\int_G f_a^2\,dx\,dt\,da+\frac{2\varepsilon_0^2}{\delta_0^2}\int_0^T\int_\Omega(\Delta^2 v_0(x,t))^2\,dx\,dt$$

$$+\frac{(1+\varepsilon_0)^2}{\delta_0^2}\int_0^T\int_\Omega(\Delta v_0)^2\,dx\,dt+2\int_0^t\widetilde{q}^2(\tau)\int_\Omega v_0^2\,dx\,d\tau;\qquad(16)$$

числа δ_0 и δ_1 здесь есть произвольные положительные числа. Имеют место неравенства

$$\widetilde{q}^2(\tau) \leq (1+\delta^2)W^2(\Phi(\tau,u)) + \left(1+\frac{1}{\delta^2}\right)c_1^2(\tau) \leq (1+\delta^2)\Phi^2(\tau,u)$$

$$+\left(1+\frac{1}{\delta^2}\right)c_1^2(\tau) \leq 3(1+\delta^2)\left[N_4\int\limits_G u_a^2(x,\tau,a)\,dx\,da\right.$$

$$\left.+N_5\int\limits_G u^2(x,\tau,a)\,dx\,da + N_4\int\limits_G (\Delta u(x,\tau,a))^2\,dx\,da\right] + \left(1+\frac{1}{\delta^2}\right)c_1^2(\tau). \qquad (17)$$

Зафиксируем δ_0 так, чтобы выполнялось неравенство $\frac{1}{2}-5\delta_0^2>0$. Далее, зафиксируем δ_1 и δ произвольным образом. Положим

$$z(t) = \sum_{i=1}^n \int\limits_G u_{x_i}^2(x,t,a)\,dx\,da + \int\limits_G u_a^2(x,t,a)\,dx\,da + \int\limits_G (\Delta u(x,t,a))^2\,dx\,da.$$

Используя известную оценку

$$\int\limits_\Omega u^2(x,\tau,a)\,dx \leq m_0\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega u_{x_i}^2(x,\tau,a)\,dx \qquad (18)$$

(постоянная m_0 здесь определяется лишь областью Ω) и указанный выше выбор чисел δ, δ_0 и δ_1, нетрудно из (16)–(18) получить неравенство

$$z(t) \leq M_1\int\limits_0^t z(\tau)\,d\tau + M_2,$$

в котором числа M_1 и M_2 определяются функциями $f(x,t,a)$, $N(x,t,a)$, $u_0(x,a)$, $v_0(x,t)$, областью Ω, а также числами T и A.

Из этого неравенства, леммы Гронуолла и вновь из неравенства (18) следует требуемая оценка. □

Положим $N_0 = M_0^{\frac{1}{2}}(N_5^{\frac{1}{2}} + 2N_4^{\frac{1}{2}})$.

Лемма 2. *Пусть выполняются все условия леммы* 1. *Тогда для решений* $u(x,t,a)$ *задачи* (9_ε), $(2)-(4),(10),(11)$ *из пространства* V_1 *при всех* t *из отрезка* $[0,T]$ *будет справедлива оценка*

$$|\Phi(t,u)| \leq N_0. \qquad (19)$$

Доказательство этой леммы очевидно.

Обозначим через V_0 множество функций

$$V_0 = \{v(x,t,a) : \int\limits_Q \{v^2(x,t,a) + v_t^2(x,t,a) + v_a^2(x,t,a) + \sum_{i=1}^n v_{x_i a}^2(x,t,a)$$

$$+(\Delta v(x,t,a))^2 + \sum_{i=1}^n(\Delta v_{x_i}(x,t,a))^2\}\,dx\,dt\,da < +\infty\}.$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия леммы 1, условия согласования*

$$u_0(x,0) = v_0(x,0) \quad \text{при} \quad x \in \Omega,$$
$$u_0(x,a) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \quad a \in (0,A),$$
$$v_0(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \quad t \in (0,T),$$
$$\int\limits_G N(x,0,a)u_0(x,a)\,dx\,da = \mu(0),$$

и также пусть выполняется неравенство

$$N_0 \le k_0\mu_0.$$

Тогда обратная задача I *имеет решение* $(u(x,t,a), q(t))$ *такое, что* $u(x,t,a) \in V_0$*,* $q(t) \in L_\infty([0,T])$*.*

Доказательство. Положим $R_0 = k_0\mu_0$. Краевая задача (9_ε), (2)-(4), (10), (11) при фиксированном ε имеет решение $u^\varepsilon(x,t,a) \in V_1$, это доказывается дословным повторением соответствующих рассуждений из работ [8-10]. Далее, согласно лемме 1, для семейства функций $\{u^\varepsilon(x,t,a)\}$ имеет место априорная оценка

$$\int\limits_0^t \int\limits_G u_\tau^2\,dx\,d\tau\,da + \sum_{i=1}^n \int\limits_G u_{x_i}^2(x,t,a)\,dx\,da + \int\limits_G u_a^2\,dx\,da + \int\limits_G (\Delta u(x,t,a))^2\,dx\,da$$
$$+\sum_{i=1}^n \int\limits_0^t \int\limits_\Omega u_{x_i}^2(x,\tau,A)\,dx\,d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_G (\Delta u)^2\,dx\,d\tau\,da$$
$$+(1+\varepsilon)\sum_{i=1}^n \int\limits_0^t \int\limits_G u_{x_i a}^2\,dx\,d\tau\,da + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega u_a^2(x,\tau,0)\,dx\,d\tau$$
$$+\varepsilon \int\limits_0^t \int\limits_G u_{aa}^2\,dx\,d\tau\,da + \varepsilon \int\limits_0^t \int\limits_G (\Delta u_a)^2\,dx\,d\tau\,da$$
$$+(1+\varepsilon)\sum_{i=1}^n \int\limits_0^t \int\limits_G (\Delta u_{x_i})^2\,dx\,d\tau\,da + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega (\Delta u(x,\tau,A))^2\,dx\,d\tau \le C_0$$

с постоянной C_0, не зависящей от ε и определяющейся функциями $f(x,t,a)$, $N(x,t,a)$, $u_0(x,a)$, $v_0(x,t)$, областью Ω, а также числами T и A.

Из этой оценки и теорем компактности [11,12] следует возможность выбора сходящейся подпоследовательности $\{u^{\varepsilon_m}(x,t,a)\}$ и существование предельной функции $u(x,t,a)$, для которой будут выполняться уравнение (9), а также условия (2)-(4). Для функций $u^\varepsilon(x,t,a)$ и для предельной функции $u(x,t,a)$ имеет место оценка леммы 2. Учитывая условие $N_0 \le k_0\mu_0$, получим, что для предельной функции $u(x,t,a)$ выполняется уравнение

$$u_t + u_a - \Delta u + (c_1(t) + \Phi(t,u))u = f(x,t,a).$$

Положим

$$q(t) = c_1(t) + \Phi(t,u).$$

Очевидно, что функции $u(x,t,a)$ и $q(t)$ принадлежат требуемым в теореме классам, и что они связаны в цилиндре Q уравнением (1) .

Покажем, что для функции $u(x,t,a)$ выполняется условие переопределения (5). Положим

$$\gamma(t) = \int\limits_G N(x,t,a)u(x,t,a)\,dx\,da - \mu(t).$$

Умножим уравнение (1) на функцию $N(x,t,a)$ и проинтегрируем по области G. Учитывая представление функции $q(t)$, получим равенство

$$\gamma'(t) + q(t)\gamma(t) = 0.$$

Умножим это равенство на функцию $\gamma(t)$ и проинтегрируем от 0 до текущей точки. Получим

$$\frac{1}{2}\gamma^2(t) - \frac{1}{2}\gamma^2(0) + \int\limits_0^t q(\tau)\gamma^2(\tau)\,d\tau = 0.$$

Поскольку имеет место равенство $\gamma(0)=0$, и поскольку функция $q(t)$ неотрицательна, то функция $\gamma(t)$ будет нулевой. А это и означает, что для функции $u(x,t,a)$ выполняется условие переопределения (5).

Из всех проведенных выше рассуждений следует, что функции $u(x,t,a)$ и $q(t)$ дают искомое решение обратной задачи I. $\square$

Обратимся теперь к случаю ненулевой функции $\psi(x,t,a)$.

Пусть выполняется условие: существует функция $U(x,t,a)$ такая, что

$$U(x,0,a) = u_0(x,a), \quad x\in\Omega, \quad a\in(0,A),$$
$$U(x,t,0) = v_0(x,t), \quad x\in\Omega, \quad t\in(0,T),$$
$$U(x,t,a)|_{x\in\Gamma,\, t\in(0,T),\, a\in(0,A)} = \psi(x,t,a),$$

и при этом для функции $U(x,t,a)$ имеют место включения

$$\Delta U(x,t,a)\in L_2(Q), \quad U_t(x,t,a)\in L_2(Q), \quad U_a(x,t,a)\in L_2(Q).$$

Заметим, что это условие означает существование продолжения граничных данных внутрь цилиндра Q; искомое продолжение можно построить, например, как решение первой краевой задачи для ультрапараболического уравнения

$$U_t(x,t,a) + U_a(x,t,a) - \Delta U(x,t,a) = 0,$$
$$U(x,0,a) = u_0(x,a), \quad x\in\Omega, \quad a\in(0,A),$$
$$U(x,t,0) = v_0(x,t), \quad x\in\Omega, \quad t\in(0,T),$$
$$U(x,t,a)|_{x\in\Gamma,\, t\in(0,T),\, a\in(0,A)} = \psi(x,t,a).$$

Можно и по иному трактовать данное условие: исходными данными $u_0(x,a)$, $v_0(x,t)$ и $\psi(x,t,a)$ в изучаемой задаче берутся те функции, которые являются сужениями произвольной функции $U(x,t,a)$, принадлежащей, например, пространству $W_2^2(Q)$, на множествах $\{x\in\Omega, t=0, a\in(0,A)\}$, $\{x\in\Omega, t\in(0,T), a=0\}$ и $\{x\in\Gamma, t\in(0,T), a\in(0,A)\}$ соответственно.

Положим

$$w(x,t,a) = u(x,t,a) - U(x,t,a),$$
$$\widetilde{f}(x,t,a) = f(x,t,a) - U_t(x,t,a) - U_a(x,t,a) + \Delta U(x,t,a),$$
$$\mu_1(t) = \mu(t) - \int\limits_G N(x,t,a)U(x,t,a)\,dx\,da.$$

Для функции $w(x,t,a)$ выполняется уравнение

$$w_t + w_a - \Delta w + q(t)(w+U) = \widetilde{f}(x,t,a), \tag{1$'$}$$

выполняются также условия

$$w(x,0,a) = 0, \quad x \in \Omega, \quad a \in (0,A), \tag{2$'$}$$

$$w(x,t,0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,T), \tag{3$'$}$$

$$w(x,t,a)|_{x\in\Gamma,\, t\in(0,T),\, a\in(0,A)} = 0. \tag{4$'$}$$

Условие переопределения (5) перейдет в условие

$$\int\limits_G N(x,t,a)w(x,t,a)\,dx\,da = \mu_1(t). \tag{5$'$}$$

Таким образом, обратная задача I в рассматриваемой ситуации преобразована в обратную задачу (1$'$)–(5$'$) с однородными граничными и краевыми условиями.

Продолжим преобразования. Положим

$$\widetilde{f}_1(t) = \int\limits_G N(x,t,a)\widetilde{f}(x,t,a)\,dx\,da,$$

$$\widetilde{c}_1(t) = \frac{\widetilde{f}_1(t) - \mu'(t)}{\mu(t)}, \quad c_{1,0} = \max_{0\le t\le T} \widetilde{c}_1(t),$$

$$N_{6,i} = \max_{0\le t\le T}\left(\int\limits_\Omega N^2_{x_i}(x,t,a)\,dx\,da\right), \quad i = 1,\dots,n, \quad N_{6,0} = \max_{1\le i\le n} N_{6,i},$$

$$N_7 = \max_{0\le t\le T}\left(\int\limits_{\partial\Omega} N^2(x,t,a)\,ds\,da\right), \quad N_8 = \max_{0\le t\le T}\left(\int\limits_G U^2(x,t,a)\,dx\,da\right),$$

$$N_9 = \max_{0\le t\le T}\left(\int\limits_G U_a^2(x,t,a)\,dx\,da\right), \quad N_{10} = \max_{0\le t\le T}\left(\int\limits_\Omega U^2(x,t,0)\,dx\,dt\right).$$

Умножим уравнение (1$'$) на функцию $N(x,t,a)$ и проинтегрируем по области G. Из полученного равенства вычислим $q(t)$:

$$q(t) = \widetilde{c}_1(t) + \frac{1}{\mu(t)}\Phi(t,w).$$

В рассматриваемой ситуации преобразуем функцию $\Phi(t,w)$:

$$\Phi(t,w) = \int\limits_G N_t(x,t,a)w(x,t,a)\,dx\,da - \int\limits_G N(x,t,a)w_a(x,t,a)\,dx\,da -$$

$$-\sum_{i=1}^n \int\limits_G N_{x_i}(x,t,a)w_{x_i}(x,t,a)\,dx\,da - \sum_{i=1}^n \int\limits_0^A \int\limits_\Gamma N(x,t,a)w_{x_i}(x,t,a)\,ds\,da.$$

Пусть по-прежнему выполняется условие (7), и пусть дополнительно выполняется условие

$$\widetilde{c}_1(t) \ge \widetilde{k}_0 > 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0,T]. \tag{8$'$}$$

Далее, пусть $W(\varsigma)$ есть срезывающая функция, определенная с помощью числа R_1 из интервала $(0, \widetilde{k}_0\mu_0)$ (точное значение числа R_1 укажем ниже). Положим

$$\widetilde{q}(t) = \widetilde{c}_1(t) + \frac{1}{\mu(t)} W(\Phi(t, w)).$$

Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $w(x, t, a)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$w_t + w_a - \Delta w + [\widetilde{c}_1(t) + \frac{1}{\mu(t)} W(\Phi(t, w))](w + U) = \widetilde{f}(x, t, a) \tag{9'}$$

и такую, что для нее выполняются условия $(2')$–$(4')$. Разрешимость этой задачи также будет установлена с помощью метода регуляризации.

Пусть ε есть число из интервала $(0, \varepsilon_0)$ (число ε_0 — произвольное фиксированное). Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $w(x, t, a)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$w_t + w_a - \Delta w + [\widetilde{c}_1(t) + \frac{1}{\mu(t)} W(\Phi(t, w))](w + U) - \varepsilon w_{aa} = \widetilde{f}(x, t, a) \tag{$9'_\varepsilon$}$$

и такую, что для нее выполняются условия $(2')$–$(4')$, а также условие

$$w_a(x, t, A) = 0 \quad \textit{при} \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T). \tag{10'}$$

Определим пространство V_2:

$$V_2 = \{v(x, t, a) : \int\limits_Q \{v^2(x, t, a) + v_t^2(x, t, a) + v_a^2(x, t, a) + v_{aa}^2(x, t, a)$$

$$+ \sum_{i=1}^n v_{x_i a}^2(x, t, a) + (\Delta v(x, t, a))^2\} \, dx \, dt \, da < +\infty\}.$$

Лемма 3. *Пусть выполняются условия* (7), $(8')$. *Тогда существует постоянная M'_0, определяющаяся функциями $f(x, t, a)$, $N(x, t, a)$, $u_0(x, a)$, $v_0(x, t)$, $\psi(x, t, a)$, $\mu(t)$, областью Ω, а также числами T и A такая, что для решений $w(x, t, a)$ задачи $(9'_\varepsilon)$, $(2')$–$(4')$, $(10')$ из пространства V_2 при всех t из отрезка $[0, T]$ будет справедлива оценка*

$$\sum_{i=1}^n \int\limits_G w_{x_i}^2(x, t, a) \, dx \, da + \int\limits_G w_a^2(x, t, a) \, dx \, da + \sum_{i=1}^n \int\limits_0^A \int\limits_\Gamma w_{x_i}^2(x, t, a) \, ds \, da \le M'_0. \tag{11'}$$

Доказательство. Рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^t \int\limits_G (w_t + w_a - \Delta w + \widetilde{q}(\tau)(w + U) - \varepsilon w_{aa})(-\Delta w - w_{aa}) \, dx \, d\tau \, da$$

$$= -\int\limits_0^t \int\limits_G \widetilde{f}(\Delta w + w_{aa}) \, dx \, d\tau \, da.$$

Интегрируя по частям, применяя неравенство Юнга и учитывая введенные ранее обозначения, получаем

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{G} w_{x_i}^2(x,t,a)\,dx\,da + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\Omega} w_{x_i}^2(x,\tau,A)\,dx\,d\tau$$

$$+\left(1-\frac{\delta_1^2}{2}\right)\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{G}(\Delta w)^2\,dx\,d\tau\,da + \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{0}^{t}\widetilde{q}(\tau)\int\limits_{G} w_{x_i}^2\,dx\,d\tau\,da$$

$$+\varepsilon\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{G} w_{aa}^2\,dx\,d\tau\,da + \frac{1}{2}\int\limits_{G} w_a^2(x,t,a)\,dx\,da + (\varepsilon+1)\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{G} w_{x_i a}^2\,dx\,d\tau\,da$$

$$+\left(\frac{1}{2}-\frac{\delta_1^2}{2}\right)\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\Omega} w_a^2(x,\tau,0)\,dx\,d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t}\widetilde{q}(\tau)\int\limits_{G} w_a^2\,dx\,d\tau\,da$$

$$\leq \frac{\delta_2^2}{2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{G}(\Delta w)^2\,dx\,d\tau\,da + \frac{\delta_3^2}{2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\Omega} w_a^2(x,\tau,0)\,dx\,d\tau\,da +$$

$$+\frac{\delta_1^2}{2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{G} w_a^2\,dx\,d\tau\,da + \left(\frac{N_8}{2\delta_2^2}+\frac{N_{10}}{2\delta_3^2}\right)\int\limits_{0}^{t}\widetilde{q}^2(\tau)\,d\tau + \frac{N_9}{2}\int\limits_{0}^{t}\widetilde{q}(\tau)\,d\tau$$

$$+\frac{1}{2\delta_1^2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{G}\widetilde{f}^2\,dx\,d\tau\,da + \frac{1}{2\delta_1^2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{G}\widetilde{f}_a^2\,dx\,d\tau\,da + \frac{1}{2\delta_1^2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\Omega}\widetilde{f}^2(x,\tau,0)\,dx\,d\tau. \quad (20)$$

Имеет место неравенство

$$|\widetilde{q}(\tau)| \leq c_{1,0} + \frac{1}{\mu_0}\Bigg[(N_5)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{G} w^2(x,\tau,a)\,dx\,da\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+(N_4)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{G} w_a^2(x,\tau,a)\,dx\,da\right)^{\frac{1}{2}} + (N_{6,0})^{\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{n}\left(\int\limits_{G} w_{x_i}^2(x,\tau,a)\,dx\,da\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+(N_7)^{\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{n}\left(\int\limits_{0}^{A}\int\limits_{\Gamma} w_{x_i}^2(x,\tau,a)\,ds\,da\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg].$$

Согласно теоремам вложения и второму основному неравенству для эллиптических операторов [11, 12] имеет место оценка

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Gamma} w_{x_i}^2(x,\tau,a)\,ds \leq \delta_0\int\limits_{\Omega}(\Delta w(x,\tau,a))^2\,dx + c(\delta_0)\int\limits_{\Omega} w^2(x,\tau,a)\,dx, \quad (21)$$

в котором δ_0 есть произвольное положительное число, число же $c(\delta_0)$ определяется, помимо числа δ_0, также областью Ω.

Из этого неравенства и последней оценки следует, что оценку $|\widetilde{q}(\tau)|$ можно продолжить

$$|\widetilde{q}(\tau)| \leq c_{1,0} + \frac{1}{\mu_0}\left[(N_5)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_G w^2(x,\tau,a)\,dx\,da\right)^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$+(N_4)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_G w_a^2(x,\tau,a)\,dx\,da\right)^{\frac{1}{2}} + (N_{6,0})^{\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^n\left(\int\limits_G w_{x_i}^2(x,\tau,a)\,dx\,da\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left.+(N_7)^{\frac{1}{2}}\delta_0\left(\int\limits_G(\Delta w(x,\tau,a))^2\,dx\,da\right)^{\frac{1}{2}} + (N_7)^{\frac{1}{2}}c(\delta_0)\left(\int\limits_G w^2(x,\tau,a)\,dx\,da\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Вследствие известного арифметического неравенства

$$(b_1+\ldots+b_p)^2 \leq p(b_1^2+\ldots+b_p^2)$$

для $\widetilde{q}\,^2(\tau)$ имеет место неравенство

$$\widetilde{q}^2(\tau) \leq (n+4)c_{1,0}^2 + \frac{n+4}{\mu_0^2}(N_5+N_7c(\delta_0))\int\limits_G w^2(x,\tau,a)\,dx\,da$$

$$+\frac{n+4}{\mu_0^2}N_4\int\limits_G w_a^2(x,\tau,a)\,dx\,da + \frac{n+4}{\mu_0^2}N_{6,0}\sum_{i=1}^n\int\limits_G w_{x_i}^2(x,\tau,a)\,dx\,da$$

$$+\frac{n+4}{\mu_0^2}N_7\delta_0\int\limits_G(\Delta w(x,\tau,a))^2\,dx\,da.$$

Неравенства для $|\widetilde{q}(\tau)|$ и $\widetilde{q}^2(\tau)$ позволяют продолжить (20):

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\int\limits_G w_{x_i}^2(x,t,a)\,dx\,da + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_\Omega w_{x_i}^2(x,\tau,A)\,dx\,d\tau$$

$$+\left(1-\frac{\delta_1^2}{2}\right)\int\limits_0^t\int\limits_G(\Delta w)^2\,dx\,d\tau\,da + \sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\widetilde{q}(\tau)\int\limits_G w_{x_i}^2\,dx\,d\tau\,da$$

$$+\varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_G w_{aa}^2\,dx\,d\tau\,da + \frac{1}{2}\int\limits_G w_a^2(x,t,a)\,dx\,da + (\varepsilon+1)\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_G w_{x_ia}^2\,dx\,d\tau\,da$$

$$+\left(\frac{1}{2}-\frac{\delta_1^2}{2}\right)\int\limits_0^t\int\limits_\Omega w_a^2(x,\tau,0)\,dx\,d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_0^t\widetilde{q}(\tau)\int\limits_G w_a^2\,dx\,d\tau\,da$$

$$\leq \left[\frac{\delta_2^2}{2} + \frac{n+4}{\mu_0^2}N_7\delta_0\left(\frac{N_8}{2\delta_2^2}+\frac{N_{10}}{2\delta_3^2}\right)\right]\int\limits_0^t\int\limits_G(\Delta w(x,\tau,a))^2\,dx\,d\tau\,da+$$

$$+\frac{n+4}{\mu_0^2}(N_5+N_7c(\delta_0))\left(\frac{N_8}{2\delta_2^2}+\frac{N_{10}}{2\delta_3^2}\right)\int\limits_0^t\int\limits_G w^2(x,\tau,a)\,dx\,d\tau\,da$$

$$+\frac{\delta_3^2}{2}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega w_a^2(x,\tau,0)\,dx\,d\tau\,da$$

$$+\left[\frac{\delta_1^2}{2}+\frac{n+4}{\mu_0^2}N_4\left(\frac{N_8}{2\delta_2^2}+\frac{N_{10}}{2\delta_3^2}\right)\right]\int\limits_0^t\int\limits_G w_a^2\,dx\,d\tau\,da$$

$$+\frac{n+4}{\mu_0^2}N_{6,0}\left(\frac{N_8}{2\delta_2^2}+\frac{N_{10}}{2\delta_3^2}\right)\sum_{i=1}^n\int\limits_G w_{x_i}^2(x,\tau,a)\,dx\,da\,d\tau$$

$$+\frac{N_9N_5^{\frac12}}{2\mu_0}\int\limits_0^t\left(\int\limits_G w^2(x,\tau,a)\,dx\,da\right)^{\frac12}d\tau$$

$$+\frac{N_9N_4^{\frac12}}{2\mu_0}\int\limits_0^t\left(\int\limits_G w_a^2(x,\tau,a)\,dx\,da\right)^{\frac12}d\tau$$

$$+\frac{N_9N_{6,0}^{\frac12}}{2\mu_0}\sum_{i=1}^n\int\limits_0^t\left(\int\limits_G w_{x_i}^2(x,\tau,a)\,dx\,da\right)^{\frac12}d\tau$$

$$+\frac{N_9N_7^{\frac12}}{2\mu_0}\delta_0\int\limits_0^t\left(\int\limits_G (\Delta w(x,\tau,a))^2\,dx\,da\right)^{\frac12}d\tau$$

$$+\frac{N_9N_7^{\frac12}}{2\mu_0}c(\delta_0)\int\limits_0^t\left(\int\limits_G w^2(x,\tau,a)\,dx\,da\right)^{\frac12}d\tau$$

$$+\frac{N_9}{2}c_{1,0}T+\left(\frac{N_8}{2\delta_2^2}+\frac{N_{10}}{2\delta_3^2}\right)(n+4)c_{1,0}^2T+\frac{1}{2\delta_1^2}\int\limits_0^t\int\limits_G \widetilde{f}^2\,dx\,d\tau\,da$$

$$+\frac{1}{2\delta_1^2}\int\limits_0^t\int\limits_G \widetilde{f}_a^2\,dx\,d\tau\,da+\frac{1}{2\delta_1^2}\int\limits_0^t\int\limits_\Omega \widetilde{f}^2(x,\tau,0)\,dx\,d\tau. \tag{22}$$

В неравенстве (22) зафиксируем числа δ_1, δ_2 и δ_3 настолько малыми, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac12-\frac{\delta_1^2}{2}-\frac{\delta_3^2}{2}>0,\quad \frac12-\frac{\delta_1^2}{2}-\frac{\delta_2^2}{2}>0.$$

Далее, выберем число δ_0 настолько малым, чтобы при фиксированных ранее числах δ_1, δ_2 и δ_3 выполнялось неравенство

$$\frac12-\frac{\delta_1^2}{2}-\frac{\delta_3^2}{2}-\frac{\delta_0(n+4)N_7}{\mu_0^2}\left(\frac{N_8}{2\delta_2^2}+\frac{N_{10}}{2\delta_3^2}\right)>0$$

(это возможно). Применяя далее неравенство Юнга к шестому, седьмому, восьмому, девятому и десятому слагаемым правой части, используя дополнительно оценку (18), приходим к неравенству

$$z_1(t) \le M_1' \int\limits_0^t z_1(\tau)\,d\tau + M_2', \tag{23}$$

в котором $z_1(t)$ есть функция

$$z_1(t) = \sum_{i=1}^n \int\limits_G w_{x_i}^2(x,t,a)\,dx\,da + \int\limits_G w_a^2(x,t,a)\,dx\,da,$$

числа M_1' и M_2' определяются функциями $f(x,t,a)$, $N(x,t,a)$,$u_0(x,a)$, $v_0(x,t)$, $\mu_0(t)$, $\psi(x,t,a)$, областью Ω, а также числами T и A.

Из неравенства (23) и леммы Гронуолла вытекает требуемая оценка. □

Следствие 1. *При выполнении всех условий леммы 3 для решений $w(x,t,a)$ краевой задачи (9_ε), $(2')$–$(4')$, $(10')$ из пространства V_2 при всех t из отрезка $[0,T]$ будет справедлива оценка*

$$\int\limits_0^t \widetilde{q}^2(\tau)\,d\tau \le K_0, \tag{24}$$

постоянная K_0 в которой определяется функциями $f(x,t,a)$, $N(x,t,a)$, $u_0(x,a)$, $v_0(x,t)$, $\mu_0(t)$, $\psi(x,t,a)$, областью Ω, а также числами T и A.

Доказательство этого следствия очевидно.

Лемма 4. *Пусть выполняются все условия леммы 3, и пусть дополнительно выполняется условие*

$$N(x,t,a) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \quad t \in (0,T), \quad a \in (0,A).$$

Тогда для решений $w(x,t,a)$ краевой задачи (9_ε), $(2')$–$(4')$, $(10')$ из пространства V_2 при всех t из отрезка $[0,T]$ будет справедлива оценка

$$|\Phi(t,w)| \le K_1.$$

Доказательство. Для решений $w(x,t,a)$ краевой задачи (9_ε), $(2')$–$(4')$, $(10')$ имеет место оценка

$$\sum_{i=1}^n \int\limits_G w_{x_i}^2(x,t,a)\,dx\,da + \int\limits_G w_a^2(x,t,a)\,dx\,da \le M_0''.$$

Из этой оценки и из неравенства (18) следует требуемое. □

Определим пространство $\widetilde{V}_0$:

$$\widetilde{V}_0 = \Big\{ v(x,t,a) : \int\limits_Q \{ v^2(x,t,a) + v_t^2(x,t,a) + v_a^2(x,t,a) + \sum_{i=1}^n v_{x_i a}^2(x,t,a)$$

$$+ (\Delta v(x,t,a))^2 \}\,dx\,dt\,da < +\infty \Big\}.$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия леммы 4, условия согласования*

$$u_0(x,0) = v_0(x,0) \quad \text{при} \quad x \in \Omega,$$

$$\psi(x,0,a) = u_0(x,a) \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \quad a \in (0,A),$$

$$\psi(x,t,a) = v_0(x,t) \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \quad t \in (0,T),$$

$$\int\limits_G N(x,0,a) u_0(x,a)\,dx\,da = \mu(0),$$

и также условие

$$K_1 < \widetilde{k}_0 \mu_0.$$

Тогда обратная задача I имеет решение $(u(x,t,a), q(t))$ такое, что $u(x,t,a) \in \widetilde{V}_0$, $q(t) \in L_\infty([0,T])$.

Доказательство. Зафиксируем число R_1 как произвольное число из интервала $[K_1, \widetilde{k}_0\mu_0]$. Краевая задача (9_ε), $(2')$–$(4')$ имеет решение $w(x,t,a)$, принадлежащее пространству $\widetilde{V}_0$ — это доказывается аналогично доказательству существования решения задачи (9), (2)–(4). Положим

$$u(x,t,a) = w(x,t,a) + U(x,t,a), \quad q(t) = \widetilde{c}_1(t) + \Phi(t,w).$$

Очевидно, что функции $u(x,t,a)$ и $q(t)$ дадут искомое решение обратной задачи I (выполнение условия (5) показывается также, как это делалось при доказательстве теоремы 1). □

Обратимся теперь к обратной задаче II. Пусть выполняется условие: *существует функция $U_1(x,t,a)$ такая, что*

$$U_1(x,0,a) = u_0(x,a), \quad x \in \Omega, \quad a \in (0,A),$$

$$U_1(x,t,0) = v_0(x,t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,T),$$

$$\frac{\partial U_1(x,t,a)}{\partial \nu}\Big|_{x\in\Gamma,\, t\in(0,T),\, a\in(0,A)} = \psi(x,t,a),$$

и при этом для функции $U_1(x,t,a)$ имеют место включения

$$\Delta U_1(x,t,a) \in L_2(Q), \quad U_{1t}(x,t,a) \in L_2(Q), \quad U_{1a}(x,t,a) \in L_2(Q).$$

Положим

$$w(x,t,a) = u(x,t,a) - U_1(x,t,a),$$

$$\overline{f}(x,t,a) = f(x,t,a) - U_{1t}(x,t,a) - U_{1a}(x,t,a) + \Delta U_1(x,t,a),$$

$$\mu_2(t) = \mu(t) - \int\limits_G N(x,t,a) U_1(x,t,a)\,dx\,da.$$

Для функции $w(x,t,a)$ выполняется уравнение

$$w_t + w_a - \Delta w + q(t)(w + U_1) = \overline{f}(x,t,a), \tag{1''}$$

выполняются также условия

$$w(x,0,a) = 0, \quad x \in \Omega, \quad a \in (0,A), \tag{2''}$$

$$w(x,t,0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,T), \tag{3''}$$

$$\frac{\partial w(x,t,a)}{\partial \nu}\Big|_{x\in\Gamma,\, t\in(0,T),\, a\in(0,A)} = 0. \tag{4''}$$

Условие переопределения (5) перейдет в условие

$$\int\limits_G N(x,t,a)w(x,t,a)\,dx\,da = \mu_2(t). \tag{5''}$$

Таким образом, обратная задача II в рассматриваемой ситуации преобразована в обратную задачу (1″)-(5″) с однородными граничными и краевыми условиями. Положим

$$\overline{f}_1(t) = \int\limits_G N(x,t,a)\overline{f}(x,t,a)\,dx\,da,$$

$$\Phi_1(t,w) = \int\limits_G N_t(x,t,a)w(x,t,a)\,dx\,da - \int\limits_G N(x,t,a)w_a(x,t,a)\,dx\,da$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\int\limits_G N_{x_i}(x,t,a)w_{x_i}(x,t,a)\,dx\,da, \quad c_2(t) = \frac{\overline{f}_1(t) - \mu_2'(t)}{\mu(t)}.$$

Будем ниже считать, что выполняются условие (7), а также условие

$$c_2(t) \ge k_2 > 0 \quad \textit{при} \quad t \in [0,T]. \tag{8''}$$

Умножим уравнение (1″) на функцию $N(x,t,a)$ и проинтегрируем по области G. Из полученного равенства вычислим $q(t)$:

$$q(t) = c_2(t) + \frac{1}{\mu(t)}\Phi_1(t,w).$$

Пусть $W(\varsigma)$ есть срезывающая функция, определенная с помощью числа R_2 из интервала $(0, k_2\mu_0)$ (точное значение числа R_2 укажем ниже). Положим

$$\overline{q}(t) = c_2(t) + \frac{1}{\mu(t)}W(\Phi_1(t,w)).$$

Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $w(x,t,a)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$w_t + w_a - \Delta w + [c_2(t) + \frac{1}{\mu(t)}W(\Phi_1(t,w))](w+U_1) = \overline{f}_1(x,t,a) \tag{9''}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2″)–(4″). Разрешимость этой задачи также будет установлена с помощью метода регуляризации.

Пусть ε есть число из интервала $(0,\varepsilon_0)$ (число ε_0 — произвольное фиксированное). Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $w(x,t,a)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$w_t + w_a - \Delta w + [c_2(t) + \frac{1}{\mu(t)}W(\Phi_1(t,w))](w+U_1) - \varepsilon w_{aa} = \overline{f}_1(x,t,a) \tag{$9''_\varepsilon$}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2″)-=-(4″), *а также условие*

$$w_a(x,t,A) = 0 \quad \textit{при} \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,T). \tag{10''}$$

Определим пространство $\widetilde{V}$:

$$\widetilde{V} = \Big\{v(x,t,a) : \int\limits_Q \{v^2(x,t,a) + v_t^2(x,t,a) + v_a^2(x,t,a) + v_{aa}^2(x,t,a) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} v_{x_i a}^2(x,t,a) + (\Delta v(x,t,a))^2\}\,dx\,dt\,da < +\infty\Big\}.$$

Лемма 5. *Пусть выполняются условия (7), ($8''$), и пусть существует функция $U_1(x,t,a)$ с требуемыми свойствами. Тогда существует постоянная $\overline{M}_0$, определяющаяся функциями $f(x,t,a)$, $N(x,t,a)$, $u_0(x,a)$, $v_0(x,t)$, $\psi(x,t,a)$, $\mu(t)$, областью Ω, а также числами T и A, такая, что для решений $w(x,t,a)$ задачи ($9''_\varepsilon$), ($2''$)–($4''$), ($10''$) из пространства $\widetilde{V}$ при всех t из отрезка $[0,T]$ будет справедлива оценка*

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_G w_{x_i}^2(x,t,a)\,dx\,da + \int\limits_G w_a^2(x,t,a)\,dx\,da \le \overline{M}_0. \qquad (11'')$$

Лемма 6. *Пусть выполняются все условия леммы 5. Тогда для решений $u(x,t,a)$ задачи ($9''_\varepsilon$), ($2''$)–($4''$), ($10''$) из пространства $\widetilde{V}$ при всех t из отрезка $[0,T]$ будет справедлива оценка*

$$|\Phi(t,u)| \le \overline{N}_0,$$

в которой число $\overline{N}_0$ определяется функцией $N(x,t,a)$ и числом $\overline{M}_0$.

Доказательство лемм 5 и 6 проводится вполне аналогично доказательству лемм 1 и 2.

Теорема 3. *Пусть выполняются все условия леммы 5, условия согласования*

$$u_0(x,0) = v_0(x,0) \quad \text{при} \quad x \in \Omega,$$

$$\frac{\partial u_0(x,a)}{\partial \nu} = \psi(x,0,a) \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \quad a \in (0,A),$$

$$\frac{\partial v_0(x,t)}{\partial \nu} = \psi(x,t,0) \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \quad a \in (0,A),$$

$$\int\limits_\Omega N(x,0,a)u_0(x,a)\,dx\,da = \mu(0),$$

а также условие

$$\overline{N}_0 < k_2\mu_0.$$

Тогда обратная задача II имеет решение $(u(x,t,a), q(t))$ такое, что $u(x,t,a) \in V_0$, $q(t) \in L_\infty([0,T])$.

Доказательство этой теоремы проводится вполне аналогично доказательству теоремы 1. Уточним лишь, что в качестве числа R_2 следует взять произвольное число из интервала $(\overline{N}_0, k_2\mu_0)$.

References

[1] Prilepko A.I., Orlovsky D.C., Vasin I.A. *Methods for solving inverse problems in mathematical physics.* New York: Dekker, 1999.

[2] Kozhanov A.I. *Composite type equations and inverse problems.* Utrecht: VSP, 1999.

[3] Belov Yu.Ya. *Inverse problems for partial differential equations.* Utrecht: VSP, 2002, 211p.

[4] Ivanchov M. *Inverse problems for equations of parabolic type.* Mathematical studies. Monograph series. Vol. 10. 2003.

[5] Alekseev G.V., *Optimization problems in stationary heat and mass transfer and magnetohydrodynamics*, Moscow: Nauchnyi Mir, 2010.

[6] Kosheleva Yu.A., *On the solvability of some linear inverse problems for ultraparaboli equations*, Math. notes of YSU, **18**:2 (2011), 77–98. Zbl 1274.35415

[7] Kosheleva Yu.A., *Ultraparaboli equations with unknown right-hand side*, Math. notes of YSU, **19**:2 (2012), 73–93. Zbl 1289.35191

[8] Kozhanov A.I., *Nonlinear loaded equations and inverse problems*, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., **44**:4 (2004), 694—716. Zbl 1114.35148

[9] Kozhanov A.I., *A nonlinear loaded parabolic equation and a related inverse problem*, Mat. Zametki., **76**:6 (2004), 840—853. Zbl 1076.35130

[10] Kozhanov A.I., *Parabolic equations with an unknown time-dependent coefficient*, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., **45**:12 (2005), 2168—2184. Zbl 1101.35332

[11] Sobolev S.L., *Some applications of functional analysis in mathematical physics*, Moscow: Nauka, 1988. Zbl 0662.46001

[12] Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Uralcheva N.N., *Linear and kvazilinear equations parabolic type* Moscow: Nauka, 1973.

Yulia Anatolyevna Kosheleva
Sakhalin State University,
st. Lenina, 290,
693000, Yuzhno-Sakhalinsk, Russia
E-mail address: ynuta@mail.ru