S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 1207–1218 (2016) УДК 512.542
DOI 10.17377/semi.2016.13.094 MSC 20G40 (20D06)

ЛОКАЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ В ТЕОРЕМЕ АШБАХЕРА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ И УНИТАРНЫХ ГРУПП

А.А. ГАЛЬТ, Д.О. РЕВИН

Abstract. Our main result completes the investigation began in [Siberian Mathematical Journal, V. 55, №2, 2014, 239–245] for linear and unitary groups. We consider the subgroups H in a linear or a unitary group G over a finite field such that $O_r(H) \nleqslant Z(G)$ for some prime r. We obtain a refinement of the well-known Aschbacher theorem on subgroups of classical groups for this case. More precisely, we prove that if $G = \mathrm{GL}_n^\eta(q)$, $\eta \in \{+,-\}$, $H \leqslant G$, $O_r(H) \nleqslant Z(G)$ for some prime r then one of the following cases holds:

(1) H is contained in some element of Aschbacher classes $\mathcal{C}_1(G)$ — $\mathcal{C}_4(G)$;

(2) $n = r^\gamma$ for a positive integer γ, $q \equiv \eta \pmod r$, H is contained in the normalizer N of an r-subgroup of symplectic type of G, $O_r(H) \leqslant O_r(N)$, and one of the following statements holds:

 (a) $r = 2$, $q \equiv -\eta \pmod 4$ $N = (\mathbb{Z}_{q-\eta} \circ 2_\delta^{1+2\gamma}).\,\mathrm{O}_{2\gamma}^\delta(2)$, $\delta \in \{+,-\}$;

 (b) $N = (\mathbb{Z}_{q-\eta} \circ r^{1+2\gamma}).\,\mathrm{Sp}_{2\gamma}(r)$.

 Moreover, either $N \in \mathcal{C}_6(G)$ or N is contained as a subgroup in some element of $\mathcal{C}_5(G) \cup \mathcal{C}_8(G)$.

In [Siberian Mathematical Journal, V. 55, №2, 2014, 239–245] the case $r \neq 2$ was considered. Now we prove the above result for $r = 2$.

Keywords: Linear groups, unitary groups, Aschbacher classes, radical 2-subgroups.

Galt, A.A., Revin, D.O., The local case in Aschbacher theorem for linear and unitary groups.

Исследования второго автора частично поддержаны Президентом Китайской академии наук, CAS President's International Fellowship Initiative (PIFI), Grant No. 2016VMA078.

Поступила 16 ноября 2016 г., опубликована 13 декабря 2016 г.

1. Введение

После завершения классификации конечных простых групп исключительное значение имеет изучение подгруппового строения таких групп.

Подгруппы в классических группах в значительной степени описывает теорема М. Ашбахера [1].

Теорема (Ашбахер). *Пусть G — классическая группа, $H \leqslant G$. Тогда либо образ H в $G/Z(G)$ является почти простой группой, либо H содержится в элементе одного из классов Ашбахера $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_8$.*

Здесь $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_8$ — естественные классы подгрупп в классических группах, выделенные М. Ашбахером.

Точное описание элементов в классах $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_8$ получено в монографиях [3, 4]. Следует отметить, что в определении классов $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_8$ в [1] и [3] имеются незначительные расхождения и в дальнейшем классы Ашбахера мы будем понимать в смысле [3]. В таблице 1 (см. [3, Таблица 1.2.A]) приведено примерное описание (тип) подгрупп, составляющих тот или иной класс Ашбахера в общих линейных группах. Строгое описание классов $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_8$ для классических групп, у которых размерность естественного модуля не меньше 13, см. в [3, Глава 4], и для оставшихся классических групп см. [4, таблицы 8.1–8.85], куда включено также для групп малых размерностей полное описание подгрупп, не содержащихся в элементах из классов Ашбахера, т. е. тех, у которых образ в факторгруппе по центру является почти простой группой.

Отметим, что теорема Ашбахера не дает полного описания подгруппового строения соответствующих групп хотя бы по той причине, что нет полного описания почти простых подгрупп в классических группах. И даже в ситуации, когда подгруппа заведомо не является почти простой, использование теоремы Ашбахера в качестве инструмента индуктивных рассуждений может быть сопряжено со значительными трудностями. Например, если подгруппа H классической группы попадает в класс $\mathcal{C}_6$ (нормализаторы подгрупп симплектического типа), то контролировать выполнение предположения индукции бывает зачастую невозможно, поскольку меняется характеристика основного поля. Наша цель — в случае линейных и унитарных групп завершить начатое в [2] уточнение теоремы Ашбахера для подгрупп, обладающих нетривиальной нормальной r-подгруппой, которое позволит в дальнейшем обходить трудности с возникновением «чужой» характеристики.

В работе [2] были рассмотрены подгруппы H линейных и унитарных групп, образ которых в факторгруппе по центру всей группы обладает нетривиальной нормальной r-подгруппой для некоторого нечетного простого числа r. В данной работе будет рассмотрен случай $r = 2$. Для унификации формулировок и рассуждений мы, вслед за [3], используем обозначение $\mathrm{GL}_n^{\eta}(q)$, где $\eta = \pm 1$ или знак этого числа, полагая $\mathrm{GL}_n^{+}(q) = \mathrm{GL}_n(q)$ — общая линейная группа и $\mathrm{GL}_n^{-}(q) = \mathrm{GU}_n(q)$ — унитарная группа. Группы $\mathrm{GU}_n(q)$, $\mathrm{GSp}_n(q), \mathrm{GO}_n^{\pm}(q)$ определены в [3, §2.1]. Все вышеперечисленные группы определены над полем $\mathbb{F}_{q^u}$ из q^u элементов, где $q = p^f$, а $u = 2$ в случае группы $\mathrm{GU}_n(q)$ и $u = 1$ в противном случае.

Для нечетного простого числа r мы будем обозначать символом $r^{2\gamma+1}$ единственную с точностью до изоморфизма экстраспециальную группу порядка

Таблица 1. ***Классы Ашбахера в*** $\mathrm{GL}_n(q)$.

$\mathcal{C}_i$	Наименование	Примерное строение в $\mathrm{GL}_n(q)$
$\mathcal{C}_1$	Стабилизаторы вполне изотропных или невырожденных подпространств естественного модуля	Максимальные параболические
$\mathcal{C}_2$	Стабилизаторы разложений естественного модуля V в прямую сумму $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_t$, $\dim(V_i) = a$	$\mathrm{GL}_a(q) \wr S_t$, $n = at$
$\mathcal{C}_3$	Подгруппы, связанные с расширением поля $\mathbb{F}_q$	$\mathrm{GL}_a(q^b).b$, $n = ab$, b простое
$\mathcal{C}_4$	Стабилизаторы тензорных разложений $V = V_1 \bigotimes V_2$ естественного модуля V	$\mathrm{GL}_a(q) \circ \mathrm{GL}_b(q)$, $n = ab$
$\mathcal{C}_5$	Подгруппы, соответствующие подполям простого индекса b поля $\mathbb{F}_q$	$\mathrm{GL}_n(q_0)$, $q = q_0^b$, b простое
$\mathcal{C}_6$	Нормализаторы s-групп симплектического типа, s простое	$(\mathbb{Z}_{q-1} \circ s^{1+2a}).\,\mathrm{Sp}_{2a}(s)$, $n = s^a$
$\mathcal{C}_7$	Стабилизаторы тензорных разложений естественного модуля $V = \bigotimes\limits_{i=1}^{t} V_i$, $\dim(V_i) = a$	$(\overbrace{\mathrm{GL}_a(q) \circ \ldots \circ \mathrm{GL}_a(q)}^{t}).S_t$, $n = a^t$
$\mathcal{C}_8$	Классические группы	$\mathrm{Sp}_n(q)$, n четно $\mathrm{O}_n(q)$, $\mathrm{O}_n^{\pm}(q)$, q нечетно $\mathrm{GU}_n(q^{1/2})$, q квадрат

$r^{2\gamma+1}$ и экспоненты r. Под экстраспециальной 2-группой типа “+” мы, как обычно, понимаем центральное произведение нескольких диэдральных групп порядка 8, центр которого имеет порядок 2, а под экстраспециальной 2-группой типа “$-$” понимаем центральное произведение тоже с центром порядка 2 нескольких диэдральных и одной кватернионной групп порядка 8. Экстраспециальную группу порядка $2^{2\gamma+1}$ и типа δ, где $\delta \in \{+,-\}$, будем обозначать через $2_\delta^{2\gamma+1}$. Для данных γ и δ такая группа определена однозначно с точностью до изоморфизма. Под r-группой симплектического типа понимается центральное произведение экстраспециальной и циклической r-групп, обладающее единственной центральной циклической подгруппой порядка r. Символом $\mathbb{Z}_n$ обозначается циклическая группа порядка n. Некоторое центральное произведение групп A и B обозначается через $A \circ B$. Отметим, что в случае $n \equiv 0 \pmod 4$ верно $\mathbb{Z}_n \circ 2_+^{1+2\gamma} \simeq \mathbb{Z}_n \circ 2_-^{1+2\gamma}$, и знак δ можно опустить.

Отметим сначала

Предложение 1. *Пусть* $G = \mathrm{GL}_{2^\gamma}^{\eta}(q)$. *Справедливы следующие утверждения.*

(1) *Для любого* $\delta \in \{+,-\}$ *группа* G *содержит абсолютно неприводимую экстраспециальную группу* $E^\delta = 2_\delta^{2\gamma+1}$ *такую, что* $Z(E^\delta) = \Omega_1(O_2(Z(G)))$.

(2) *Пусть* Z *— силовская* 2*-подгруппа центра* $Z(G)$ *группы* G. *Тогда если* $|Z| = 2$, *то* $ZE^\delta = E^\delta$, *и если* $|Z| > 2$, *то* $ZE^+ \simeq ZE^-$. *Каждому изоморфному типу групп* ZE^δ, $\delta = \pm$, *соответствует ровно один класс*

сопряженности абсолютно неприводимых подгрупп симплектического типа группы G с представителем ZE^{δ}.

(3) *Зафиксируем $\delta \in \{+,-\}$ и положим $R = ZE^{\delta}$ и $N = N_G(R)$. Тогда выполнено одно из следующих утверждений.*

(а) $q \equiv \eta \pmod 4, N = (\mathbb{Z}_{q-\eta} \circ 2^{1+2\gamma}).\,\mathrm{Sp}_{2\gamma}(2)$. При этом N является элементом класса $\mathcal{C}_6$, если q — простое число, и содержится в элементе класса $\mathcal{C}_5$ в противном случае.

(б) $q \equiv -\eta \pmod 4, N = (\mathbb{Z}_{q-\eta} \circ 2_{\delta}^{1+2\gamma}).\,\mathrm{O}_{2\gamma}^{\delta}(2)$. При этом либо q простое, $\eta = +$ и N содержится в подгруппе $I \in \mathcal{C}_8$ группы G такой, что

$$I = \begin{cases} \mathrm{GO}_{2^a}^{+}(q), & \text{при } \delta = + \\ \mathrm{GSp}_{2^a}(q), & \text{при } \delta = - \end{cases},$$

либо N содержится в элементе класса $\mathcal{C}_5$.

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 1. *Пусть $G = \mathrm{GL}_n^{\eta}(q)$, $H \leqslant G$, $O_2(H) \nleqslant Z(G)$. Тогда имеет место один из следующих случаев:*

(1) H содержится в элементе одного из классов Ашбахера $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_4$;

(2) $n = 2^{\gamma}$ для некоторого натурального числа γ, H содержится в нормализаторе N некоторой 2-подгруппы симплектического типа, $O_2(H) \leqslant O_2(N)$, и подгруппа N такая же, как в утверждении (3) *предложения* 1.

В работе [2] содержится неточность в формулировке основной теоремы. А именно, неверной является ремарка в скобках о том, что нормализатор N соответствующей r-подгруппы симплектического типа принадлежит классу $\mathcal{C}_6$. Этот нормализатор может оказаться не максимальной подгруппой и не являться элементом класса $\mathcal{C}_6$. В таком случае N содержится в элементе другого класса Ашбахера. Без этой ремарки формулировка основного результата [2] остается верной. Информацию о вложении в линейных и унитарных группах нормализатора абсолютно неприводимой r-подгруппы симплектического типа в элемент соответствующего класса Ашбахера при нечетном r дает следующий аналог предложения 1.

Предложение 2. *Пусть r — нечетное простое число и $G = \mathrm{GL}_{r^{\gamma}}^{\eta}(q)$, где $q = p^f$ — степень простого числа p, причем $q \equiv \eta \pmod r$. Обозначим через e наименьший делитель числа $r-1$ такой, что $p^e \equiv \eta \pmod r$. Справедливы следующие утверждения.*

(1) *Группа G содержит абсолютно неприводимую экстраспециальную группу $E = r^{2\gamma+1}$ такую, что $Z(E) = \Omega_1(O_r(Z(G)))$.*

(2) *Пусть Z — силовская r-подгруппа центра $Z(G)$ группы G. Тогда в G сопряжены любые две абсолютно неприводимые подгруппы, изоморфные ZE.*

(3) *Положим $R = ZE$ и $N = N_G(R)$. Тогда*

$$N = (\mathbb{Z}_{q-\eta} \circ r^{1+2\gamma}).\,\mathrm{Sp}_{2\gamma}(r)$$

и имеет место один из следующих случаев:

(а) $f = e$ и либо f нечетно, либо $\eta = -$; при этом $N \in \mathcal{C}_6$;

(б) $f = e$ четно и $\eta = +$; при этом N содержится в $Z(G) \circ \mathrm{GU}_{r^{\gamma}}(q^{1/2}) \in \mathcal{C}_8$;

(в) $f > e$; при этом N содержится в подгруппе из класса $\mathcal{C}_5$.

С учетом предложения 2 основной результат работы [2] можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2. *Пусть $G = \mathrm{GL}_n^\eta(q)$, $H \leqslant G$, $O_r(H) \nleqslant Z(G)$ для некоторого нечетного простого r. Тогда имеет место один из следующих случаев:*

(1) H содержится в элементе одного из классов Ашбахера $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_4$;

(2) $n = r^\gamma$ для некоторого натурального числа γ, $q \equiv \eta \pmod r$, H содержится в нормализаторе N некоторой r-подгруппы симплектического типа, $O_2(H) \leqslant O_2(N)$, и подгруппа N такая же, как в утверждении (3) *предложения* 2.

Объединим теоремы 1 и 2 в одно утверждение:

Следствие. *Пусть $G = \mathrm{GL}_n^\eta(q)$, $H \leqslant G$, $O_r(H) \nleqslant Z(G)$ для некоторого простого r. Тогда имеет место один из следующих случаев:*

(1) H содержится в элементе одного из классов Ашбахера $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_4$;

(2) $n = r^\gamma$ для некоторого натурального числа γ, $q \equiv \eta \pmod r$, H содержится в нормализаторе N некоторой r-подгруппы симплектического типа, $O_r(H) \leqslant O_r(N)$ и выполнено одно из утверждений:

(а) $N = (\mathbb{Z}_{q-\eta} \circ 2_\delta^{1+2\gamma}).\,\mathrm{O}_{2\gamma}^\delta(2)$, $\delta \in \{+,-\}$, если $r = 2$, $q \equiv -\eta \pmod 4$;

(б) $N = (\mathbb{Z}_{q-\eta} \circ r^{1+2\gamma}).\,\mathrm{Sp}_{2\gamma}(r)$ в остальных случаях.

При этом подгруппа N либо является элементом класса Ашбахера $\mathcal{C}_6$, либо содержится в элементе одного из классов $\mathcal{C}_5$ или $\mathcal{C}_8$ в соответствии с утверждениями (3) *предложений* 1 *и* 2.

Отметим, что для ведения индуктивных рассуждений как правило оказывается не важным в элементе какого именно класса Ашбахера будет лежать подгруппа N в случае (2) следствия.

Предположим теперь, что $\mathrm{SL}_n^\eta(q) \leqslant G \leqslant \mathrm{GL}_n^\eta(q)$, $C \leqslant Z(G)$ и $\overline{G} = G/C$. Тогда полный прообраз H в G любой подгруппы $\overline{H} \leqslant \overline{G}$ такой, что $O_r(\overline{H}) \nleqslant Z(\overline{G})$, рассматриваемый как подгруппа в $\mathrm{GL}_n^\eta(q)$, также будет удовлетворять условию $O_r(H) \nleqslant Z(G)$. Поэтому результаты данной статьи могут быть полезны и для подгрупп группы $\overline{G}$ при исследовании локального случая в теореме Ашбахера. В частности, они применимы для проективных линейных и унитарных групп.

2. Радикальные r-подгруппы и их использование для изучения подгрупп с нетривиальным r-радикалом

Определение. *Напомним, что согласно* [5] *подгруппа R группы G называется радикальной r-подгруппой для некоторого простого числа r, если $R = O_r(N_G(R))$.*

Определение. *Пусть G — конечная группа, r — простое число и H_1, H_2 — подгруппы группы G. Будем писать $H_1 \leqslant_r H_2$, если $H_1 \leqslant H_2$ и $O_r(H_1) \leqslant O_r(H_2)$.*

Легко видеть, что отношение $\leqslant_r$ задает частичный порядок на множестве подгрупп. При этом, если H — максимальная относительно данного порядка подгруппа, то $N_G(O_r(H)) = H$. Таким образом, $O_r(H)$ является радикальной r-подгруппой. Отметим, что верно и обратное, т. е. подгруппы группы H, максимальные относительно отношения $\leqslant_r$, являются нормализаторами радикальных подгрупп (см. [13, §1]). Таким образом, имеет место следующее

Замечание 1. *Пусть G — конечная группа, $H \leqslant G$ и $O_r(H) \neq 1$ для некоторого простого числа r. Тогда существует радикальная r-подгруппа R группы G, такая что $H \leqslant N_G(R)$ и $O_r(H) \leqslant R$.*

3. Описание радикальных 2-подгрупп и их нормализаторов в линейных и унитарных группах

В данном разделе приводится единообразное описание радикальных 2-подгрупп в линейных и унитарных группах, которое было получено в работах [8, §2] и [9, §2] соответственно. Для произвольных квадратных матриц A, B определим их кронекерово произведение:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nn}B \end{pmatrix}.$$

Пусть q — некоторая степень нечетного простого числа p и $\eta \in \{+,-\}$ знак. Пусть $\varepsilon \in \{-1,1\}$ выбрано так, что $q-\varepsilon$ делится на 4. Число a определим равенством $(q-\varepsilon)_2 = 2^a$. Пусть α — неотрицательное целое число. Положим $\varepsilon_\alpha = \eta^{2^\alpha}$ и

$$Z_\alpha = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{если } \alpha = 0 \text{ и } \eta = -\varepsilon, \\ \mathbb{Z}_{2^{a+\alpha}} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть γ — неотрицательное целое число, $\delta \in \{+,-\}$ и E_γ — экстраспециальная группа $2_\delta^{2\gamma+1}$. Через $E_\gamma Z_\alpha$ будем обозначать центральное произведение групп E_γ и Z_α, такое что $Z(E_\gamma) = \Omega_1(Z_\alpha)$. Ввиду предложения [3, § 4.6] группа $E_\gamma Z_\alpha$ вкладывается в $\mathrm{GL}_{2^\gamma}^{\varepsilon_\alpha}(q^{2^\alpha})$ таким образом, что Z_α совпадает с $O_2(Z(\mathrm{GL}_{2^\gamma}^{\varepsilon_\alpha}(q^{2^\alpha})))$, и через $R_{\alpha,\gamma}$ обозначим образ $E_\gamma Z_\alpha$ относительно этого вложения. При этом группа $\mathrm{GL}_{2^\gamma}^{\varepsilon_\alpha}(q^{2^\alpha})$, расширенная полевым автоморфизмом порядка 2^α, вкладывается в группу $\mathrm{GL}_{2^{\alpha+\gamma}}^{\eta}(q)$ (см. [3, §§4.2, 4.3]). Пусть $H_{\alpha,\gamma}$ — нормализатор в $\mathrm{GL}_{2^\gamma}^{\varepsilon_\alpha}(q^{2^\alpha})$ подгруппы $R_{\alpha,\gamma}$.

Пусть m — натуральное число. Имеет место следующая цепочка вложений

$$\mathrm{GL}_{2^\gamma}^{\varepsilon_\alpha}(q^{2^\alpha}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_{2^{\gamma+\alpha}}^{\eta}(q) \hookrightarrow \mathrm{GL}_{m2^{\gamma+\alpha}}^{\eta}(q),$$

где первое вложение — вложение Галуа или его композиция с вложением

$$\mathrm{GL}_{2^{\gamma+\alpha-1}}(q^2) \hookrightarrow \mathrm{GL}_{2^{\gamma+\alpha}}^{-}(q)$$

[3, §§4.2, 4.3], а второе задается правилом

$$g \mapsto I_m \otimes g = \begin{pmatrix} g & & \\ & \ddots & \\ & & g \end{pmatrix}, \quad g \in \mathrm{GL}_{2^{\gamma+\alpha}}^{\eta}(q).$$

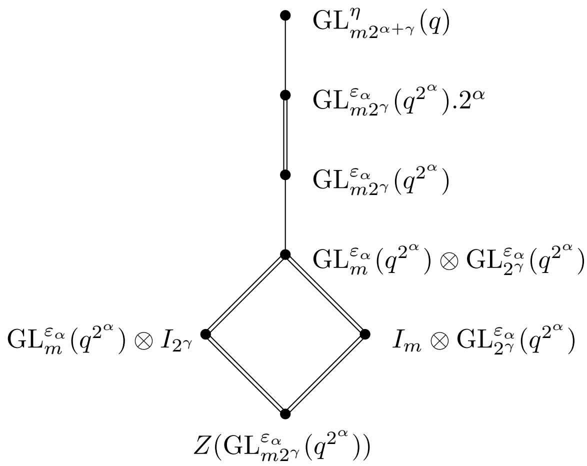
Легко видеть, что группу $\mathrm{GL}_{2^\gamma}^{\varepsilon_\alpha}(q^{2^\alpha})$ можно также вложить в $\mathrm{GL}_{m2^{\alpha+\gamma}}^{\eta}(q)$ посредством цепочки вложений

$$\mathrm{GL}_{2^\gamma}^{\varepsilon_\alpha}(q^{2^\alpha}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_{m2^\gamma}^{\varepsilon_\alpha}(q^{2^\alpha}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_{m2^{\alpha+\gamma}}^{\eta}(q)$$

таким образом, что следующая диаграмма окажется коммутативной.

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{GL}^{\varepsilon_\alpha}_{2^\gamma}(q^{2^\alpha}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}^{\eta}_{2^{\alpha+\gamma}}(q) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{GL}^{\varepsilon_\alpha}_{m2^\gamma}(q^{2^\alpha}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}^{\eta}_{m2^{\alpha+\gamma}}(q)
\end{array}$$

Для наглядности перечисленные подгруппы группы $\mathrm{GL}^{\eta}_{m2^{\alpha+\gamma}}(q)$ изобразим на следующей диаграмме (двойная линия соответствует нормальным подгруппам).



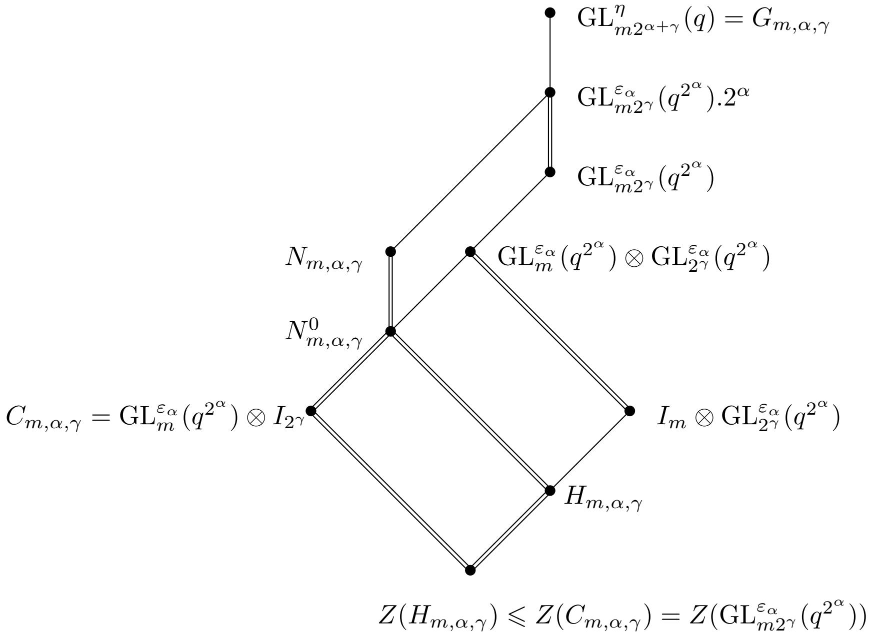
Обозначим через $R_{m,\alpha,\gamma}$ и $H_{m,\alpha,\gamma}$ образы групп $R_{\alpha,\gamma}$ и $H_{\alpha,\gamma}$ в $\mathrm{GL}^{\eta}_{m2^{\gamma+\alpha}}(q)$ относительно композиции этих вложений. Отметим, что группы $R_{m,\alpha,\gamma}$ и $H_{m,\alpha,\gamma}$ определены однозначно с точностью до сопряженности. Пусть $G_{m,\alpha,\gamma}=\mathrm{GL}^{\eta}_{m2^{\alpha+\gamma}}(q)$, $C_{m,\alpha,\gamma}=C_{G_{m,\alpha,\gamma}}(R_{m,\alpha,\gamma})$, $N_{m,\alpha,\gamma}=N_{G_{m,\alpha,\gamma}}(R_{m,\alpha,\gamma})$ и $N^0_{m,\alpha,\gamma}=\{g\in N_{m,\alpha,\gamma}|[g,Z(R_{m,\alpha,\gamma})]=1\}$.

Предложение 3. *Во введенных обозначениях*

(1) $C_{m,\alpha,\gamma}=\mathrm{GL}^{\varepsilon_\alpha}_{m}(q^{2^\alpha})\otimes I_{2^\gamma}$;
(2) $N^0_{m,\alpha,\gamma}=H_{m,\alpha,\gamma}C_{m,\alpha,\gamma}$, $[H_{m,\alpha,\gamma},C_{m,\alpha,\gamma}]=1$, $H_{m,\alpha,\gamma}\cap C_{m,\alpha,\gamma}=Z(H_{m,\alpha,\gamma})\leqslant Z(C_{m,\alpha,\gamma})$, $H_{m,\alpha,\gamma}$ *содержится в подгруппе* $I_m\otimes\mathrm{GL}^{\varepsilon_\alpha}_{2^\gamma}(q^{2^\alpha})$ *и*
$$H_{m,\alpha,\gamma}/Z(H_{m,\alpha,\gamma})R_{m,\alpha,\gamma}\simeq\begin{cases}\mathrm{O}^{\delta}_{2\gamma}(2), & \text{если } \alpha=0 \text{ и } \varepsilon=-\eta,\\ \mathrm{Sp}_{2\gamma}(2) & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$
(3) факторгруппа $N_{m,\alpha,\gamma}/N^0_{m,\alpha,\gamma}$ *является циклической порядка* 2^α;
(4) $N_{m,\alpha,\gamma}$ *содержится в подгруппе* $\mathrm{GL}^{\varepsilon_\alpha}_{m2^\gamma}(q^{2^\alpha}).2^\alpha$.

Доказательство. [8, §1], [9, §1]. $\square$

Добавим в предыдущую диаграмму группы из предложения 3.



Замечание 2. *В частности, легко видеть, что подгруппа* $N^0_{m,\alpha,\gamma} = H_{m,\alpha,\gamma}C_{m,\alpha,\gamma}$ *содержится в подгруппе* $\mathrm{GL}^{\varepsilon_\alpha}_{m}(q^{2^\alpha}) \otimes \mathrm{GL}^{\varepsilon_\alpha}_{2^\gamma}(q^{2^\alpha})$ *группы* $\mathrm{GL}^{\eta}_{m2^{\alpha+\gamma}}(q)$.

Предположим, $\varepsilon = -\eta$. Через $E_\gamma P$ обозначим центральное произведение экстраспециальной группы $E_\gamma = 2^{2\gamma+1}_{\delta}$ и полудиэдральной группы P порядка 2^{a+2}, такое что $Z(E_\gamma) = Z(P)$. Тогда $E_\gamma P$ абсолютно неприводимо вкладывается в $\mathrm{GL}^{\eta}_{2^{\gamma+1}}(q)$ и образ относительно этого вложения будем обозначать через $S_{1,\gamma}$.

Обозначим через $L_{1,\gamma}$ подгруппу, состоящую из тех элементов нормализатора в $\mathrm{GL}^{\eta}_{2^{\gamma+1}}(q)$ подгруппы $S_{1,\gamma}$, которые тривиально действуют на $[S_{1,\gamma}, S_{1,\gamma}]$. Для натурального числа m обозначим через $L_{m,1,\gamma}$ и $S_{m,1,\gamma}$ образы в $\mathrm{GL}^{\eta}_{m2^{\gamma+1}}(q)$ подгрупп $L_{1,\gamma}$ и $S_{1,\gamma}$ относительно вложения

$$\mathrm{GL}^{\eta}_{2^{\gamma+1}}(q) \hookrightarrow \mathrm{GL}^{\eta}_{m2^{\gamma+1}}(q),$$

задаваемого правилом

$$g \mapsto I_m \otimes g = \begin{pmatrix} g & & \\ & \ddots & \\ & & g \end{pmatrix}, \quad g \in \mathrm{GL}^{\eta}_{2^{\gamma+1}}(q).$$

Подгруппы $L_{m,1,\gamma}$ и $S_{m,1,\gamma}$ в группе $\mathrm{GL}^{\eta}_{m2^{\gamma+1}}(q)$ определяются однозначно с точностью до сопряженности.

Предложение 4. *Во введенных обозначениях пусть* $G_{m,1,\gamma} = \mathrm{GL}^{\eta}_{m2^{\gamma+1}}(q)$, $S = S_{m,1,\gamma}$, $S^0 = C_S([S,S])$. *Положим* $N = N_{G_{m,1,\gamma}}(S)$ *и* $N^0 = C_N(Z(S^0))$. *Тогда*

(1) $N^0 \leqslant \mathrm{GL}_{m2^\gamma}(q^2)$;
(2) $N \leqslant \mathrm{GL}_{m2^\gamma}(q^2).2$.

Доказательство. (1) Следует из доказательств [8, (1I)] и [9, (1M)];
(2) Следует из [8, (1I)] и [9, (1M)]. □

Для целых чисел $\gamma \geqslant 0$, $m \geqslant 1$, $k = 1, 2$ положим

$$R^k_{m,0,\gamma} = \begin{cases} S_{m,1,\gamma-1}, & \text{если } k = 2, \quad \gamma \geqslant 1 \quad \text{и} \quad \varepsilon = -\eta, \\ R_{m,0,\gamma} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Положим также $R^1_{m,\alpha,\gamma} = R_{m,\alpha,\gamma}$ (таким образом, подгруппа $R^2_{m,\alpha,\gamma}$ определена только если $\alpha = 0$, $\gamma \geqslant 1$ и $\varepsilon = -\eta$). Обозначим через $C^k_{m,\alpha,\gamma}$ и $N^k_{m,\alpha,\gamma}$ соответственно централизатор и нормализатор в группе $\mathrm{GL}^\eta_{m2^{\gamma+\alpha}}(q)$ подгруппы $R^k_{m,\alpha,\gamma}$. Далее, пусть $\bar{c} = (c_1, c_2, \dots, c_l)$, где $c_1, c_2, \dots, c_l$ — натуральные числа, или $\bar{c} = (0)$. Пусть для любого $i = 1, \dots, l$ через A_{c_i} обозначена элементарная абелева группа порядка 2^{c_i}, отождествляемая посредством регулярного представления с подгруппой симметрической группы $\mathrm{S}_{2^{c_i}}$, и $A_{\bar{c}} = A_{c_1} \wr A_{c_2} \wr \dots \wr A_{c_l}$ — подгруппа группы S_u, где $u = 2^{c_1+c_2+\dots+c_l}$. В случае, когда $\bar{c} = (0)$, положим $A_{\bar{c}} = 1$. Пусть также $d = 2^{\alpha+\gamma} m u$. Кроме того, положим $G^k_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}} = \mathrm{GL}^\eta_d(q)$. Группа $R^k_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}} = R^k_{m,\alpha,\gamma} \wr A_{\bar{c}}$ естественным образом вкладывается в группу $G^k_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}$, определяется в ней однозначно с точностью до сопряжения. За исключением случая, когда $\alpha = \gamma = 0$, $c_1 = 1$ и $\varepsilon = -\eta$, подгруппа $R^k_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}$ называется *базисной подгруппой* группы $G^k_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}$.

Предложение 5. *Пусть, как и ранее, $G = \mathrm{GL}^\eta_n(q)$ и V — естественный модуль для G, снабженный соответствующей формой (тривиальной при $\eta = 1$ и унитарной при $\eta = -1$). Отождествим G с $\mathrm{GL}^\eta(V)$. Пусть R — радикальная 2-подгруппа группы G. Тогда существуют соответствующие друг другу разложения*

(1) $$V = V_1 \perp \dots \perp V_s \perp V_{s+1} \perp \dots \perp V_t,$$

(2) $$R = R_1 \times \dots \times R_s \times R_{s+1} \times \dots \times R_t,$$

такие, что $R_i = \{\pm 1_{V_i}\}$ при $i = 1, \dots, s$ и R_i — базисная подгруппа группы $\mathrm{GL}^\eta(V_i)$ при $i = s+1, \dots, t$. Кроме того, если $\varepsilon = \eta$, то $s = 0$.

Доказательство. [8, (2B)], [9, (2B)]. □

Пусть теперь в прежних обозначениях R — радикальная 2-подгруппа группы G, V — естественный модуль для G и

$$V = V_1 \perp \dots \perp V_s \perp V_{s+1} \perp \dots \perp V_t, \qquad R = R_1 \times \dots \times R_s \times R_{s+1} \times \dots \times R_t$$

разложения, о которых идет речь в предложении 5. Пусть $R(k, m, \alpha, \gamma, \bar{c})$ — произведение тех из подгрупп R_i, для которых $R_i = R^k_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}$, $V(k, m, \alpha, \gamma, \bar{c})$ — сумма соответствующих этим R_i подпространств V_i, а $u(k, m, \alpha, \gamma, \bar{c})$ — число таких R_i. Пусть также $G(k, m, \alpha, \gamma, \bar{c}) = \mathrm{GL}^\eta(V(k, m, \alpha, \gamma, \bar{c}))$ — группа, отождествляемая с соответствующей подгруппой в G.

Предложение 6. *Во введенных обозначениях*

(3) $$N_G(R) = \prod_{k,m,\alpha,\gamma,\bar{c}} N_{G(k,m,\alpha,\gamma,\bar{c})}(R(k, m, \alpha, \gamma, \bar{c})),$$

(4) $$N_{G(k,m,\alpha,\gamma,\bar{c})}(R(k, m, \alpha, \gamma, \bar{c})) = N_{G^k_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}}(R^k_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}) \wr \mathrm{S}_{u(k,m,\alpha,\gamma,\bar{c})},$$

Доказательство. [12, Лемма 9]. □

4. Доказательство основных результатов

Доказательство предложения 1. Утверждения (1) и (2) следуют из [3, §4.6].

Утверждение (3) также можно вывести из результатов [3, §4.6], но в части, касающейся строения группы N, утверждение (3) получается также из предложения 3. Используем обозначения из предыдущего параграфа. В силу пункта (3) предложения 3 имеем $N_G(R) = N_{1,0,\gamma} = N^0_{1,0,\gamma}$. Из пунктов (1) и (2) того же предложения следует, что $N^0_{1,0,\gamma} = H_{1,0,\gamma}C_{1,0,\gamma}$, причем $C_{1,0,\gamma} \simeq \mathbb{Z}_{q-\eta}$, $[H_{1,0,\gamma}, C_{1,0,\gamma}] = 1$, $H_{1,0,\gamma} \cap C_{1,0,\gamma} = Z(H_{1,0,\gamma})$ и

$$H_{1,0,\gamma}/Z(H_{1,0,\gamma})R_{1,0,\gamma} \simeq \begin{cases} \mathrm{O}^\delta_{2\gamma}(2), & \text{если } \alpha = 0 \text{ и } \varepsilon = -\eta, \\ \mathrm{Sp}_{2\gamma}(2) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Следовательно,

$$Z(H_{1,0,\gamma})R_{1,0,\gamma} = (H_{1,0,\gamma} \cap C_{1,0,\gamma})R_{1,0,\gamma} = C_{1,0,\gamma}R_{1,0,\gamma}.$$

Поскольку Z_α совпадает с $O_2(Z(\mathrm{GL}^\eta_{2^\gamma}(q)))$, имеем $Z_\alpha = Z_0 \leqslant C_{1,0,\gamma}$ и

$$Z(H_{1,0,\gamma})R_{1,0,\gamma} = \mathbb{Z}_{q-\eta} \circ E_\gamma = \mathbb{Z}_{q-\eta} \circ 2^{1+2\gamma}_\delta.$$

Таким образом,

$$N_G(R) = \begin{cases} (\mathbb{Z}_{q-\eta} \circ 2^{1+2\gamma}_\delta).\,\mathrm{O}^\delta_{2\gamma}(2), & \text{если } \varepsilon = -\eta, \\ (\mathbb{Z}_{q-\eta} \circ 2^{1+2\gamma}).\,\mathrm{Sp}_{2\gamma}(2), & \text{если } \varepsilon = \eta. \end{cases}$$

Справедливость утверждения (3) доказываемого предложения в части, относящейся к вложению подгруппы N в элемент того или иного класса $\mathcal{C}_5$, $\mathcal{C}_6$ или $\mathcal{C}_8$, следует из сопряженности абсолютно неприводимых подгрупп группы G, изоморфных R, которую гарантирует утверждение (2), и [3, §3.5, §4.5, §4.6 и §4.8] (см., в частности, таблицы 3.5A–3.5F[1]). □

Доказательство теоремы 1. Пусть $G = \mathrm{GL}^\eta_n(q)$, $H \leqslant G$, $O_2(H) \nleqslant Z(G)$. Согласно замечанию 1, группа H нормализует некоторую радикальную 2-подгруппу R группы G, причем $O_2(H) \leqslant O_2(N_G(R))$, и мы можем предполагать, что $H = N_G(R)$.

Если $(q, 2) \neq 1$, то $N_G(R)$ содержится в некоторой собственной параболической подгруппе по теореме Бореля-Титса [14], то есть содержится в некотором элементе класса $\mathcal{C}_1$. Далее предполагаем, что $(q, 2) = 1$, и в этом случае имеют место разложения (1) – (4). Если в разложении (3) содержится более одного сомножителя, то подгруппа H снова попадает в некоторый элемент из класса $\mathcal{C}_1$. Таким образом, можно считать, что $s = 0, t = 1$, $G = G(k, m, \alpha, \gamma, \bar{c})$ для некоторых $k, m, \alpha, \gamma, \bar{c}$ и

$$N_G(R) = N_{G(k,m,\alpha,\gamma,\bar{c})}(R(k, m, \alpha, \gamma, \bar{c})) = N_{G^k_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}}(R^k_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}) \wr \mathrm{S}_{u(k,m,\alpha,\gamma,\bar{c})}.$$

Если $u(k, m, \alpha, \gamma, \bar{c}) > 1$, то $N_G(R)$ содержится в некотором элементе класса $\mathcal{C}_2$.

Далее, мы предполагаем, что $u(k, m, \alpha, \gamma, \bar{c}) = 1$, и поэтому $G = G^k_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}$, а $R = R^k_{m,\alpha,\gamma,\bar{c}}$. Из определения группы R следует, что R является полупрямым произведением группы $R_1 \times \ldots \times R_u$ и группы $A_{\bar{c}}$, где $u = 2^{c_1+c_2+\ldots+c_l}$ и каждая из групп R_i совпадает с $R^k_{m,\alpha,\gamma}$. Поскольку $A_{\bar{c}}$ вкладывается в группу S_u, то

---

[1] Отметим, что в таблице 3.5.B содержится неточность: требование четности f, указанное в качестве условия существования класса $\mathcal{C}_6$ в унитарных группах, не нужно. Ср. [4, таблицы 8.1–8.84].

$N_G(R) \leqslant N_{G^k_{m,\alpha,\gamma}}(R^k_{m,\alpha,\gamma}) \wr \mathrm{S}_u$. Следовательно, если $u \neq 1$, то $N_G(R)$ содержится в некотором элементе класса $\mathcal{C}_2$.

Таким образом, можно считать, что $u = 1$, $R = R^k_{m,\alpha,\gamma}$, $G = G^k_{m,\alpha,\gamma}$. Допустим $\alpha > 0$, тогда $k = 1$, и в силу пункта (4) предложения 3 следует, что $N_G(R) = N_{m,\alpha,\gamma}$ содержится в группе $\mathrm{GL}^{\varepsilon_\alpha}_{m2^\gamma}(q^{2^\alpha}).2^\alpha$. Следовательно, $N_G(R)$ содержится в некотором элементе класса $\mathcal{C}_3$ при $\eta = +$ и в некотором элементе класса $\mathcal{C}_2$ при $\eta = -$.

Далее считаем, что $\alpha = 0$. Тогда $\varepsilon_\alpha = \eta$ и $N_G(R) = N^k_{m,0,\gamma}$.

Пусть $k = 2$, тогда $R = R^2_{m,0,\gamma} = S_{m,1,\gamma-1}$, и в силу предложения 4 получаем, что $N_G(R)$ содержится в подгруппе $\mathrm{GL}_{m2^{\gamma-1}}(q^2).2$. Следовательно, $N_G(R)$ содержится в некотором элементе класса $\mathcal{C}_3$ при $\eta = +$ и в некотором элементе класса $\mathcal{C}_2$ при $\eta = -$. Далее считаем, что $k = 1$.

В силу замечания 2, при $m > 1$ справедливо включение

$$N_G(R) = N^0_{m,0,\gamma} \leqslant \mathrm{GL}^\eta_m(q) \otimes \mathrm{GL}^\eta_{2^\gamma}(q) \in \mathcal{C}_4.$$

Наконец, мы можем считать, что

$$m = 1, R = R_{1,0,\gamma} = R_{0,\gamma}, G = G_{1,0,\gamma} = \mathrm{GL}^\eta_{2^\gamma}(q) \text{ и } n = 2^\gamma.$$

Таким образом, подгруппа $N = N_G(R)$ такая, как описано в утверждении (3) предложения 1, и теорема доказана. □

Доказательство предложения 2. Предложение 2 доказывается аналогично предложению 1 с помощью (см. [3, §3.5, §4.5, §4.6 и §4.8]). Информацию о строении группы N в утверждении (3) можно получить также из [2, предложение 1] (аналог предложения 3 для случая, когда r — нечетное число). □

References

[1] M. Aschbacher, *On the maximal subgroups of the finite classical groups*, Invent. math., **76** (1984), 469–514. Zbl 0537.20023

[2] A. Galt, W. Guo, E. M. Averkin, and D. O. Revin, *On the Local Case in the Aschbacher Theorem for Linear and Unitary Groups*, Siberian Mathematical Journal, **55**:2 (2014), 239–245. Zbl 1307.20041

[3] P. Kleidman, M. Liebeck, *The Subgroup Structure of the Finite Classical Groups*, (London Math. Soc. Lecture Note Ser., **129**), Cambridge University Press, Cambridge, 1990. Zbl 0697.20004

[4] J.N. Bray, D.F. Holt, C.M. Roney-Dougal, *The Maximal Subgroups of the Low-Dimensional Finite Classical Groups*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **407**, Cambridge University Press, Cambridge, 2013. Zbl 1303.20053

[5] J.L. Alperin, P.Fong, *Weights for Symmetric and General Linear Groups*, Journal of Algebra, **131** (1990), 2–22. Zbl 0714.20007

[6] J. An, *Weights for classical groups*, Transactions of the AMS, **342**:1 (1994), 1–42. Zbl 0822.20008

[7] J. An, 2-*Weights for classical groups*, J. reine angew. Math., **439** (1993), 159–204. Zbl 0769.20016

[8] J. An, 2-*Weights for general linear groups*, Journal of Algebra, **149** (1992), 500–527. Zbl 0779.20003

[9] J. An, 2-*Weights for unitary groups*, Transactions of the AMS, **339**:1 (1993), 251–278. Zbl 0820.20010

[10] D.O. Revin, *The* D_π*-property in finite simple groups*, Algebra and Logic, **47**:3 (2008), 210–227. Zbl 1155.20018

[11] D.O. Revin, *The* D_π*-property of finite groups in case* $2 \notin \pi$, Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, **13**:1 (2007), 166–182. Zbl 1238.20026

[12] D.O. Revin, *The D_π-property of linear and unitary groups*, Siberian Mathematical Journal, **49**:2 (2008), 353–361. Zbl 1154.20019

[13] D.O. Revin, *Superlocals in Symmetric and Alternating Groups*, Algebra and Logic, **42**:3 (2003), 192–206. Zbl 1035.20002

[14] A. Borel, J. Tits, *Eléments unipotents et sousgroupes paraboliques de groupes réductifs, I*, Invent. math., **12**:2 (1971), 95–104. Zbl 0238.20055

Alexey Albertovich Galt
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug avenue,
630090, Novosibirsk, Russia;
Novosibirsk State University,
2 Pirogova Street,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: galt84@gmail.com

Danila Olegovich Revin
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug avenue,
630090, Novosibirsk, Russia;
Novosibirsk State University,
2 Pirogova Street,
630090, Novosibirsk, Russia
Department of Mathematics,
University of Science and Technology of China,
Hefei 230026, P. R. China
E-mail address: revin@math.nsc.ru