S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 122–129 (2016) УДК 519.173+519.178

DOI 10.17377/semi.2016.13.010 MSC 05C12+05C85

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕКТОРА РАЗНООБРАЗИЯ ШАРОВ ЗАДАННОГО ГРАФА

Т.И. ФЕДОРЯЕВА

Abstract. For an ordinary finite not necessarily connected graph, the diversity vector of balls (ith component of the vector is equal to the number of different balls of radius i) is studied. Properties of metric balls in such graphs are established. In particular, a coincidence condition of balls with centers at different vertices is found. Based on these properties, the algorithm of computing the diversity vector of balls of a given graph $G = (V, E)$ with a running time $O(|V|^3)$ is developed.

Keywords: graph, distance, distance matrix, metric ball, number of balls, diversity vector of balls, algorithm, complexity.

Введение

В работе изучается разнообразие шаров в метрическом пространстве обыкновенного графа. Пусть $\tau_i(G)$ — число всех различных шаров радиуса i в метрическом пространстве конечного графа $G = (V, E)$ с обычным расстоянием пути между его вершинами. Для связного графа G *расстояние* $\rho_G(u, v)$ между вершинами $u, v \in V$ определяется как длина кратчайшей цепи, соединяющей эти вершины, при этом $d(G) = \max_{u,\, v\in V} \rho_G(u, v)$ есть его *диаметр.*

Определение 1 [5]. Пусть G — связный граф и $d = d(G)$. Вектор $\tau(G) = (\tau_0(G), \tau_1(G), \dots, \tau_d(G))$ называется *вектором разнообразия шаров* графа G.

Различные свойства векторов разнообразия шаров и их компонент установлены в [3–8, 10, 11, 14] для связных обыкновенных графов. Классы графов со специальным разнообразием шаров исследованы в [8, 10, 11]. Цель настоящей работы

Fedoryaeva, T.I., Computing the diversity vectors of balls of a given graph.

Работа поддержана РФФИ (грант 14-01-00507).

Поступила 18 февраля 2016 г., опубликована 3 марта 2016 г.

— изучение свойств шаров в метрических пространствах графов и построение алгоритма вычисления вектора разнообразия шаров заданного графа.

При естественном задании графа $G = (V, E)$ (матрица смежности, списки смежности вершин и т.д.), вообще говоря, не гарантируется связность возникающего графа. Поэтому при разработке алгоритма вычисления вектора разнообразия шаров $\tau(G)$ заданного графа G требуется либо делать дополнительную проверку связности графа либо естественным способом распространить понятие вектора разнообразия шаров на общий случай обыкновенных графов, включая несвязные графы. Хотя проверка связности может быть осуществлена стандартным алгоритмом за время $O(|V| + |E|)$, второй подход представляется более удачным ввиду его общности. Поэтому в разд. 2 определение вектора $\tau(G)$ распространяется на случай несвязных графов, а в разд. 3 разработан алгоритм Diversity(G) вычисления вектора разнообразия шаров, который применим для произвольного конечного обыкновенного графа G. Алгоритм базируется на полученных в разд. 2 свойствах метрических шаров в таких графах, в частности доказан критерий совпадения шаров с центрами в заданных вершинах (теорема 1). Время работы алгоритма Diversity(G) составляет $O(|V|^3)$ (теорема 2).

1. Предварительные сведения

В статье используются общепринятые понятия и обозначения теории графов [2, 12], а также стандартные понятия и конструкции, связанные с разработкой и анализом алгоритмов [1, 9, 13]. Рассматриваются только конечные обыкновенные (без петель и кратных рёбер) графы $G = (V, E)$ с множеством вершин $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Для задания графа используется его матрица смежности или списки смежности его вершин.

Матрица смежности графа $G = (V, E)$ представляет собой бинарную матрицу $\mathcal{A}(G) = (a_{uv})_{u,v \in V}$ размерности $|V| \times |V|$ такую, что $a_{uv} = 1$, если в графе есть ребро $uv \in E$. Заметим, что матрица смежности определяет граф однозначно с точностью до перенумераций строк и столбцов, а именно графы G и H изоморфны тогда и только тогда, когда матрицы $\mathcal{A}(G)$ и $\mathcal{A}(H)$ получаются друг из друга одинаковыми перестановками строк и столбцов (см., например [2]). Иными словами, матрицы $\mathcal{A}(G)$ и $\mathcal{A}(H)$ перестановочно подобны.

Более экономным может оказаться представление графа $G = (V, E)$ в виде *списков смежности*, которое использует массив $\mathrm{Adj}(v)_{v \in V}$ размерности $|V|$. Для каждой вершины $v \in V$ список $\mathrm{Adj}(v)$ состоит из всех вершин, смежных с v в графе G.

Для вычисления вектора разнообразия шаров заданного графа нас будут интересовать расстояния $\rho_G(u, v)$ между всеми парами его вершин $u, v \in V$. Распространим понятие метрики ρ_G на несвязные графы. Полагаем $\rho_G(u, v) = \infty$, если в графе G не существует цепи, соединяющей вершины $u, v \in V$ (при этом считаем, что $\infty + \infty = \infty$, $n + \infty = \infty$ и $\infty > n$ для любого $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$). Матрица $\mathcal{D}(G) = (d_{uv})_{u,v \in V}$, где $d_{uv} = \rho_G(u, v)$, называется *матрицей расстояний* графа G. Известны различные алгоритмы вычисления матрицы $\mathcal{D}(G)$ [1], мы будем использовать следующие два алгоритма.

В алгоритме $\mathrm{FW}(G)$ применяется метод Флойда-Уоршелла нахождения всех расстояний $\rho_G(u, v)$, $u, v \in V$ для взвешенного ориентированного графа G по его матрице весов $\mathcal{W}(G) = (w_{uv})_{u,v \in V}$ (см., например [1]). Матрица весов $\mathcal{W}(G)$

рассматриваемых в работе графов совпадает с матрицей смежности $\mathcal{A}(G)$, за исключением элементов w_{uv} при $u \neq v$ и $uv \notin E$ (в этом случае $w_{uv} = \infty$). В приведенном алгоритме в качестве ∞ используется константа c_∞ — машинная бесконечность или достаточно большая константа, превышающая длину диаметральной цепи (например $|V|$).

Алгоритм $\mathrm{FW}(G)$.
Граф $G = (V, E)$ задан матрицей смежности $\mathcal{A}(G) = (a_{uv})_{u,v\in V}$.

Шаг 0 (инициализация — построение матрицы весов).
Для всех $u, v = 1, 2, \ldots, |V|$ полагаем

$$d_{uv} := \begin{cases} c_\infty, & \text{если } u \neq v \text{ и } a_{uv} = 0, \\ a_{uv}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Шаг $k = 1, 2, \ldots, |V|$.
Для всех $u, v = 1, 2, \ldots, |V|$ вычисляем

$$d_{uv} := \begin{cases} d_{uk} + d_{kv}, & \text{если } d_{uk} < c_\infty,\ d_{kv} < c_\infty \text{ и } d_{uk} + d_{kv} < d_{uv}, \\ d_{uv}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

После выполнения шага $k = |V|$ алгоритм закончит работу. На выходе алгоритма $\mathrm{FW}(G)$ получим матрицу расстояний $\mathcal{D}(G) = (d_{uv})_{u,v\in V}$ графа $G = (V, E)$. Время его работы есть $O(|V|^3)$.

В случае разреженных графов, заданных списками смежности $\mathrm{Adj}(v)_{v\in V}$, более эффективный для таких графов алгоритм основан на методе поиска в ширину, позволяющем найти все расстояния от источника. Матрица расстояний $\mathcal{D}(G)$ графа G вычисляется в результате работы процедуры поиска в ширину $\mathrm{BFS}(G, v)$ для каждой вершины $v \in V$ [1]. Время работы такого алгоритма составляет $O(|V|^2 + |V|\,|E|)$.

2. Разнообразие шаров графа (не обязательно связного)

Пусть $G = (V, E)$ — произвольный обыкновенный граф (не обязательно связный). Через $k(G)$ обозначим число компонент связности графа G и через d_G — наибольшую длину кратчайших цепей графа G. Очевидно, что

$$d_G = \max_{1\le i\le k(G)} d(G_i),$$

где $G_1, \ldots, G_{k(G)}$ — все компоненты связности графа G, и в случае связного графа G имеем $d_G = d(G)$.

Пусть $B_i^G(u) = \{v \in V \mid \rho_G(u, v) \le i\}$ — шар радиуса i с центром в вершине $u \in V$ относительно метрики $\rho_G : V^2 \to \mathbb{Z}_{\ge 0} \cup \{\infty\}$. Распространим понятие вектора разнообразия шаров на несвязные графы.

Определение 2. Вектор $\tau(G) = (\tau_0(G), \tau_1(G), \ldots, \tau_{d_G}(G))$ называется *вектором разнообразия шаров* графа G (не обязательно связного).

В следующих леммах устанавливаются свойства шаров и вектора разнообразия шаров $\tau(G)$ произвольного графа G.

Лемма 1. *Пусть u, v — вершины графа G и $i \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$. Тогда*
(i) *если $0 < \rho_G(u, v) < \infty$, то $B_0^G(u) \neq B_0^G(v)$ и $B_{d_G}^G(u) = B_{d_G}^G(v)$;*
(ii) *если $\rho_G(u, v) = \infty$, то $B_i^G(u) \neq B_i^G(v)$ для любого i;*
(iii) *если $B_i^G(u) = B_i^G(v)$, то $B_{i+1}^G(u) = B_{i+1}^G(v)$.*

Доказательство. Утверждения (i), (ii) вытекают непосредственно из определений.

Докажем (iii). Пусть $B_i^G(u) = B_i^G(v)$. Тогда вершины u и v принадлежат одной компоненте связности H графа G и $B_j^G(u) = B_j^H(u)$, $B_j^G(v) = B_j^H(u)$ для любого $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Предполагая, что $B_{i+1}^G(u) \neq B_{i+1}^G(v)$, по аналогичному свойству для связных графов (лемма 1 из [6]) приходим к противоречию $B_i^G(u) = B_i^H(u) \neq B_i^H(v) = B_i^G(v)$. □

Пусть $G_1, \ldots, G_{k(G)}$ — все компоненты связности графа G. Дополним вектор разнообразия шаров $\tau(G_i)$ связного графа G_i до вектора длины $d_G + 1$, добавляя $d_G - d(G_i)$ единиц на места $d(G_i) + 1, d(G_i) + 2, \ldots, d_G$. Получившийся вектор обозначим через $\tilde{\tau}(G_i)$. Очевидно, что

$$\tilde{\tau}(G_i) = (\tau_0(G_i), \tau_1(G_i), \ldots, \tau_{d_G}(G_i)).$$

Далее будем использовать операцию покомпонентного сложения целочисленных векторов одинаковой длины.

Используя лемму 1, нетрудно доказать следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть* $\tau(G) = (\tau_0, \ldots, \tau_{d_G})$ *— вектор разнообразия шаров графа* $G = (V, E)$ *и* $G_1, \ldots, G_{k(G)}$ *— компоненты связности* G. *Тогда*

(i) $\tau_0 = |V| \geq \tau_1 \geq \ldots \geq \tau_i \geq \tau_{i+1} \geq \ldots \geq \tau_{d_G} = k(G)$;

(ii) $d_G = \min\{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \tau_i = k(G)\}$;

(iii) $\tau(G) = \sum\limits_{i=1}^{k(G)} \tilde{\tau}(G_i)$.

Для вычисления вектора разнообразия шаров графа $G = (V, E)$ будем использовать матрицу $\mathcal{E}(G) = (\varepsilon_{uv})_{u,v \in V}$, которую определим следующим образом. Если $u = v$ или $\rho_G(u, v) = \infty$, считаем $\varepsilon_{uv} = \rho_G(u, v)$. При $0 < \rho_G(u, v) < \infty$ полагаем

$$V_{uv} = \{w \in V \mid \rho_G(u, w) \neq \rho_G(v, w), \rho_G(u, w) < \infty, \rho_G(v, w) < \infty\},$$

$$\varepsilon_{uv} = \max\{\rho_G(u, w) - 1, \rho_G(v, w) - 1 \mid w \in V_{uv}\}.$$

Замечание 1. *Значение* ε_{uv} *определено корректно и* $\varepsilon_{uv} \geq 0$, *поскольку* $u \in V_{uv}$ *и* $\rho_G(u, v) > \rho_G(u, u) = 0$ *при* $0 < \rho_G(u, v) < \infty$.

Замечание 2. *В определении множества* V_{uv} *условие* $\rho_G(v, w) < \infty$ *можно опустить, поскольку* $0 < \rho_G(u, v) < \infty$.

Лемма 3. *Пусть* u, v *— вершины графа* G *и* $0 < \rho_G(u, v) < \infty$. *Тогда*

$$\varepsilon_{uv} = \max\{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid B_i^G(u) \neq B_i^G(v)\}.$$

Доказательство. По лемме 1 значение $\max\{i \mid B_i^G(u) \neq B_i^G(v)\}$ определено, обозначим его через ε. В силу определения ε_{uv} имеем $\varepsilon_{uv} = \max\{\rho_G(u, w) - 1, \rho_G(v, w) - 1\}$ для некоторой вершины $w \in V_{uv}$ такой, что $\rho_G(u, w) \neq \rho_G(v, w) < \infty$. Пусть, например, $0 \leq \rho_G(u, w) < \rho_G(v, w)$. Тогда $w \notin B_{\rho_G(v,w)-1}^G(v)$ и $w \in B_{\rho_G(u,w)}^G(u) \subseteq B_{\rho_G(v,w)-1}^G(u)$. Следовательно,

$$B_{\varepsilon_{uv}}^G(v) = B_{\rho_G(v,w)-1}^G(v) \neq B_{\rho_G(v,w)-1}^G(u) = B_{\varepsilon_{uv}}^G(u).$$

Поэтому $\varepsilon_{uv} \leq \varepsilon$.

Докажем обратное неравенство. По условию вершины u, v принадлежат одной компоненте связности графа G и $B^G_\varepsilon(u) \neq B^G_\varepsilon(v)$. Поэтому для некоторой вершины w имеем $\rho_G(u,w) \leq \varepsilon < \rho_G(v,w) < \infty$ или $\rho_G(v,w) \leq \varepsilon < \rho_G(u,w) < \infty$. Следовательно, $w \in V_{uv}$ и $\varepsilon_{uv} \geq \max\{\rho_G(u,w)-1, \rho_G(v,w)-1\} \geq \varepsilon$. $\square$

Теорема 1 (критерий совпадения шаров)**.** *Пусть u, v — вершины графа G и $i \in \mathbb{Z}_{>0}$. Тогда выполняется следующая эквивалентность*

$$B^G_i(u) = B^G_i(v) \Leftrightarrow \varepsilon_{uv} < i.$$

Доказательство. Если $u = v$, то $\varepsilon_{uv} = 0$ и $B^G_i(u) = B^G_i(v)$. При $\rho_G(u,v) = \infty$ имеем $\varepsilon_{uv} = \infty$ и $B^G_i(u) \neq B^G_i(v)$ по лемме 1(ii). Поэтому будем считать, что $0 < \rho_G(u,v) < \infty$.

Пусть $B^G_i(u) = B^G_i(v)$. По лемме 1(iii) имеем $B^G_j(u) = B^G_j(v)$ для любого $j \geq i$. Кроме того, $B^G_{\varepsilon_{uv}} \neq B^G_{\varepsilon_{uv}}(v)$ по лемме 3. Следовательно, заключаем $\varepsilon_{uv} < i$.

Для доказательства обратного утверждения достаточно заметить, что если $B^G_i(u) \neq B^G_i(v)$, то $\varepsilon_{uv} \geq i$ по лемме 3. $\square$

3. Алгоритм вычисления вектора разнообразия шаров

Свойства шаров, полученные в разд. 2, дают естественный способ вычисления вектора разнообразия шаров $\tau(G)$ произвольного графа G, не обязательно связного. Вектор $\tau(G) = (\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{d_G})$ будем строить по шагам. На шаге $i = 0, 1, \ldots, d_G$ вычисляется значение τ_i и определяются центры всех различных шаров радиуса i. Заметим, что выбор множества таких центров неоднозначен, так как шар может иметь несколько центров. Однако, если в каждом шаре радиуса i выбрать наименьший его центр (относительно естественного порядка на $\mathbb{N}$), то множество C_i таких центров шаров определяется единственным образом. На шаге i будем просматривать элементы множества C_{i-1} в порядке возрастания и последовательно вычеркивать из них центры $u \in C_{i-1}$, в которых шар $B^G_i(u)$ совпадает с ранее выбранным шаром $B^G_i(v)$ с меньшим центром $v \in C_{i-1}$, $v < u$. В силу леммы 1(iii) нетрудно понять, что в результате мы получим множество центров C_i и $\tau_i = \tau_{i-1} - q_i$, где q_i — число вычеркнутых на шаге i центров из C_{i-1}.

Проверку равенства $B^G_i(u) = B^G_i(v)$ будем осуществлять в соответствии с теоремой 1. Поэтому предварительно нам потребуется вычислить матрицу $\mathcal{E}(G)$ и значение d_G. На заключительном шаге $i = d_G$ вычисляется последняя компонента вектора разнообразия шаров $\tau(G)$.

Формализуем приведенный способ вычисления вектора $\tau(G)$. Для вычеркивания вершин графа будем использовать массив C размерности $|V|$ с булевыми значениями его элементов 0,1. При этом полагаем $C(u) = 0$, как только вычеркивается вершина $u \in V$. Описанный процесс вычисления вектора разнообразия шаров $\tau(G)$ приведен в следующем алгоритме.

Алгоритм Diversity(G).

На вход подается граф $G = (V, E)$.

1. Вычислим матрицу расстояний $\mathcal{D}(G) = (d_{uv})_{u,v \in V}$ графа G с помощью одного из алгоритмов, рассмотренных в разд. 1 (в зависимости от способа задания графа G).

2. По матрице расстояний $\mathcal{D}(G)$ вычислим матрицу $\mathcal{E}(G) = (\varepsilon_{uv})_{u,v\in V}$ и значение d_G следующим образом (в качестве ∞ здесь, как и в разд. 1, используем константу c_∞).
2.1. Полагаем $d_G := 0$.
2.2. Для всех $u, v = 1, 2, \ldots, |V|$ последовательно выполняем п.2.3 – п.2.6. По завершении переходим к п.3.
2.3. Если $0 < d_{uv} < c_\infty$, то переходим к п.2.4, иначе полагаем $\varepsilon_{uv} := d_{uv}$ и переходим к п.2.6.
2.4. Полагаем $d_G := \max(d_G,\, d_{uv})$ и $\varepsilon_{uv} := 0$.
2.5. Для каждого $w = 1, 2, \ldots, |V|$ последовательно выполняем: если $d_{uw} < c_\infty$ и $d_{uw} \neq d_{vw}$, то полагаем $\varepsilon_{uv} := \max(\varepsilon_{uv},\, d_{uw} - 1,\, d_{vw} - 1)$.
2.6. Переходим к следующим значениям u, v в п.2.2.
3. Вычислим вектор $(\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{d_G})$.
Шаг 0 (инициализация).
3.1. Полагаем $\tau_0 := |V|$, $i := 1$ и для всех $u = 1, 2, \ldots, |V|$ определяем $C(u) := 1$ (вычеркнутых вершин нет).
Шаг $i > 0$ (вычисление τ_i и C_i).
3.2. Если $i \leq d_G$, то последовательно выполняем п.3.3 – п.3.11, иначе алгоритм заканчивает работу.
3.3. Полагаем $\tau_i := \tau_{i-1}$.
3.4. Для каждого $u = 1, 2, \ldots, |V|$ последовательно выполняем п.3.5 – п.3.10. По завершении переходим к п.3.11.
3.5. Если $C(u) = 1$, то переходим к п.3.6, иначе переходим к п.3.10.
3.6. Полагаем $v := u - 1$.
3.7. Если $v > 0$ и $C(u) = 1$ (вершина u ещё не вычеркнута, и есть меньшая непросмотренная вершина v), то переходим к п.3.8, иначе переходим к п.3.10.
3.8. Если $C(v) = 1$ (вершина v ещё не вычеркнута) и $\varepsilon_{uv} < i$, то полагаем $C(u) := 0$ и $\tau_i := \tau_i - 1$ (вычеркиваем вершину u и не учитываем шар $B_i^G(u)$).
3.9. Полагаем $v := v - 1$ и переходим к п.3.7.
3.10. Переходим к следующему значению u в п.3.4.
3.11. Полагаем $i := i + 1$ и переходим к п.3.2.
На выходе алгоритма $\textsc{Diversity}(G)$ выдается вектор $(\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{d_G})$.

Теорема 2. *Алгоритм* $\textsc{Diversity}(G)$ *вычисляет вектор разнообразия шаров обыкновенного конечного графа* $G = (V, E)$ *за время* $O(|V|^3)$.

Доказательство. Сначала заметим, что в п.2 реализован простой алгоритм вычисления матрицы $\mathcal{E}(G) = (\varepsilon_{uv})_{u,v\in V}$ и числа d_G на основе их определений. В п.2.5 также учитывается замечание 2.

Далее индукцией по $i = 0, 1, \ldots, d_G$ докажем, что после i-ой итерации цикла из п.3.2 имеем $C_i = \{u \in V \,|\, C(u) = 1\}$ и $\tau_i(G) = \tau_i$. Действительно, $C_0 = V$ и $\tau_0 = |V|$ по лемме 1. При этом значения τ_0 и $C(u)$, $u \in V$ определяются таким же образом при инициализации в п.3.1. Поэтому базис индукции при $i = 0$ выполняется.

Пусть $i > 0$. По индукционному предположению в п.3.4 и п.3.5 осуществляется просмотр всех элементов множества C_{i-1} в порядке возрастания. Для текущей просматриваемой вершины $u \in C_{i-1}$ рассмотрим работу тела цикла, задаваемого инструкциями в п.3.7 – п.3.9. В силу теоремы 1 равенство $B_i^G(u) = B_i^G(v)$ эквивалентно условию $\varepsilon_{uv} < i$. Поэтому после завершения работы этого цикла вершина u остается невычеркнутой, только если шар $B_i^G(u)$

не совпадает ни с одним из шаров $B_i^G(v)$ с меньшим центром v, $v < u$. В противном случае вершина u вычеркивается (значение $C(u)$ меняется в п.3.8 на 0) и далее не рассматривается благодаря п.3.7 и п.3.8, при этом значение переменной τ_i уменьшается на 1, так как найден повторяющийся шар $B_i^G(u)$. Таким образом, после i-ой итерации цикла из п.3.2 невычеркнутыми останутся только вершины множества центров C_i и $\tau_i = |C_i|$.

В результате цикл из п.3.2 после d_G-ой итерации, а значит и весь алгоритм Diversity(G), закончит работу, и на выходе получим вектор $(\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{d_G})$, равный по доказанному $\tau(G)$.

Оценим время работы алгоритма. Как замечено в разд. 1, время работы процедуры вычисления матрицы расстояний $\mathcal{D}(G)$ в п.1 есть $O(|V|^3)$. Построение матрицы $\mathcal{E}(G)$ в п.2 также требует времени $O(|V|^3)$, так как имеются 3 вложенных цикла. Число итераций цикла из п.3.2 есть $O(d_G)$, а остальных циклов п.3 — $O(|V|)$. Таким образом, суммарное время работы алгоритма Diversity(G) составляет $O(|V|^3) + O(d_G|V|^2) = O(|V|^3)$. □

Заметим, что если на вход алгоритма Diversity(G) подается связный граф $G = (V, E)$, то можно отказаться от вычисления значения d_G, при этом условие $i \leq d_G$ цикла из п.3.2 нужно изменить на неравенство $\tau_{i-1} > 1$. Лемма 2 гарантирует корректность таким образом модифицированного алгоритма. Проверка связности графа G может быть сделана стандартным алгоритмом за время $O(|V| + |E|)$ (см., например [13]). Поэтому общее время модифицированного алгоритма также составит $O(|V|^3)$.

Для несвязного графа $G = (V, E)$ каждая из матриц: матрица смежности $\mathcal{A}(G)$, матрица расстояний $\mathcal{D}(G)$ и матрица $\mathcal{E}(G)$ перестановочно подобна блочно-диагональной матрице. Поэтому для вычисления вектора разнообразия шаров $\tau(G)$ также можно использовать способ вычисления, указанный в утверждении (iii) леммы 2. Для этого требуется сначала выделить компоненты связности $G_1, \ldots, G_{k(G)}$ исходного графа G. Это можно сделать с помощью алгоритма, основанного на поиске в глубину, за время $O(|V| + |E|)$ (см., например [13]). Далее для каждой компоненты G_i нужно применить модифицированный алгоритм вычисления вектора $\tau(G_i)$. В заключение остается покомпонентно просуммировать расширенные векторы $\tilde{\tau}(G_1), \ldots, \tilde{\tau}(G_{k(G)})$ согласно лемме 2(iii). Такой способ вычисления вектора разнообразия шаров $\tau(G)$ может оказаться более эффективным для графов G с большим числом компонент связности.

References

[1] T.H. Cormen, Ch.E. Leiserson, R.L. Rivest and C. Stein, *Introduction to Algorithms*, MIT Press, Cambridge, 2009. ISBN: 9780262033848

[2] V.A. Emelichev, O.I. Melnikov, V.I. Sarvanov, and R.I. Tyshkevich, *Lectures on Graph Theory*, B.I.Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1994.

[3] A.A. Evdokimov, *Locally isometric embeddings of graphs and the metric prolongation property*, Discrete Anal. and Oper. Research, **1** (1995), 7–14, translated from Sibirsk. Zhur. Issled. Oper., **1**:1 (1994), 5–12. Zbl 0839.05036 MR1292833

[4] A.A. Evdokimov, T.I. Fedoryaeva, *On the problem of characterizing the diversity vectors of balls*, J.Appl.Ind.Math., **8**:2 (2014), 190–195, translated from Diskretn. Anal. Issled. Oper., **21**:1 (2014), 44–52. DOI: 10.1134/S1990478914020057 MR3288380

[5] T.I. Fedoryaeva, *Diversity of balls in the metric spaces of trees*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **12**:3 (2005), 74–84. Zbl 1249.05090 MR2197796

[6] T.I. Fedoryaeva, *Diversity vectors of balls in graphs and estimates of the components of the vectors*, J.Appl.Ind.Math., **2**:3 (2008), 341–357, translated from Diskretn. Anal. Issled. Oper., **14**:2 (2007), 47–67. DOI: 10.1134/S1990478908030058 MR2368731

[7] T.I. Fedoryaeva, *Exact upper estimates of the number of different balls of given radius in graphs with fixed number of vertices and diameter*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **16**:6 (2009), 74–92. Zbl 1249.05092 MR2649144

[8] T.I. Fedoryaeva, *On the graphs with given diameter, number of vertices, and local diversity of balls*, J.Appl.Ind.Math., **5**:1 (2011), 44–50, translated from Diskretn. Anal. Issled. Oper., **17**:1 (2010), 65–74. DOI: 10.1134/S1990478911010054 MR2667014

[9] T.I. Fedoryaeva, *Combinatorial algorithms*, Izd. NGU, Novosibirsk, 2011. ISBN 978-5-4437-0019-9

[10] T.I. Fedoryaeva, *Majorants and minorants for the classes of graphs with fixed diameter and number of vertices*, J.Appl.Ind.Math., **7**:2 (2013), 153–165, translated from Diskretn. Anal. Issled. Oper., **20**:1 (2013), 58–76. DOI: 10.1134/S199047891302004X MR3088149

[11] T.I. Fedoryaeva, *The diversity vector of balls of a typical graph of small diameter*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **22**:6 (2015), 43–54. DOI: 10.17377/daio.2015.22.512

[12] F. Harary, *Graph Theory*, Addison–Wesley, London, 1969.

[13] E.M. Reingold, J. Nievergelt, and N. Deo, *Combinatorial algorithms: theory and practice*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1977.

[14] K.L. Rychkov, *Sufficient conditions for the existence of a graph with a given variety of balls*, J.Appl.Ind.Math., **1**:3 (2007), 380–385, translated from Diskretn. Anal. Issled. Oper., **13**:1 (2006), 99–108. DOI: 10.1134/S1990478907030131 MR2258906

Tatiana Ivanovna Fedoryaeva
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: fti@math.nsc.ru