S(e)MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 1229–1248 (2016) УДК 519.213
DOI 10.17377/semi.2016.13.096 MSC 60G51

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА МАКСИМУМА РАЗНОСТИ ДВУХ ПУАССОНОВСКИХ ПРОЦЕССОВ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ЛИНЕЙНЫМ СНОСОМ

В.Е. МОСЯГИН, Н.А. ШВЕМЛЕР

Abstract. We are considering the combination of two Poisson processes with linear drift on the whole real line in the case when negative middle drift is fulfilled. We find the distribution function for the moment of attaining the maximum for this process. As well known from monograph of Ibragimov and Khasminskii this distribution function is the limit for the distributions of normalized maximum likelihood estimators for the only discontinuous point of a density.

Keywords: Poisson process with linear drift, stochastic process with negative middle drift, probability functions of the functionals of the stochastic processes.

1. Введение

Пусть $\nu_-(t)$ и $\nu_+(t)$ — независимые стандартные пуассоновские процессы определенные при $t \geqslant 0$ и доопределенные нулем на отрицательной оси. Введем случайные процессы:

$$Y(t) = at - \nu_+(pt) + \nu_-(-qt), \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{1}$$

где константы $p > a > q > 0$ обеспечивают процессу (1) отрицательный средний снос. Последнее обстоятельство, как известно [1], гарантирует выполнение условия: $\mathbf{P}\left(\sup\limits_t Y(t) < \infty\right) = 1$. Определим функцию распределения момента

Mosyagin, V.E., Shvemler, N.A., Distribution of the time of attaining the maximum for the difference of the two Poisson's processes with negative linear drift.

Работа поддержана РФФИ (грант РФФИ 15-01-07460а).

Поступила 22 октября 2016., опубликована 16 декабря 2016 г.

t^* наступления максимума процесса (1):

$$G(x) = \mathbf{P}\left(t^* < x\right) = \mathbf{P}\left(\sup_{t<x} Y(t) > \sup_{t\geqslant x} Y(t)\right). \tag{2}$$

Цель работы – нахождение функции распределения $G(x)$.

Процессы вида (1) возникают в страховой математике [2, с. 719], а также в математической статистике [3–5] в задачах об оценке неизвестной точки $x = x(\theta)$ разрыва плотности распределения $f(x, \theta)$ по выборке $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Если предположить, например, что плотность имеет единственный положительный скачок в точке $x = \theta$:

$$p(\theta) = f(\theta + 0, \theta) > f(\theta - 0, \theta) = q(\theta) > 0,$$

то как показано в монографии [3], последовательность процессов логарифмического отношения правдоподобия

$$Y_n(t) = \sum_{i\leqslant n} \ln\left(f\left(X_i, \theta + t/n\right)/f\left(X_i, \theta\right)\right), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

сходится (в некотором смысле) к процессу $Z(t)$ вида (1):

$$Z(t) = (p(\theta) - q(\theta))\, t - \left(\nu_+\left(p(\theta)t\right) - \nu_-\left(q(\theta)t\right)\right) \ln\left(p(\theta)/q(\theta)\right).$$

Точнее, $Y(t) = Z(t)/\ln(p/q)$, если в (1) положить $p = p(\theta)$, $q = q(\theta)$, $a = (p - q)/\ln(p/q)$.

В [3] также установлено, что последовательность нормированных оценок максимального правдоподобия (ОМП) точки разрыва плотности сходится по распределению к моменту t^* достижения максимума процесса $Z(t)$. Поэтому, задача о нахождении функции распределения (2) решает задачу о нахождении предельного распределения нормированных ОМП.

Отметим, что в [5] была получена оценка скорости сходимости распределений нормированных ОМП к распределению (2) без знания явного вида этого распределения. Результаты настоящей работы открывают новые возможности для уточнения полученных ранее оценок.

Формулировка основных результатов содержится в теоремах 3 и 4 параграфа 4. В частности, из этих теорем, а также из формул (23) и (31) вытекает, что

$$G(x) = \frac{(p-a)q}{(p-q)a} + \frac{(a-q)\beta}{(p-q)}\left(1 - e^{-(p-q)x}\right), \quad \text{если } 0 \leqslant ax \leqslant 1,$$

$$G(x) = \frac{(p-a)q}{(p-q)a} + \frac{(a-q)q}{a}x + \frac{(a-q)(p-a\beta)q}{a^2\beta(p-q)}\left(e^{-\beta(1-q/p)ax} - 1\right), \quad \text{если } -1 \leqslant ax < 0.$$

Подобным образом можно достраивать $G(x)$ на положительной полуоси на интервалах $n \leqslant ax < n+1$, $n = 1, 2, \ldots$ по формуле из теоремы 3, а на интервалах $-(n+1) \leqslant ax < -n$, $n = 1, 2, \ldots$, используя утверждение теоремы 4.

В статье принята сквозная нумерация утверждений и формул. Кроме того, условимся считать все суммы, в которых верхний предел индекса суммирования меньше нижнего, равными нулю. Также считаем равными нулю выражения вида $c^{k-1}/(k-1)!$ при $k = 0$, где c — любое аналитическое выражение.

2. Представления для функции распределения $G(x)$

Лемма 1. *При* $x \geqslant 0$ *справедливо представление*

$$G(x) = 1 - \beta \int_0^\infty \varphi^+(x,z) e^{-\beta z}\, dz, \tag{3}$$

где

$$\varphi^+(x,z) = \mathbf{P}\left(\sup_{t<x} Y(t) \leqslant z + Y(x)\right), \tag{4}$$

а константа $\beta > 0$ *является единственным положительным корнем уравнения*

$$\left(1 - e^{-\beta}\right)/\beta = a/p. \tag{5}$$

Доказательство. На положительной полуоси процесс $Y(t) = at - \nu_+(pt)$. Следовательно, в силу его однородности при $x, z \geqslant 0$

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\geqslant x}(Y(t) - Y(x)) < z\right) = \mathbf{P}\left(\sup_{t\geqslant 0} Y(t) < z\right) = 1 - e^{-\beta z}. \tag{6}$$

Последнее равенство доказано в [1, с. 165]. Используя независимость приращений $Y(t)$ и (2), находим

$$\begin{aligned} G(x) &= \mathbf{P}\left(\sup_{t<x} Y(t) - Y(x) > \sup_{t\geqslant x}(Y(t) - Y(x))\right) \\ &= 1 - \int_0^\infty \mathbf{P}\left(\sup_{t<x} Y(t) \leqslant z + Y(x)\right) d\mathbf{P}\left(\sup_{t\geqslant 0} Y(t) < z\right) \\ &= 1 - \int_0^\infty \varphi^+(x,z)\beta e^{-\beta z}\, dz. \end{aligned}$$

□

Лемма 2. *Пусть* $\psi(z) = \mathbf{P}\left(\sup_{t<0} Y(t) \leqslant z\right)$. *Тогда при* $z \geqslant 0$

$$\psi(z) = (1 - q/a) \sum_{k=0}^{[z]} (-1)^k \left(\frac{q}{a}\right)^k \frac{(z-k)^k}{k!} e^{q(z-k)/a}. \tag{7}$$

Функция $\psi(z)$ *непрерывна и удовлетворяет дифференциальным уравнениям:*

$$\begin{aligned} \psi'(z) &= \frac{q}{a}\left(\psi(z) - \psi(z-1)\right), \quad z \geqslant 1, \\ \psi'(z) &= \frac{q}{a}\psi(z), \quad 0 \leqslant z < 1, \end{aligned} \tag{8}$$

с граничными условиями: $\psi(0) = 1 - q/a, \quad \psi(+\infty) = 1.$

Доказательство леммы приведено в [1, с. 167]. В частности, из (7) находим

$$\begin{aligned} \psi(z) &= (1 - q/a)\, e^{qz/a}, \quad 0 \leqslant z < 1, \\ \psi(z) &= (1 - q/a)\left(1 - (z-1)e^{-q/a} q/a\right) e^{qz/a}, \quad 1 \leqslant z < 2. \end{aligned}$$

Лемма 3. *При $x < 0$ справедливо представление:*

$$G(x) = \int_0^\infty \varphi^-(x,z)\,d\psi(z), \tag{9}$$

где

$$\varphi^-(x,z) = \mathbf{P}\left(\sup_{t\geqslant x} Y(t) < z + Y(x)\right),$$

а функция $\psi(z)$ определена в лемме 2.

Доказательство. Из однородности процесса $Y(t) = at + \nu_-(-qt)$, $t \leqslant 0$ при $x < 0$ вытекает равенство:

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t<x}(Y(t) - Y(x)) \leqslant z\right) = \mathbf{P}\left(\sup_{t<0} Y(t) \leqslant z\right) = \psi(z).$$

Принимая во внимание независимость приращений $Y(t)$ и (2), находим

$$G(x) = \mathbf{P}\left(\sup_{t\geqslant x} Y(t) - Y(x) < \sup_{t<x}(Y(t) - Y(x))\right)$$
$$= \int_0^\infty \mathbf{P}\left(\sup_{t\geqslant x} Y(t) - Y(x) < z\right) d\psi(z) = \int_0^\infty \varphi^-(x,z)\,d\psi(z).$$

□

Следующее утверждение можно извлечь из [1, с. 164]

Лемма 4. *Если β - решение уравнения* (5), *то*

$$\int_0^\infty \psi(z)e^{-\beta z}\,dz = \frac{(a-q)p}{(p-q)a\beta}, \tag{10}$$

где функция $\psi(z)$ определена в (7).

Доказательство. При интегрировании по частям воспользуемся результатами леммы 2 и равенства (5).

$$\int_0^\infty \psi(z)\beta e^{-\beta z}\,dz = -\int_0^z \psi(z)\,de^{-\beta z} = \psi(0) + \int_0^\infty e^{-\beta z}\psi'(z)\,dz$$
$$= 1 - \frac{q}{a} + \frac{q}{a}\int_0^\infty e^{-\beta z}\left(\psi(z) - \psi(z-1)\right)dz$$
$$= 1 - \frac{q}{a} + \frac{q}{a}\int_0^\infty e^{-\beta z}\psi(z)\,dz - \frac{q}{a}e^{-\beta}\int_0^\infty e^{-\beta(z-1)}\psi(z-1)\,d(z-1)$$
$$= 1 - \frac{q}{a} + \frac{1-e^{-\beta}}{\beta}\frac{q}{a}\int_0^\infty \psi(z)\beta e^{-\beta z}\,dz = \frac{a-q}{a} + \frac{q}{p}\int_0^\infty \psi(z)\beta e^{-\beta z}\,dz.$$

Сравнение крайних частей этих равенств приводит к (10). □

Лемма 5. *Пусть $x, z \geqslant 0$. Тогда для функции $\varphi^+(x,z)$ из (4) справедливо представление:*

$$\varphi^+(x,z) = \sum_{k=0}^{[z+ax]} \psi\,(z+ax-k)\,P_k(x,z), \quad \text{где} \tag{11}$$
$$P_k(x,z) = \mathbf{P}\left(\sup_{0\leqslant t<x} Y(t) \leqslant z+ax-k; \nu_+(px)=k\right).$$

Кроме того, для вероятностей $P_k(x,z)$ имеют место представления:

$$P_0(x,z) = e^{-px},$$
$$P_k(x,z) = e^{-px}\left(\frac{p}{a}\right)^k \int_0^{y_1} dt_1 \int_{t_1}^{y_2} dt_2 \ldots \int_{t_{k-1}}^{y_k} dt_k, \quad k=1,2,\ldots,[z+ax], \tag{12}$$

в которых $t_0 = 0$, $z+ax \geqslant 1$,

$$y_1 = (z+ax-k)\wedge ax,\ y_2 = (z+ax-k+1)\wedge ax, \ldots, y_k = (z+ax-1)\wedge ax,$$

где $a \wedge b = \min\{a,b\}$.

Доказательство. При $x = 0$ из (4) и леммы 2 находим $\varphi^+(0,z) = \psi(z)$, что соответствует (11–12), так как $P_0(0,z) = 1$, $P_k(0,z) = 0$, $k = 1,2,\ldots$.

Если $x > 0$, то $Y(x) = ax - \nu_+(px)$ и $z + Y(x) = z + ax - k$ на множестве $\nu_+(px) = k$. Отсюда и из неотрицательности супремума процесса $Y(t)$ при $t < x$ получаем представление (11):

$$\begin{aligned}\varphi^+(x,z) &= \mathbf{P}\left(\sup_{t<x} Y(t) \leqslant z + Y(x)\right)\\ &= \sum_{k=0}^{[z+ax]} \mathbf{P}\left(\sup_{t<x} Y(t) \leqslant z+ax-k; \nu_+(px)=k\right)\\ &= \sum_{k=0}^{[z+ax]} \mathbf{P}\left(\sup_{t<0} Y(t) \leqslant z+ax-k; \sup_{0\leqslant t<x} Y(t) \leqslant z+ax-k; \nu_+(px)=k\right)\\ &= \sum_{k=0}^{[z+ax]} \psi\,(z+ax-k)\,\mathbf{P}\left(\sup_{0\leqslant t<x} Y(t) \leqslant z+ax-k; \nu_+(px)=k\right).\end{aligned}$$

Последнее равенство здесь является следствием независимости процессов $\nu_-(t)$, $\nu_+(t)$ и определения функции $\psi(z)$.

При $k = 0$

$$P_0(x,z) = \mathbf{P}\left(\sup_{0\leqslant t<x} Y(t) \leqslant z+ax; \nu_+(px)=0\right) = \mathbf{P}\left(\nu_+(px)=0\right) = e^{-px},$$

так как $\sup_{0\leqslant t<x} Y(t) = ax \leqslant z + ax$ на множестве $\{\nu_+(px) = 0\}$. Отсюда и из (11) следует, что при $[z+ax] = 0$

$$\varphi^+(x,z) = e^{-px}\psi(z+ax), \tag{13}$$

что соответствует первым представлениям в (11–12) при $z + ax < 1$.

Пусть $z + ax \geqslant 1$. Для нахождения вероятностей $P_k(x,z)$ при $k = 1,2,\ldots,[z+ax]$ обозначим через $S_1, S_2, \ldots$ — последовательные моменты скачков процесса $Y(t) = at - \nu_+(pt)$, $t \geqslant 0$. Так как супремум этого процесса достигается в одной из точек S_k, то

$$
\begin{aligned}
P_k(x,z) = \mathbf{P}\Big(&aS_1 \leqslant z + ax - k; aS_2 - 1 \leqslant z + ax - k; \dots \\
&; aS_k - 1 \leqslant z + ax - k; S_k \leqslant x; S_{k+1} > x\Big) \\
= \mathbf{P}\Big(&aS_1 \leqslant z + ax - k; aS_2 \leqslant z + ax - k + 1; \dots \\
&; aS_k \leqslant z + ax - 1; aS_k \leqslant ax; aS_{k+1} > ax\Big).
\end{aligned} \tag{14}
$$

Здесь последние два события под знаком вероятности равносильны событию $\nu_+(px) = k$. Если обозначить

$$y_1 = (z + ax - k) \wedge ax,\ y_2 = (z + ax - k + 1) \wedge ax, \dots,\ y_k = (z + ax - 1) \wedge ax,$$

то $y_1 \leqslant y_2 \leqslant \dots \leqslant y_k \leqslant ax$ и, следовательно, для вероятностей из (14) получаем интегральные представления (12):

$$
\begin{aligned}
P_k(x,z) &= \int_0^{y_1} dt_1 \int_{t_1}^{y_2} dt_2 \dots \int_{t_{k-1}}^{y_k} dt_k \int_{ax}^{\infty} \left(\frac{p}{a}\right)^{k+1} e^{-(p/a)t_{k+1}}\, dt_{k+1} \\
&= e^{-px} \left(\frac{p}{a}\right)^k \int_0^{y_1} dt_1 \int_{t_1}^{y_2} dt_2 \dots \int_{t_{k-1}}^{y_k} dt_k.
\end{aligned}
$$

□

Лемма 6. *Функция $\varphi^+(x,z)$ непрерывна по каждой из своих переменных в замкнутой области $x, z \geqslant 0$.*

Доказательство. Воспользуемся леммой 5. Непрерывность функции ψ следует из леммы 2, а непрерывность вероятностей $P_k(x,z)$ по x и z вытекает из представлений (12). Поэтому в каждой из областей $A_n = \{(x,z) : n < z + ax < n+1\}$, $n = 0, 1, \dots$ функция

$$\varphi^+(x,z) = \sum_{k=0}^{n} \psi(z + ax - k) P_k(x,z),\ (x,z) \in A_n \tag{15}$$

непрерывна по x и z. Осталось проверить непрерывность на границах $\Gamma_{n+1} = \{(x,z) : z + ax = n+1\}$ областей A_n и A_{n+1}, $n = 0, 1, \dots$. Из (15) при $(x,z) \in A_n \cap \Gamma_{n+1}$ находим

$$\varphi^+(x,z) = \sum_{k=0}^{n} \psi(n + 1 - k) P_k(x,z), \tag{16}$$

а при $(x,z) \in A_{n+1} \cap \Gamma_{n+1}$

$$\varphi^+(x,z) = \sum_{k=0}^{n} \psi(n + 1 - k) P_k(x,z) + \psi(0) P_{n+1}(x,z). \tag{17}$$

Однако, на границе Γ_{n+1}, в силу (11),

$$P_{n+1}(x,z)=\mathbf{P}\left(\sup_{0\leqslant t<x} Y(t)\leqslant 0; \nu_+(px)=n+1\right)=0.$$

Сравнение (16) с (17) с учетом последнего равенства доказываем лемму. □

Следующее утверждение уточняет лемму 5.

Теорема 1. *Пусть* $x\geqslant 0$, $0\leqslant z<1$. *Тогда*

$$\varphi^+(x,z)=e^{-px}\sum_{k=0}^{[z+ax]}\psi\left(z+ax-k\right)\left(\frac{p}{a}\right)^k\left(\frac{(z+ax)^k}{k!}-\frac{(z+ax)^{k-1}}{(k-1)!}\right). \tag{18}$$

В частности, при $z=0$

$$\varphi^+(x,0)=e^{-px}\sum_{k=0}^{[ax]}\psi\left(ax-k\right)\left(\frac{p}{a}\right)^k\left(\frac{(ax)^k}{k!}-\frac{(ax)^{k-1}}{(k-1)!}\right). \tag{19}$$

Доказательство. В лемме 5 при $x,z\geqslant 0$ было получено выражение (11) для функции $\varphi^+(x,z)$, в котором вероятности $P_k(x,z)$ имели представления (12). При $0\leqslant z<1$ верхние пределы интегралов в формуле (12) равны:

$$y_1=z+ax-k,\ y_2=z+ax-k+1,\dots,y_k=z+ax-1.$$

Если ввести обозначение $y=z+ax$, то при $y\geqslant 1$

$$P_k(x,z)=e^{-px}\left(\frac{p}{a}\right)^k\int\limits_0^{y-k}dt_1\int\limits_{t_1}^{y-k+1}dt_2\dots\int\limits_{t_{k-1}}^{y-1}dt_k,\quad k=1,2,\dots,[y]. \tag{20}$$

Здесь считаем $t_0=0$.

Покажем, что при любом $t_0\geqslant 0$ и любом $y\geqslant 1$

$$\int\limits_{t_0}^{y-k}dt_1\int\limits_{t_1}^{y-k+1}dt_2\dots\int\limits_{t_{k-1}}^{y-1}dt_k=\frac{(y-t_0)^k}{k!}-\frac{(y-t_0)^{k-1}}{(k-1)!},\quad k=1,2,\dots,[y]. \tag{21}$$

При $k=1$ равенство очевидно. Если (21) верно при некотором k, то при $k:=k+1$

$$\int\limits_{t_0}^{y-k-1}dt_1\int\limits_{t_1}^{y-k}dt_2\dots\int\limits_{t_k}^{y-1}dt_{k+1}=\int\limits_{t_0}^{y-k-1}\left(\frac{(y-t_1)^k}{k!}-\frac{(y-t_1)^{k-1}}{(k-1)!}\right)dt_1$$
$$=\frac{(y-t_0)^{k+1}}{(k+1)!}-\frac{(y-t_0)^k}{k!},$$

что и завершает индуктивный шаг. Полагая в (21) $t_0=0$, приходим к равенству:

$$\int\limits_0^{y-k}dt_1\int\limits_{t_1}^{y-k+1}dt_2\dots\int\limits_{t_{k-1}}^{y-1}dt_k=\frac{y^k}{k!}-\frac{y^{k-1}}{(k-1)!}. \tag{22}$$

Полагая в (22) $y=z+ax$, из (20) и (11) получаем выражение (18) при $z+ax\geqslant 1$. Если $z+ax<1$ ($[z+ax]=0$), то справедливость формулы (18) следует из (13). □

Замечание 1. Если k-мерный интеграл (22) умножить на дробь $k!/y^k$, то для k порядковых статистик $X_{(1)} \leqslant X_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant X_{(k)}$ из равномерного распределения на интервале $[0; y]$ получим простое выражение для вероятности:

$$\mathbf{P}\left(X_{(1)} \leqslant y-k; X_{(2)} \leqslant y-k+1; \ldots; X_{(k)} \leqslant y-1\right) = \frac{k!}{y^k}\left(\frac{y^k}{k!} - \frac{y^{k-1}}{(k-1)!}\right) = 1 - k/y, \quad k \leqslant [y].$$

Замечание 2. Выражение (18) из теоремы 1 определяет функцию $\varphi^+(x,z)$ в области $x \geqslant 0$, $0 \leqslant z < 1$, а этого не достаточно для нахождения функции распределения $G(x)$, $x \geqslant 0$ по формуле (3). Ниже в теореме 3 будет найдено другое представление для $G(x)$, в котором участвует только функция $\varphi^+(x,0)$ из (19).

Замечание 3. Несмотря на сложность аналитического выражения (19), функцию $\varphi^+(x,0)$ можно находить последовательно на интервалах $n \leqslant ax < n+1$, $n = 0, 1, \ldots$.

Например,

$$\begin{aligned} &\varphi^+(x,0) = (1-q/a)\, e^{-(p-q)x}, \quad \text{если } 0 \leqslant ax < 1, \\ &\varphi^+(x,0) = (1-q/a)\left(1 + (ax-1)\,\frac{p-q}{a} e^{-q/a}\right) e^{-(p-q)x}, \text{ если } 1 \leqslant ax < 2. \end{aligned} \tag{23}$$

Лемма 7. *Пусть $x \leqslant 0$, $z \geqslant 0$. Тогда для функции $\varphi^-(x,z)$ из леммы 3 справедливо представление:*

$$\varphi^-(x,z) = \sum_{k > a|x| - z} \left(1 - e^{-\beta(z - a|x| + k)}\right) Q_k(x,z). \tag{24}$$

Здесь

$$Q_k(x,z) = \mathbf{P}\left(\sup_{0 \leqslant t \leqslant |x|} \tilde{Y}(t) < z; \nu_-(q|x|) = k\right), \tag{25}$$

а процесс $\tilde{Y}(t) = at - \nu_-(qt)$, $t \geqslant 0$. Суммирование в (24) распространяется по целым неотрицательным $k > a|x| - z$.

Доказательство. Если $x = 0$, то из леммы 3 и (6) находим $\varphi^-(0,z) = 1 - e^{-\beta z}$, $z \geqslant 0$, что соответствует равенству (24) так как при $z > 0$, $Q_0(0,z) = 1$, $Q_k(0,z) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, и $Q_k(0,0) = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Если $x < 0$, то как и в доказательстве леммы 5

$$\begin{aligned} \varphi^-(x,z) &= \mathbf{P}\left(\sup_{t \geqslant x} Y(t) < z + Y(x)\right) \\ &= \sum_k \mathbf{P}\left(\sup_{x \leqslant t \leqslant 0} Y(t) < z + Y(x); \nu_-(q|x|) = k; \sup_{t > 0} Y(t) < z + Y(x)\right). \end{aligned}$$

Так как при $x < 0$ значение процесса $Y(x) = ax + k = -a|x| + k$ на множестве $\{\nu_-(q|x|) = k\}$, то

$$\begin{aligned} &\varphi^-(x,z) \\ &= \sum_{k > a|x| - z} \mathbf{P}\left(\sup_{t > 0} Y(t) < z - a|x| + k\right) \mathbf{P}\left(\sup_{x \leqslant t \leqslant 0} Y(t) < z + Y(x); \nu_-(q|x|) = k\right). \end{aligned} \tag{26}$$

Заметим, что

$$\sup_{x\leqslant t\leqslant 0}(Y(t)-Y(x))\stackrel{d}{=}\sup_{0\leqslant t-x\leqslant |x|}Y(t-x)\stackrel{d}{=}\sup_{0\leqslant t\leqslant |x|}\tilde{Y}(t).$$

Отсюда, а также из (6) и (26) приходим к (24). □

Теорема 2. *При $x\leqslant 0$, $z>0$ выражение* (24) *для функции* $\varphi^-(x,z)$ *приводится к виду:*

$$(27)\quad \varphi^-(x,z)=1-e^{\beta(1-q/p)a|x|-\beta z}+\\ \sum_{k=0}^{[a|x|-z]}e^{-q(z+k)/a}\left(e^{\beta(1-q/p)(a|x|-z-k)}-1\right)\left(\frac{q}{a}\right)^k\left(\frac{(z+k)^k}{k!}-\frac{(z+k)^{k-1}}{(k-1)!}\right).$$

Доказательство. Если $a|x|<z$, то из (24) получаем равенство:

$$\varphi^-(x,z)=\sum_{k=0}^{\infty}Q_k(x,z)-e^{-\beta(z-a|x|)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-\beta}\right)^kQ_k(x,z).$$

Из (25) находим

$$Q_0(x,z)=\mathbf{P}\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant|x|}\tilde{Y}(t)<z;\nu_-(q|x|)=0\right)\\ =\mathbf{P}\left(a|x|<z;\nu_-(q|x|)=0\right)=\mathbf{P}\left(\nu_-(q|x|)=0\right)=e^{-q|x|},$$

а при $k\geqslant 1$ $(a|x|<z)$:

$$Q_k(x,z)\\ =\mathbf{P}\left(aS_1<z;aS_2<z+1;\dots;aS_k<z+k-1;aS_k\leqslant a|x|;aS_{k+1}>a|x|\right)\\ =\mathbf{P}\left(aS_k\leqslant a|x|;aS_{k+1}>a|x|\right)=\mathbf{P}\left(\nu_-(q|x|)=k\right)=\frac{(q|x|)^k e^{-q|x|}}{k!}.$$

Здесь через $S_1,S_2,\dots$ обозначены моменты скачков процесса

$$\tilde{Y}(t)=at-\nu_-(qt),\ t\geqslant 0.$$

Подставляя вероятности $Q_k(x,z)$ в выражение для $\varphi^-(x,z)$ получаем:

$$\varphi^-(x,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(q|x|)^k e^{-q|x|}}{k!}-e^{-\beta(z-a|x|)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(q|x|e^{-\beta}\right)^k}{k!}e^{-q|x|}\\ =1-exp\left\{\beta q|x|\left(\frac{a}{q}-\frac{1-e^{-\beta}}{\beta}\right)-\beta z\right\}=1-e^{\beta(1-q/p)a|x|-\beta z},$$

где последнее равенство имеет место в силу (5). Итак, при $a|x|<z$ формула (27) доказана.

Пусть $n\leqslant a|x|-z<n+1$, $n=0,1,2,\dots$. Тогда из формулы (24) получаем

$$\varphi^-(x,z)=\sum_{k=n+1}^{\infty}Q_k(x,z)-e^{-\beta(z-a|x|)}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(e^{-\beta}\right)^kQ_k(x,z)\\ =\sum_{k=1}^{\infty}Q_{n+k}(x,z)-e^{-\beta(z-a|x|)}\sum_{k=1}^{\infty}\left(e^{-\beta}\right)^{n+k}Q_{n+k}(x,z).$$

Если для этих рядов ввести общее обозначение:

$$S(b) = \sum_{k=1}^{\infty} b^{n+k} Q_{n+k}(x,z),$$

то

$$\varphi^-(x,z) = S(1) - e^{-\beta(z-a|x|)} S(e^{-\beta}). \tag{28}$$

Как и в начале доказательства теоремы, вероятности (25) представляем в виде:

$$\begin{aligned} Q_{n+k}(x,z) = \mathbf{P}(&aS_1 < z; aS_2 < z+1; \ldots; aS_{n+1} < z+n; \\ &\{aS_{n+2} < z+n+1; \ldots; aS_{n+k} < z+n+k-1; aS_{n+k} \leqslant a|x|\}; \\ &\qquad\qquad aS_{n+k+1} > a|x|), \end{aligned}$$

а так как при рассматриваемых ограничениях $z+n \leqslant a|x| < z+n+1$, следующие события равны:

$$\begin{aligned} &\{aS_{n+2} < z+n+1; \ldots; aS_{n+k} < z+n+k-1; aS_{n+k} \leqslant a|x|\} \\ &\qquad = \{aS_{n+2} < a|x|; \ldots; aS_{n+k} < a|x|\}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} Q_{n+k}(x,z) &= \int_0^z dt_1 \int_{t_1}^{z+1} dt_2 \ldots \int_{t_n}^{z+n} dt_{n+1} \int_{t_{n+1}}^{a|x|} dt_{n+2} \ldots \\ &\qquad \int_{t_{n+k-1}}^{a|x|} dt_{n+k} \int_{a|x|}^{\infty} \left(\frac{q}{a}\right)^{n+k+1} e^{-(q/a)t_{n+k+1}} dt_{n+k+1} \\ &= e^{-q|x|} \left(\frac{q}{a}\right)^{n+1} \int_0^z dt_1 \int_{t_1}^{z+1} dt_2 \ldots \int_{t_n}^{z+n} \left(\frac{q}{a}\right)^{k-1} \frac{(a|x| - t_{n+1})^{k-1}}{(k-1)!} dt_{n+1}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались результатом вычисления интегралов:

$$\begin{aligned} &\int_{t_{n+1}}^{a|x|} dt_{n+2} \ldots \int_{t_{n+k-1}}^{a|x|} dt_{n+k} \int_{a|x|}^{\infty} \left(\frac{q}{a}\right)^{n+k+1} e^{-(q/a)t_{n+k+1}} dt_{n+k+1} \\ &= e^{-q|x|} \left(\frac{q}{a}\right)^{n+k} \int_{t_{n+1}}^{a|x|} dt_{n+2} \ldots \int_{t_{n+k-1}}^{a|x|} dt_{n+k} = e^{-q|x|} \left(\frac{q}{a}\right)^{n+k} \frac{(a|x| - t_{n+1})^{k-1}}{(k-1)!}. \end{aligned}$$

Из последнего выражения для вероятностей $Q_{n+k}(x,z)$ выводим формулу:

$$S(b) = \sum_{k=1}^{\infty} b^{n+k} Q_{n+k}(x,z)$$
$$= e^{-q|x|} \left(\frac{qb}{a}\right)^{n+1} \int\limits_0^z dt_1 \int\limits_{t_1}^{z+1} dt_2 \ldots \int\limits_{t_{n-1}}^{z+n-1} dt_n \int\limits_{t_n}^{z+n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bigl(qb|x| - (q/a)bt_{n+1}\bigr)^{k-1}}{(k-1)!}\, dt_{n+1}$$
$$= e^{-q|x|(1-b)} \left(\frac{qb}{a}\right)^{n+1} \int\limits_0^z dt_1 \int\limits_{t_1}^{z+1} dt_2 \ldots \int\limits_{t_{n-1}}^{z+n-1} dt_n \int\limits_{t_n}^{z+n} e^{-(q/a)bt_{n+1}}\, dt_{n+1}.$$

Занесение знака ряда под интеграл оправдано ввиду неотрицательности подынтегральной функции. Последнее выражение для $S(b)$ после введения обозначения $\alpha = qb/a$ примет вид:

$$S(b) = e^{-q|x|(1-b)} J_{n+1}(z), \tag{29}$$

где

$$J_{n+1}(z) = \alpha^{n+1} \int\limits_0^z dt_1 \int\limits_{t_1}^{z+1} dt_2 \ldots \int\limits_{t_{n-1}}^{z+n-1} dt_n \int\limits_{t_n}^{z+n} e^{-\alpha t_{n+1}}\, dt_{n+1}.$$

После вычисления последнего внутреннего интеграла приходим к рекурентному соотношению:

$$J_{n+1}(z) = J_n(z) - \alpha^n e^{-\alpha(z+n)} \int\limits_0^z dt_1 \int\limits_{t_1}^{z+1} dt_2 \ldots \int\limits_{t_{n-1}}^{z+n-1} dt_n$$
$$= J_n(z) - \alpha^n e^{-\alpha(z+n)} \left(\frac{(z+n)^n}{n!} - \frac{(z+n)^{n-1}}{(n-1)!}\right).$$

Здесь мы воспользовались формулой (22). Учитывая, что

$$J_1(z) = \alpha \int\limits_0^z e^{-\alpha t_1} dt_1 = 1 - e^{-\alpha z},$$

находим

$$J_{n+1}(z) = 1 - e^{-\alpha z} - \sum_{k=1}^{n} \alpha^k e^{-\alpha(z+k)} \left(\frac{(z+k)^k}{k!} - \frac{(z+k)^{k-1}}{(k-1)!}\right)$$
$$= 1 - \sum_{k=0}^{n} \alpha^k e^{-\alpha(z+k)} \left(\frac{(z+k)^k}{k!} - \frac{(z+k)^{k-1}}{(k-1)!}\right).$$

Подставляя сюда и в (29) $b = 1$ и, соответственно, $\alpha = q/a$, находим

$$S(1) = 1 - \sum_{k=0}^{n} e^{-q(z+k)/a} \left(\frac{q}{a}\right)^k \left(\frac{(z+k)^k}{k!} - \frac{(z+k)^{k-1}}{(k-1)!}\right),$$

а после подстановки $b = e^{-\beta}, \alpha = (q/a)e^{-\beta}$ находим

$$S(e^{-\beta})$$
$$= e^{-q|x|(1-e^{-\beta})} \left(1 - \sum_{k=0}^{n} e^{-\beta k} e^{-qe^{-\beta}(z+k)/a} \left(\frac{q}{a}\right)^k \left(\frac{(z+k)^k}{k!} - \frac{(z+k)^{k-1}}{(k-1)!}\right)\right).$$

Здесь в степенях экспонент заменим $e^{-\beta}$ на выражение из (5) $e^{-\beta} = 1 - \beta a/p$:

$$S(e^{-\beta}) = e^{-\beta qa|x|/p}$$
$$- \sum_{k=0}^{n} e^{-\beta k - \beta q(a|x|-z-k)/p} \cdot e^{-q(z+k)/a} \left(\frac{q}{a}\right)^k \left(\frac{(z+k)^k}{k!} - \frac{(z+k)^{k-1}}{(k-1)!}\right).$$

Если ввести обозначение:

$$A_k(z) = e^{-q(z+k)/a} \left(\frac{q}{a}\right)^k \left(\frac{(z+k)^k}{k!} - \frac{(z+k)^{k-1}}{(k-1)!}\right), \tag{30}$$

то

$$S(1) = 1 - \sum_{k=0}^{n} A_k(z),$$

$$S(e^{-\beta}) = e^{-\beta qa|x|/p} - \sum_{k=0}^{n} e^{-\beta k - \beta q(a|x|-z-k)/p} A_k(z).$$

Подставляя эти выражения в формулу (28) находим

$$\varphi^-(x,z) = 1 - e^{-\beta qa|x|/p - \beta(z-a|x|)}$$
$$+ \sum_{k=0}^{n} \left(e^{-\beta k - \beta q(a|x|-z-k)/p - \beta(z-a|x|)} - 1\right) A_k(z),$$

или, что тоже,

$$\varphi^-(x,z) = 1 - e^{\beta(1-q/p)a|x| - \beta z} + \sum_{k=0}^{n} \left(e^{\beta(1-p/q)(a|x|-z-k)} - 1\right) A_k(z).$$

Отсюда и из (30) приходим к (27) при рассматриваемых в доказательстве ограничениях $n \leqslant a|x| - z < n+1$. $\square$

Замечание 4. Ниже будет установленно, что для нахождения функции распределения $G(x)$ на отрицательной полуоси достаточно знать значения функции $\varphi^-(x,z)$ только при $z = 1$. Из формулы (27) находим

$$\begin{aligned} &\varphi^-(x,1) = 1 - e^{-\beta(1-q/p)ax - \beta}, \quad \text{если } -1 < ax \leqslant 0, \\ &\varphi^-(x,1) = 1 - e^{-\beta(1-q/p)ax - \beta} + e^{-q/a}\left(e^{-\beta(1-q/p)(ax+1)} - 1\right), \quad \text{если} \\ &-2 < ax \leqslant -1. \end{aligned} \tag{31}$$

Лемма 8. *Функция $\varphi^-(x,z)$ непрерывна по каждой из своих переменных в замкнутой области $x \leqslant 0$, $z \geqslant 0$.*

Доказательство. Непрерывность функции $\varphi^-(x,z)$ в каждой из областей $A_n = \{(x,z) : n-1 < ax - z < n\}$, $n = 1,2,\ldots$ следует из теоремы 2. Проверим сохранение непрерывности на границах $\Gamma_n = \{(x,z) : ax - z = n\}$ областей A_n и A_{n+1}, $n = 1,2,\ldots$. Из леммы 7 при $(x,z) \in A_{n+1} \cap \Gamma_n$ находим

$$\varphi^-(x,z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(1 - e^{-\beta(k-n)}\right) Q_k(x,z), \tag{32}$$

а при $(x,z) \in A_n \cap \Gamma_n$

$$\varphi^-(x,z) = \sum_{k=n}^{\infty} \left(1 - e^{-\beta(k-n)}\right) Q_k(x,z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(1 - e^{-\beta(k-n)}\right) Q_k(x,z). \tag{33}$$

Сравнение (32) с (33) доказывает лемму. □

3. Дифференциальные уравнения для функций $\varphi^{\pm}(x,z)$

В этом параграфе найдены дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют функции $\varphi^{\pm}(x,z)$. Эти уравнения используются в параграфе 4 с целью получения более удобного выражения для функции распределения $G(x)$. В связи с этим введем обозначения $\varphi^{\pm}_x(x,z), \varphi^{\pm}_z(x,z)$ для частных производных по переменным x и z соответственно.

Лемма 9. *Частные производные $\varphi^{\pm}_x(x,z), \varphi^{\pm}_z(x,z)$ п. в. существуют.*

Доказательство. Из теоремы 1 вытекает существование частных производных по x и z функции $\varphi^+(x,z)$ в каждой из областей $n < z + ax < n+1$, $n = 0,1,\ldots$. Исключение составляют множество точек (x,z) лежащих на прямых $z + ax = n$, для которых существуют односторонние производные. Аналогично, из теоремы 2 выводим п. в. существование производных $\varphi^-_x(x,z), \varphi^-_z(x,z)$. □

Лемма 10. *Частные производные $\varphi^-_z(x,z)$, $\varphi^+_z(x,z)$ равномерно ограничены:*

$$0 \leqslant \varphi^-_z(x,z) \leqslant c, \quad x < 0,\ z > 0,$$
$$0 \leqslant \varphi^+_z(x,z) \leqslant c, \quad x > 0,\ z > 0,$$

где константа $c < \infty$.

Доказательство. Пусть $x < 0$, а $x + \tau_x$ — момент ближайшего справа, т.е. $\tau_x \geqslant 0$, скачка процесса $Y(t) = at + \nu_-(q|t|)$, который мы считаем определенным только при $t \leqslant 0$. Тогда

$$\mathbf{P}(\tau_x < y) = 1 - e^{-qy}, \quad 0 \leqslant y \leqslant |x|; \quad \mathbf{P}(\tau_x \geqslant |x|) = e^{-q|x|}.$$

Если $\tau_x \geqslant |x|$, то $Y(t) = at$, $x \leqslant t \leqslant 0$, а это означает, что $\sup\limits_{t \geqslant x} Y(t) = \sup\limits_{t \geqslant 0} Y(t)$ и, следовательно, в силу (6)

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t \geqslant x} Y(t) - Y(x) < z \,\middle|\, \tau_x \geqslant |x|\right) = \mathbf{P}\left(\sup_{t \geqslant 0} Y(t) + a|x| < z\right)$$
$$= 1 - e^{-\beta(z - a|x|)}, \quad z \geqslant a|x|.$$

Таким образом, при $\tau_x \geqslant |x|$ производная по z (плотность условного распределения) ограничена константой β.

Если $0 \leqslant \tau_x < |x|$, то

$$\sup_{t\geqslant x} Y(t) - Y(x) = \max\left\{Y(x+\tau_x), \sup_{t>x+\tau_x} Y(t)\right\} - Y(x)$$
$$= (Y(x+\tau_x) - Y(x)) + \max\left\{0, \sup_{t>x+\tau_x} Y(t) - Y(x+\tau_x)\right\},$$

а так как величина $Y(x+\tau_x) - Y(x) = a\tau_x$ не зависит от второго слагаемого и имеет плотность ограниченную константой q, то и производная по z условного распределения

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\geqslant x} Y(t) - Y(x) < z \,\middle|\, 0 \leqslant \tau_x < |x|\right)$$

также будет ограничена константой q. Здесь мы воспользовались тем, что максимум плотности свертки независимых величин не превосходит максимума плотности любого из слагаемых. Осталось заметить, что

$$\varphi^-(x,z) = \mathbf{P}\left(\sup_{t\geqslant x} Y(t) - Y(x) < z\right)$$
$$= \mathbf{P}\left(\sup_{t\geqslant x} Y(t) - Y(x) < z \,\middle|\, 0 \leqslant \tau_x < |x|\right)\left(1 - e^{-q|x|}\right)$$
$$+ \mathbf{P}\left(\sup_{t\geqslant x} Y(t) - Y(x) < z \,\middle|\, \tau_x \geqslant |x|\right) e^{-q|x|}.$$

Аналогично доказывается равномерная ограниченность производной $\varphi_z^+(x,z)$. □

Лемма 11. *Функция $\varphi^+(x,z)$ из (4) является решением дифференциальных уравнений:*

$$\begin{aligned} &\varphi_x^+(x,z) = a\varphi_z^+(x,z) - p\varphi^+(x,z), \quad x>0,\ 0<z<1, \\ &\varphi_x^+(x,z) = a\varphi_z^+(x,z) - p\varphi^+(x,z) + p\varphi^+(x,z-1), \quad x>0,\ z\geqslant 1, \end{aligned} \tag{34}$$

с граничными условиями:

$$\varphi^+(0,z) = \psi(z), \quad \varphi^+(0,0) = 1 - q/a, \quad \varphi^+(x,+\infty) = 1,$$

где функция $\psi(z)$ определена в (7).

Частная производная $\varphi_x^+(x,z)$ равномерно ограничена в области $x > 0$, $z > 0$.

Доказательство. Для любого $x > 0$ и сколь угодно малого $\delta > 0$ приращение процесса $Y(t) = at - \nu_+(pt)$ равно $Y(x+\delta) - Y(x) = a\delta$, если пуассоновский процесс не имеет скачков на интервале $[x, x+\delta]$ и $Y(x+\delta) - Y(x) = a\delta - 1$, если скачок только один. Следовательно

$$(35)\quad \varphi^+(x+\delta,z)=\mathbf{P}\left(\sup_{t<x+\delta}Y(t)\leqslant z+Y(x+\delta)\right)$$
$$=\mathbf{P}\left(\sup_{t<x+\delta}Y(t)\leqslant z+Y(x+\delta);Y(x+\delta)-Y(x)=a\delta\right)+$$
$$\mathbf{P}\left(\sup_{t<x+\delta}Y(t)\leqslant z+Y(x+\delta);Y(x+\delta)-Y(x)=a\delta-1\right)+o(\delta)$$
$$=P_1+P_2+o(\delta).$$

В силу независимости приращений процесса $Y(t)$, $t\geqslant 0$ находим

$$P_1=\mathbf{P}\left(\max\left\{\sup_{t<x}Y(t),Y(x+\delta)\right\}\leqslant z+Y(x+\delta);Y(x+\delta)-Y(x)=a\delta\right)$$
$$=\mathbf{P}\left(\sup_{t<x}Y(t)\leqslant (z+a\delta)+Y(x);Y(x+\delta)-Y(x)=a\delta\right)$$
$$=\mathbf{P}\left(\sup_{t<x}Y(t)\leqslant (z+a\delta)+Y(x)\right)\mathbf{P}\left(Y(x+\delta)-Y(x)=a\delta\right)$$
$$=\varphi^+(x,z+a\delta)\mathbf{P}\left(\nu_+(p\delta)=0\right)$$

или, что тоже

$$(36)\qquad P_1=\varphi^+(x,z+a\delta)-p\varphi^+(x,z+a\delta)\delta+o(\delta).$$

Предположим теперь, что внутри отрезка $[x,x+\delta]$ процесс $Y(t)$ имеет один скачок и $x+\tau$ — момент этого скачка. Тогда

$$P_2=\mathbf{P}\left(\sup_{t<x+\delta}Y(t)\leqslant z+Y(x+\delta);Y(x+\delta)-Y(x)=a\delta-1\right)$$
$$=\mathbf{P}\left(\max\left\{\sup_{t<x}Y(t),Y(x+\tau-0)\right\}\leqslant z+Y(x+\delta);Y(x+\delta)-Y(x)=a\delta-1\right)$$
$$=\mathbf{P}\Bigg(\sup_{t<x}Y(t)\leqslant (z-1+a\delta)+Y(x);\left\{Y(x+\tau-0)\leqslant z+Y(x+\delta)\right\};$$
$$Y(x+\delta)-Y(x)=a\delta-1\Bigg).$$

Событие в фигурных скобках достоверно при $z\geqslant 1$, так как

$$Y(x+\tau-0)=1+Y(x+\tau)\leqslant z+Y(x+\tau)\leqslant z+Y(x+\delta).$$

Отсюда и из независимости приращений приходим к соотношению:

$$(37)\quad P_2=\varphi^+(x,z-1+a\delta)\mathbf{P}(\nu_+(p\delta)=1)=p\varphi^+(x,z-1+a\delta)\delta+o(\delta),\ z\geqslant 1.$$

Если $0<z<1$, то $z-1+a\delta<0$ при малых значениях δ, то есть на множестве $\{Y(x+\delta)-Y(x)=a\delta-1\}$ для упомянутого выше события в фигурных скобках выполняется включение:

$$\left\{Y(x+\tau-0)\leqslant z+Y(x+\delta)\right\}$$
$$=\left\{Y(x+\tau-0)\leqslant (z-1+a\delta)+Y(x)\right\}\subset\left\{Y(x+\tau-0)<Y(x)\right\}.$$

Последнее событие невозможно из-за возрастания траекторий $Y(t)$ на интервале $[x, x+\tau)$. Следовательно, при $0 < z < 1$ вероятность $P_2 = 0$.

Отсюда, а также из (35–37), получаем соотношения:

$$\varphi^+(x+\delta, z) = \varphi^+(x, z+a\delta) - p\varphi^+(x, z+a\delta)\delta + o(\delta), \quad x > 0,\ 0 < z < 1,$$

$$(38) \qquad \varphi^+(x+\delta, z) = \varphi^+(x, z+a\delta) - p\varphi^+(x, z+a\delta)\delta$$

$$+p\varphi^+(x, z-1+a\delta)\delta + o(\delta), \quad x > 0,\ z \geqslant 1,$$

Первое из этих выражений представимо в виде:

$$\frac{\varphi^+(x+\delta, z) - \varphi^+(x, z)}{\delta} = a\frac{\varphi^+(x, z+a\delta) - \varphi^+(x, z)}{a\delta} - p\varphi^+(x, z+a\delta) + o(1).$$

Так как, согласно леммам 6 и 9, функция $\varphi^+(x, z)$ непрерывна по z и п. в. дифференцируема по x и z, то при $\delta \to 0$ получаем первое из уравнений (34). Аналогично, второе соотношение из (38) приводит ко второй формуле из (34).

Равномерная ограниченность производной $\varphi^+_x(x, z)$ следует из равномерной ограниченности $\varphi^+_z(x, z)$ (лемма 10) и равенств (34).

Краевые условия для функции $\varphi^+(x, z)$ находятся из равенства $Y(0) = 0$ и формулы (7). □

Лемма 12. *Функция $\varphi^-(x, z)$ из леммы 3, является решением дифференциального уравнения:*

$$(39) \qquad \varphi^-_x(x, z) = a\varphi^-_z(x, z) + q\varphi^-(x, z) - q\varphi^-(x, z+1), \quad x < 0,\ z > 0,$$

с граничными условиями:

$$\varphi^-(0, z) = 1 - e^{-\beta z}, \quad \varphi^-(x, 0) = 0, \quad \varphi^-(x, +\infty) = 1,$$

где константа β определена в (5).

Частная производная $\varphi^-_x(x, z)$ равномерно ограничена в области $x < 0$, $z > 0$.

Доказательство. Выберем $\delta > 0$ настолько малым, что $z - a\delta > 0$. Тогда

$$(40) \quad \varphi^-(x-\delta, z) = \mathbf{P}\left(\sup_{t \geqslant x-\delta} Y(t) < z + Y(x-\delta); Y(x) - Y(x-\delta) = a\delta\right) +$$

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t \geqslant x-\delta} Y(t) < z + Y(x-\delta); Y(x) - Y(x-\delta) = a\delta - 1\right) + o(\delta) = P_1 + P_2 + o(\delta).$$

Так как на множестве $\{Y(x) - Y(x-\delta) = a\delta\}$ выполняется равенство

$$\sup_{t \geqslant x-\delta} Y(t) = \sup_{t \geqslant x} Y(t),$$

то, учитывая независимость приращений, находим

$$P_1 = \mathbf{P}\left(\sup_{t \geqslant x} Y(t) < (z - a\delta) + Y(x); Y(x) - Y(x-\delta) = a\delta\right)$$

$$= \varphi^-(x, z-a\delta)\mathbf{P}\left(\nu_-(q\delta) = 0\right),$$

или, что тоже,

$$(41) \qquad P_1 = \varphi^-(x, z-a\delta) - q\varphi^-(x, z-a\delta)\delta + o(\delta).$$

Если на промежутке $[x-\delta, x]$ произошел скачок процесса $Y(t) = at+\nu_-(q|t|)$, $t<0$, и $x-\tau$ $(\tau>0)$ момент этого скачка, то

$$P_2 = \mathbf{P}\left(\sup_{t\geqslant x-\delta} Y(t) < z + Y(x-\delta); Y(x) - Y(x-\delta) = a\delta - 1\right)$$
$$= \mathbf{P}\left(\max\left\{Y(x-\tau), \sup_{t\geqslant x} Y(t)\right\} < (z+1-a\delta) + Y(x); Y(x)-Y(x-\delta) = a\delta - 1\right).$$

Ввиду того, что $Y(x-\tau)-1 < Y(x) < (z-a\delta)+Y(x)$, вероятность P_2 запишется в виде:

$$P_2 = \mathbf{P}\left(\sup_{t\geqslant x} Y(t) < (z+1-a\delta) + Y(x)\right)\mathbf{P}\left(\nu_-(q\delta) = 1\right)$$
$$= q\varphi^-(x, z+1-a\delta)\delta + o(\delta).$$

Отсюда, а также из (40–41) приходим к выражению:

$$\varphi^-(x-\delta, z) = \varphi^-(x, z-a\delta) - q\varphi^-(x, z-a\delta)\delta + q\varphi^-(x, z+1-a\delta)\delta + o(\delta),$$

которое преобразуется к предельному соотношению:

$$\frac{\varphi^-(x,z)-\varphi^-(x-\delta,z)}{\delta} = a\,\frac{\varphi^-(x,z)-\varphi^-(x,z-a\delta)}{a\delta} + q\varphi^-(x,z-a\delta) - q\varphi^-(x,z+1-a\delta) + o(1).$$

При $\delta \to 0$ с учетом утверждений лемм 8 и 9 получаем уравнение (39).

Равномерная ограниченность производной $\varphi_x^-(x,z)$ является следствием леммы 10 и равенства (39).

Краевые условия вытекают непосредственно из определения функции $\varphi^-(x,z)$. Действительно, в силу (6) и условия $Y(0)=0$

$$\varphi^-(0,z) = \mathbf{P}\left(\sup_{t\geqslant 0} Y(t) < z\right) = 1 - e^{-\beta z}.$$

Второе условие: $\varphi^-(x,0) = 0$ при $x<0$ следует из невозможности события $\sup_{t\geqslant x} Y(t) < Y(x)$. □

4. Основные утверждения

В этом параграфе находятся явные выражения для функции распределения (2) на положительной (теорема 3) и отрицательной (теорема 4) полуосях.

Теорема 3. *Если $x \geqslant 0$, то*

$$G(x) = \frac{(p-a)q}{(p-q)a} + a\beta\int_0^x \varphi^+(t,0)\,dt$$
$$= \frac{(p-a)q}{(p-q)a} + \beta\int_0^{ax} e^{-pt/a}\sum_{k=0}^{[t]}\psi(t-k)\left(\frac{p}{a}\right)^k\left(\frac{t^k}{k!} - \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right)dt,$$

где константа β определена в (5).

Доказательство. Умножим каждое из уравнений (34) на $e^{-\beta z}$, затем проинтегрируем их по соответствующим z, и сложим интегралы.

$$\int\limits_0^\infty \varphi_x^+(x,z)e^{-\beta z}\,dz = a\int\limits_0^\infty \varphi_z^+(x,z)e^{-\beta z}\,dz - p\int\limits_0^\infty \varphi^+(x,z)e^{-\beta z}\,dz + p\int\limits_1^\infty \varphi^+(x,z-1)e^{-\beta z}\,dz. \tag{42}$$

Обозначим

$$F(x) = \int\limits_0^\infty \varphi^+(x,z)e^{-\beta z}\,dz. \tag{43}$$

В силу равномерной ограниченности производной $\varphi_x^+(x,z)$ (лемма 11), интеграл в левой части равенства (42) равен

$$F'(x) = \int\limits_0^\infty \varphi_x^+(x,z)e^{-\beta z}\,dz. \tag{44}$$

Для остальных интегралов в (42) верны следующие результаты:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^\infty \varphi_z^+(x,z)e^{-\beta z}\,dz = \int\limits_0^\infty e^{-\beta z}\,d_z\varphi^+(x,z) = -\varphi^+(x,0) + \beta F(x),\\ \int\limits_1^\infty \varphi^+(x,z-1)e^{-\beta z}\,dz = e^{-\beta}F(x).\end{gathered} \tag{45}$$

Заменяя интегралы в (42) на соответствующие им выражения в равенствах (43–45), приходим к дифференциальному уравнению:

$$F'(x) = \left\{a\beta - p\left(1-e^{-\beta}\right)\right\}F(x) - a\varphi^+(x,0),$$

а с учетом (5)

$$F'(x) = -a\varphi^+(x,0). \tag{46}$$

Из краевых условий, приведенных в лемме 11 и (10) находим

$$F(0) = \int\limits_0^\infty \varphi^+(0,z)e^{-\beta z}\,dz = \int\limits_0^\infty \psi(z)e^{-\beta z}\,dz = \frac{(a-q)p}{(p-q)a\beta}. \tag{47}$$

Решение дифференциального уравнения (46) с начальным условием (47) имеет вид:

$$F(x) = \frac{(a-q)p}{(p-q)a\beta} - a\int\limits_0^x \varphi^+(t,0)\,dt,$$

а так как, согласно (3), функция распределения $G(x) = 1 - \beta F(x)$, то отсюда выводим первое из равенств в утверждении теоремы. Второе равенство вытекает из представления (19). $\square$

Теорема 4. *Если* $x \leqslant 0$, *то*

$$G(x) = \frac{(p-a)q}{(p-q)a} - \frac{(a-q)q}{a} \int\limits_x^0 \varphi^-(t,1)\,dt,$$

где подынтегральная функция найдена в (27)*:*

$$\varphi^-(t,1) = 1 - e^{\beta(1-q/p)a|t|-\beta} + \sum_{k=0}^{[a|t|-1]} \pi_k(a,q)\left(e^{\beta(1-q/p)(a|t|-k-1)} - 1\right),$$

здесь

$$\pi_k(a,q) = \frac{\left(q(k+1)/a\right)^k e^{-q(k+1)/a}}{(k+1)!}.$$

Доказательство. Интегрируем равенство (39) по $d\psi(z)$:

$$\int\limits_0^\infty \varphi_x^-(x,z)\,d\psi(z) = a\int\limits_0^\infty \varphi_z^-(x,z)\,d\psi(z) + q\int\limits_0^\infty \varphi^-(x,z)\,d\psi(z) - q\int\limits_0^\infty \varphi^-(x,z+1)\,d\psi(z).$$

Используя представление (9) и лемму 11, приходим к уравнению:

$$G'(x) = a\int\limits_0^\infty \varphi_z^-(x,z)\,d\psi(z) + qG(x) - q\int\limits_0^\infty \varphi^-(x,z+1)\,d\psi(z). \tag{48}$$

Первый из интегралов в правой части (48), с учетом (8), преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} a\int\limits_0^\infty \varphi_z^-(x,z)\,d\psi(z) &= a\int\limits_0^\infty \varphi_z^-(x,z)\frac{q}{a}\left(\psi(z)-\psi(z-1)\right)dz \\ &= q\left(\int\limits_0^\infty \varphi_z^-(x,z)\psi(z)\,dz - \int\limits_0^\infty \varphi_z^-(x,z+1)\psi(z)\,dz\right) = q\left(I_1 - I_2\right). \end{aligned} \tag{49}$$

Для нахождения интегралов I_1, I_2 используем краевые условия для функций $\psi(z)$ и $\varphi^-(x,z)$, приведенные в леммах 2 и 12.

$$I_1 = \int\limits_0^\infty \psi(z)\,d_z\varphi^-(x,z) = \psi(z)\varphi^-(x,z)\Big|_0^\infty - G(x) = 1 - G(x),$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int\limits_0^\infty \psi(z)\,d_z\varphi^-(x,z+1) = \psi(z)\varphi^-(x,z+1)\Big|_0^\infty - \int\limits_0^\infty \varphi^-(x,z+1)\,d\psi(z) \\ &= 1 - (1-q/a)\,\varphi^-(x,1) - \int\limits_0^\infty \varphi^-(x,z+1)\,d\psi(z). \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (49) приходим к равенству:

$$a\int\limits_0^\infty \varphi_z^-(x,z)\,d\psi(z) = -qG(x) + q\,(1-q/a)\,\varphi^-(x,1) + q\int\limits_0^\infty \varphi^-(x,z+1)\,d\psi(z).$$

Отсюда и из (48) получаем дифференциальное уравнение:

$$G'(x) = q\,(1 - q/a)\,\varphi^{-}(x,1), \quad x \leqslant 0, \tag{50}$$

с начальным условием

$$G(0) = 1 - \beta\int_0^\infty \varphi^{+}(0,z)e^{-\beta z}\,dz = 1 - \beta\int_0^\infty \psi(z)e^{-\beta z}\,dz$$
$$= 1 - \frac{(a-q)p}{(p-q)a} = \frac{(p-a)q}{(p-q)a}. \tag{51}$$

Здесь мы воспользовались формулами (3), (10) и первым из краевых условий леммы 11. Интегрирование (50) с уловием (51) приводит к утверждению теоремы. □

References

[1] A. V. Skorokhod, *Stochastic Processes with Independent Increments*, Nauka, Moscow (1964). [in Russian] Zbl 0132.12504

[2] V.I. Rotar', V.E. Bening, *Introduction to the mathematical theory of insurance*, Obozr. Prikl. Prom. Mat., **1**:5 (1994), 698–779. [in Russian] Zbl 0832.62090

[3] I. A. Ibragimov, R. Z. Khas'minski, *Asymptotic Theory of Estimation*, Nauka, Moscow (1979). [in Russian] Zbl 0467.62025

[4] V. E. Mosyagin, *Asymptotic representation of the process of the likelihood ratio in the case of a discontinuous density*, Sibirsk. Mat. Zh., **35**:2 (1994), 416–423; translation from Sib. Mat. Zh., **35**:2 (1994), 416–423. Zbl 0858.62021

[5] V. E. Mosyagin, *Estimation of the convergence rate for the distributions of normalized maximum likelihood estimators in the case of a discontinuous density*, Sib. Math. J., **37**:4 (1996), 788–796; translation from Sib. Mat. Zh., **37**:4 (1996), 895–903. Zbl 0878.62013

Vyacheslav Evgenevich Mosyagin
Tyumen State University,
Volodarskogo str., 6,
625003, Tyumen, Russia
E-mail address: vmosyagin@mail.ru

Natalya Aleksandrovna Shvemler
Tyumen State University,
Volodarskogo str., 6,
625003, Tyumen, Russia
E-mail address: shvemler.natalya@mail.ru