S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 130–136 (2016) УДК 519.17
DOI 10.17377/semi.2016.13.011 MSC 05C25

АВТОМОРФИЗМЫ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{45, 42, 1; 1, 6, 45\}$

А.А. МАХНЕВ, В.И. БЕЛОУСОВА

Abstract. Prime divisors of orders of automorphisms and the fixed point subgraphs of automorphisms of prime orders are studied for a hypothetical distance-regular graph with intersection array $\{45, 42, 1; 1, 6, 45\}$. It is proved that this graph does not vertex-symmetric.

Keywords: distance-regular graph, automorphism group, antipodal cover.

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным степени* k, если степень любой вершины из Γ равна k. Граф Γ назовем *реберно регулярным с параметрами* (v, k, λ), если он содержит v вершин, регулярен степени k, и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф с параметрами* (v, k, λ, μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами, и $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин для любых двух вершин a, b, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом*.

Makhnev, A.A., Belousova, V.I., Automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{45, 42, 1; 1, 6, 45\}$.

Работа поддержана в рамках соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006. Второй автор поддержан также молодежным грантом РФФИ (проект 14-01-31298 мол_а).

Поступила 13 января 2016 г., опубликована 4 матра 2016 г.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, ..., d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$. Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Γ, неподвижных относительно любого автоморфизма из X. Далее, через $p^l_{ij}(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечения графа Γ.

Граф называется реберно симметричным, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве его дуг (упорядоченных ребер).

В работе [1] найдены массивы пересечений дистанционно регулярных локально циклических графов с числом вершин, не большим 1000.

Предложение 1. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра, большего 2, на $v \leq 1000$ вершинах. Если $\lambda = 2$ и $\mu > 1$, то верно одно из утверждений:*

(1) Γ — *примитивный граф с массивом пересечений* $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$, $\{19, 16, 8; 1, 2, 8\}$, $\{24, 21, 3; 1, 3, 18\}$, $\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$, $\{51, 48, 8; 1, 4, 36\}$;

(2) Γ — *антиподальный граф с* $\mu = 2$ *и массивом пересечений* $\{2r + 1, 2r - 2, 1; 1, 2, 2r + 1\}$, $r \in \{3, 4, ..., 21\} - \{10, 16\}$ *и* $v = 2r(r + 1)$;

(3) Γ — *антиподальный граф с* $\mu \geq 3$ *и массивом пересечений* $\{15, 12, 1; 1, 4, 15\}$, $\{18, 15, 1; 1, 5, 18\}$, $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$, $\{35, 32, 1; 1, 4, 35\}$, $\{45, 42, 1; 1, 6, 45\}$, $\{42, 39, 1; 1, 3, 42\}$, $\{75, 72, 1; 1, 12, 75\}$.

Продолжается исследование реберно симметричных графов с такими массивами пересечений. Окрестность вершины в таком графе является объединением изолированных многоугольников. В работе [2] завершено изучение автоморфизмов примитивных графов из заключения предложения 1 (см. также ссылки в [2] на предыдущие работы). Известно существование реберно симметричных графов из пункта (2) заключения предложения, если k — степень простого числа (это графы из схемы Мэтона). Такие графы являются локально циклическими, если k — простое число. Только для $r \in \{7, 17, 19\}$ число k — не степень простого числа. Соответствующие случаи рассмотрены в [3], [4], [5]. Автоморфизмы графов с массивами из пункта (3) $\{15, 12, 1; 1, 4, 15\}$ и $\{75, 72, 1; 1, 12, 75\}$ найдены в [6], [7]. Автоморфизмы графов с массивами $\{42, 39, 1; 1, 3, 42\}$ и $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$ найдены в [8], [9]. Реберно симметричный граф с массивом пересечений $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$ существует и имеет группу автоморфизмов $(Z_4 \times U_3(3)).Z_2$. Автоморфизмы графа с массивом $\{18, 15, 1; 1, 5, 18\}$ найдены К.С. Ефимовым и А.А. Махневым (работа направлена в Матем. заметки).

В данной работе изучаются автоморфизмы гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{45, 42, 1; 1, 6, 45\}$.

Антиподальный дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 имеет (см. [10]) массив пересечений $\{k, \mu(r - 1), 1; 1, \mu, k\}$, $v = r(k + 1)$ вершин и спектр

$k^1, n^f, (-1)^k, (-m)^g$, где $n, -m$ — корни уравнения $x^2-(\lambda-\mu)x-k=0$ и $f=m(r-1)(k+1)/(n+m)$, $g=n(r-1)(k+1)/(n+m)$. Если $\mu\neq\lambda$, то собственные значения графа целые и параметры графа выражаются через r, n, m: $k=nm$, $\mu=(m-1)(n+1)/r$, $\lambda=\mu+n-m$.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{45,42,1;1,6,45\}$. Тогда Γ имеет $v=1+45+315+7=368$ вершин и спектр $45^1, 5^{207}, -1^{45}, -9^{115}$. Порядок клики в Γ не превосходит 4, так как $\lambda=2$.

Теорема 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{45,42,1;1,6,45\}$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$ содержит по s вершин в t антиподальных классах. Тогда $\pi(G)\subseteq\{2,3,5,7,23\}$ и выполняется одно из утверждений:*

(1) *Ω — пустой граф и либо*

(i) *$p=2$, $\alpha_3(g)=16l$, $\alpha_1(g)=28m+32-12l$ и $\alpha_2(g)=324-28m-4l$, либо*

(ii) *$p=23$, $\alpha_1(g)=46$ и $\alpha_2(g)=322$;*

(2) *$t=1$, либо $p=3$ и $\alpha_1(g)=42l+5s+26$, либо $p=5$ и $\alpha_1(g)=70l+5s+40$;*

(3) *$p=7$, $t=4$, $s=1$ и $\alpha_1(g)=98l$;*

(4) *$p=5$, либо $s=8$, $t=6$ и $\alpha_1(g)=0$, либо $s=3$, $t=11$ и $\alpha_1(g)=70l+185$;*

(5) *$p=3$, либо $s=8$, $t=4$ и $\alpha_1(g)=42l$, либо $s=5$, $t=4$ и $\alpha_1(g)=42l+24$ или $t=7$ и $\alpha_1(g)=42l-3$, либо $s=2$, $t=4$ и $\alpha_1(g)=42l+6$.*

(6) *$p=2$, t четно и либо*

(i) *$s=8$, $t=2$, $\alpha_1(g)=4(7l+25)$ или $t=4$, $\alpha_1(g)=0$, либо*

(ii) *$s=6$, $t\leq 8$, $\alpha_1(g)=28l+24t+32$, либо*

(iii) *$s=4$, $t\leq 12$, $\alpha_1(g)=28l+14t+32$, либо*

(iv) *$s=2$, $t\leq 8$, $\alpha_1(g)=28l+3t+32$.*

Следствие 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{45,42,1;1,6,45\}$. Тогда группа $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует интранзитивно на множестве его вершин.*

2. Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{45,42,1;1,6,45\}$

Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [11]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X,\mathbf{R})$ с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i\geq 1$ класс R_i состоит из пар (u,w) таких, что $d(u,w)=i$. Для $u\in\Gamma$ положим $k_i=|\Gamma_i(u)|$, $v=|\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X, в котором вершины u,w смежны, если $d(u,w)=i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i>0$ и $A_0=I$ — единичная матрица. Тогда $A_iA_j=\sum p_{ij}^l A_l$ для чисел пересечений p_{ij}^l.

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j,l) стоит p_{ij}^l. Тогда собственные значения $p_1(0),...,p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0=1,...,m_d$. Матрицы P и Q, у которых на месте (i,j) стоят стоят $p_j(i)$ и $q_j(i)=m_jp_i(j)/n_i$ соответственно, называются первой и второй матрицей собственных значений схемы и связаны равенством $PQ=QP=|X|I$.

Пусть u_j и w_j — левый и правый собственные векторы матрицы P_1, отвечающие собственному значению $p_1(j)$ и имеющие первую координату 1. Тогда кратность m_j собственного значения $p_1(j)$ равна $v/\langle u_j, w_j\rangle$. Фактически, w_j являются столбцами матрицы P и $m_j u_j$ являются строками матрицы Q.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных подпространств $W_0, ..., W_d$ матрицы смежности $A = A_1$ графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. § 3.7 [11]) для $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{d} Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если правая часть выражения для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

Лемма 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{45, 42, 1; 1, 6, 45\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Если $g \in G$, χ_2 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 45, χ_3 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 115. Тогда $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого натурального числа l, взаимно простого с $|g|$, $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/8 - 1$, $\chi_3(g) = (35\alpha_0(g) - 7\alpha_1(g) + \alpha_2(g) - 5\alpha_3(g))/112$. Если $|g| = p$ — простое число, то $\chi_2(g) - 45$ и $\chi_3(g) - 115$ делятся на p, а если $|g| = p^2$, p — простое число, то $\chi_3(g^p) - 115$ делится на p^2.*

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 207 & 23 & -23/7 & -207/7 \\ 45 & -1 & -1 & 45 \\ 115 & -23 & 23/7 & -115/7 \end{pmatrix}.$$

Значит, $\chi_3(g) = (5\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + \alpha_2(g)/7 - 5\alpha_3(g)/7)/16$.

Аналогично, $\chi_2(g) = (45\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) + 45\alpha_3(g))/368$. Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 368 - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/8 - 1$.

Остальные утверждения леммы следуют из лемм 1-2 [12]. □

В леммах 2–5 предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{45, 42, 1; 1, 6, 45\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Если Ω — непустой граф, то будем считать, что Ω содержит по s вершин в t антиподальных классах. Заметим, что $p^3_{22} = 270$. Для вершины $x \in \Gamma$ через $F(x)$ обозначим антиподальный класс, содержащий x.

Лемма 2. *Если Ω — пустой граф, то выполняется одно из утверждений:*

(1) *$p = 2$, $\alpha_3(g) = 16l$, $\alpha_1(g) = 28m + 32 - 12l$ и $\alpha_2(g) = 324 - 28m - 4l$;*

(2) *$p = 23$, $\alpha_1(g) = 46$ и $\alpha_2(g) = 322$.*

Доказательство. Так как $368 = 23 \cdot 16$, то $p = 2$ или 23.

Пусть $p = 2$. Тогда $\alpha_3(g) = 16l$, $\chi_3(g) = (-7\alpha_1(g) + (368 - \alpha_1(g) - 16l) - 80l)/112$, поэтому число $(46 - \alpha_1(g) - 12l)/14$ нечетно. Отсюда $\alpha_1(g) = 28m + 32 - 12l$ и $\alpha_2(g) = 324 - 4l - 28m$.

Пусть $p = 23$. Тогда $\alpha_3(g) = 0$, $\chi_3(g) = (-7\alpha_1(g) + \alpha_2(g))/112$, поэтому $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 368$, $-7\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 46$ и $\alpha_2(g) = 322$. □

Лемма 3. *Пусть Ω содержит вершину a. Тогда $p \le 7$ и выполняются следующие утверждения:*

(1) *если $t = 1$, то либо $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 42l + 5s + 26$, либо $p = 5$ и $\alpha_1(g) = 70l + 5s + 40$;*

(2) *если $p = 7$, то $t = 4$, $s = 1$ и $\alpha_1(g) = 98l$;*

(3) *если $p = 5$, то либо $s = 8$, $t = 6$ и $\alpha_1(g) = 0$, либо $s = 3$, $t = 11$ и $\alpha_1(g) = 70l + 185$;*

(4) *если $p = 3$, то либо $s = 8$, $t = 4$ и $\alpha_1(g) = 42l$, либо $s = 5$, $t = 4$ и $\alpha_1(g) = 42l + 24$ или $t = 7$ и $\alpha_1(g) = 42l - 3$, либо $s = 2$, $t = 4$ и $\alpha_1(g) = 42l + 6$.*

Доказательство. Пусть $\alpha_1(g) = pw_1$.

Если $t = 1$, то p делит 45, $\chi_3(g) = (5s - \alpha_1(g) + 40)/14$ и $\chi_3(g) - 115$ делится на p. В случае $p = 3$ число $\chi_3(g)$ сравнимо с 1 по модулю 3 и $\alpha_1(g) = 42l + 5s + 26$. В случае $p = 5$ имеем $\alpha_1(g) = 70l + 5s + 40$.

Если $p > 7$, то $|\Omega| = 8t$, Ω — регулярный граф степени $t - 1$ и p делит $46 - t$. Число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $8t(46 - t)$, но не больше $6(368 - 8t)$, поэтому либо $t \le 6$, либо $t \ge 46$, противоречие.

Пусть $p = 7$. Если $s = 8$, то получим противоречие как и выше. Значит, $s = 1$, Ω является t-кликой и $t = 4$. Отсюда число $\chi_3(g) = (42 - \alpha_1(g)))/14$ сравнимо с 3 по модулю 7 и $\alpha_1(g) = 98l$.

Пусть $p = 5$. Если $s = 8$, то, как и выше, $t \le 6$, поэтому $t = 6$, каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с 6 вершинами из Ω, $\alpha_2(g) = 320$ и $\chi_3(g) = (5 \cdot 48 + 320)/16 = 35$.

Если $s = 3$, то число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $3t(46 - t)$, но не больше $6(368 - 8t)$, поэтому $t \le 16$. Отсюда $t \in \{6, 11, 16\}$. В случае $t = 16$ каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с 6 вершинами из Ω, поэтому $\alpha_2(g) = 240$ и $\chi_3(g) = (35 \cdot 48 - 400 + 240)/112$, противоречие. В случае $t = 6$ для вершин $\{a_1, a_2, a_3\}$ из $\Omega \cap F$, где F — антиподальный класс, $b \in \Omega(a_1)$ подграф $\Omega(b)$ содержит 3 вершины из $a_1^\perp$ и по вершине из $[a_2]$, $[a_3]$. Отсюда Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{5, 2, 1; 1, 1, 5\}$, противоречие. В случае $t = 11$ имеем $\chi_3(g) = (185 - \alpha_1(g))/14$ и $\alpha_1(g) = 70l + 185$.

Пусть $p = 3$. Тогда t сравнимо с 1 по модулю 3. Если $s = 8$, то, как и выше, $t \le 6$, поэтому $t = 4$, число $\chi_3(g) = 13 - \alpha_1(g)/14$ сравнимо с 1 по модулю 3, поэтому $\alpha_1(g) = 42l$.

Если $s = 5$, то число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $5t(46 - t)$, но не больше $6(368 - 8t)$, поэтому $t \le 9$. Отсюда $t = 4, 7$. В случае $t = 4$ число $\chi_3(g) = (122 - \alpha_1(g))/14$ сравнимо с 1 по модулю 3, поэтому $\alpha_1(g) = 42l + 108$. В случае $t = 7$ число $\chi_3(g) = (179 - \alpha_1(g))/14$ сравнимо с 1 по модулю 3, поэтому $\alpha_1(g) = 42l + 165$.

Если $s = 2$, то число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $2t(46 - t)$, но не больше $6(368 - 8t)$, поэтому $t \le 24$. Отсюда $t \in \{4, 7, ..., 22\}$. Для вершин $\{a_1, a_2\}$ из $\Omega \cap F$, где F — антиподальный класс, $b \in \Omega(a_1)$ подграф $\Omega(b)$ содержит 3 вершины из $a_1^\perp$ и $t - 4$ вершины из $[a_2]$. Отсюда $t \le 10$, и либо $t = 4$, либо Ω — граф Тэйлора с массивом пересечений $\{t - 1, t - 4, 1; 1, t - 4, t - 1\}$. В последнем случае имеем противоречие с тем, что окрестность вершины в графе Тэйлора — сильно регулярный граф с параметрами $(v', 2\mu', \lambda', \mu')$. Наконец,

$\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 336$, число $\chi_3(g) = (62 - \alpha_1(g))/14$ сравнимо с 1 по модулю 3, поэтому $\alpha_1(g) = 42l + 48$. $\square$

Лемма 4. *Если $p = 2$, то t четно и выполняется одно из утверждений:*

(1) $s = 8$, $t = 2$, $\alpha_1(g) = 4(7l + 25)$ *или* $t = 4$, $\alpha_1(g) = 0$, *если G содержит такой элемент h, что $h^2 = g$, то $t = 2$;*

(2) $s = 6$, $t \le 8$, $\alpha_1(g) = 28l + 24t + 32$*;*

(3) $s = 4$, $t \le 12$, $\alpha_1(g) = 28l + 14t + 32$*;*

(4) $s = 2$, $t \le 8$, $\alpha_1(g) = 28l + 3t + 32$.

Доказательство. Пусть $p = 2$. Тогда t четно. Если $s = 8$, то, как и выше, $t \le 6$, $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 368 - 8t$, число $\chi_3(g) = (34t - \alpha_1(g) + 46)/14$ нечетно. Отсюда $\alpha_1(g) = 4(7l + 17t/2 + 8)$. Так как каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна точно с t вершинами из Ω, то в случае $t > 2$ имеем $\alpha_1(g) = 0$, поэтому $t = 4$ и $l = -6$.

Допустим, что G содержит такой элемента h, что $h^2 = g$. Тогда $46 - t$ делится на 4, поэтому $t = 2$.

Пусть $s = 6$. Тогда число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $6t(46 - t)$, но не больше $6(368 - 8t)$, поэтому $t \le 8$, число $\chi_3(g) = (24t - \alpha_1(g) + 46)/14$ нечетно, и $\alpha_1(g) = 28l + 24t + 32$.

Пусть $s = 4$. Тогда число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $4t(46 - t)$, но не больше $6(368 - 8t)$, поэтому $t \le 12$, число $\chi_3(g) = (14t - \alpha_1(g) + 46)/14$ нечетно, и $\alpha_1(g) = 28l + 14t + 32$.

Пусть $s = 2$, $a \in \Omega$, a^* — антипод a в Ω и $b \in \Omega(a)$. Тогда $\Omega(b)$ содержит не более 3 вершин из $a^\perp$ и не более 6 вершин из $[a^*]$, поэтому $t \le 10$, число $\chi_3(g) = (3t - \alpha_1(g) + 46)/14$ нечетно, и $\alpha_1(g) = 28l + 3t + 32$. В случае $t = 10$ Ω является графом Тэйлора с массивом пересечений $\{9, 6, 1; 1, 6, 9\}$. Противоречие с тем, что окрестность вершины в графе Тэйлора — сильно регулярный граф с параметрами $(v', 2\mu', \lambda', \mu')$. $\square$

Из лемм 2–5 следует теорема.

3. Граф с массивом пересечений $\{45, 42, 1; 1, 6, 45\}$ не является вершинно симметричным

До конца работы предполагается, что Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{45, 42, 1; 1, 6, 45\}$ и группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ.

Лемма 5. *Если f — элемент порядка* 23 *из G, g — элемент простого порядка $p < 23$ из $C_G(f)$, то $p = 2$, $\alpha_1(g) = 368$ и $|C_G(f)|$ не делится на* 4.

Доказательство. Пусть f — элемент порядка 23 из G, g — элемент простого порядка $p < 23$ из $C_G(f)$. По теореме $\alpha_1(f) = 46$ и $\alpha_2(f) = 322$, поэтому $|C_G(f)|$ не делится на 4.

Из действия f на Ω заключаем, что $|\Omega| = 0$, $p = 2$ и числа $\alpha_3(g) = 16l$, $\alpha_1(g) = 28m + 32 - 12l$ и $\alpha_2(g) = 324 - 28m - 4l$ делятся на 46. Отсюда либо $\alpha_3(g) = 368$ и $\chi_3(g) = -5 \cdot 368/112$, противоречие, либо $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 368$ и $\chi_3(g) = -23$. $\square$

Завершим доказательство следствия. Допустим, что $Q = O_2(G) \ne 1$. Тогда $|Q : Q_a|$ делит 16 и Q_a фиксирует некоторую вершину e из антиподального класса, содержащего a. Так как $|[a]| = 45$, то Q_a фиксирует некоторую вершину

$b \in [a]$ и вершину $c \in [e] \cap F(b)$. Из действия Q_a на $F - \{a, e\}$ следует, что Q_a содержит подгруппу Q_a^0 индекса делящего 16, поточечно фиксирующую F. Тогда Q_a^0 поточечно фиксирует $F(b)$. Ввиду леммы 5 Q_a^0 — элементарная абелева 2-группа, поточечно фиксирующая $F(c_1), F(c_2)$, где $\{c_1, c_2\} = [a] \cap [b]$. Из действия Q_a^0 на оставшихся 42 антиподальных классах следует, что $|Q_a^0| \leq 2$. Отсюда $|Q| \leq 2^9$.

Если $|G|$ делится на 23, то из действия подгруппы $\langle f \rangle$ порядка 23 на $O_2(G)$ следует, что $O_2(G) = 1$. Теперь по таблице 1 из [13] цоколь T группы G содержит элемент порядка 11, противоречие. Следствие доказано.

References

[1] Burichenko V.P., Makhnev A.A., *On amply regular locally cyclic graphs*, Sovrem. math. problems. Absracrs of 42 Vserossiiskoi Molod. Conf. IMM UB RAS, Yekaterinburg 2011, 181–183.

[2] Makhnev A.A., Nirova M.S., *On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array* $\{51, 48, 8; 1, 4, 36\}$, Doklady Mathematics, **87**:3 (2013), 269-–273. Zbl 1297.05165

[3] Burichenko V.P., Makhnev A.A., *On automorphisms of distance-regular graph with intersection array* $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$, Doklady Mathematics, **86**:1 (2012), 519-–523. Zbl 1293.05222

[4] Tsiovkina L.Yu., *On automorphisms of distance-regular graph with intersection array* $\{35, 32, 1; 1, 2, 35\}$, Sibirean electr. Math. Reports. **9** (2012), 285–293. Zbl 06509016

[5] Belousov I.N., *On automorphisms of distance-regular graph with intersection array* $\{19, 16, 8; 1, 2, 8\}$, Doklady Mathematics **86**:3 (2012), 801–804. Zbl 06149507

[6] Burichenko V.P., Makhnev A.A., *Aautomorphisms of distance-regular graph with intersection array* $\{15, 12, 1; 1, 4, 15\}$, Doklady Mathematics **91**:1 (2015), 37–40. Zbl 1325.05061

[7] Makhnev A.A., Chuksina N.V., *Aautomorphisms of distance-regular graph with intersection array* $\{75, 72, 1; 1, 12, 75\}$, Sibirean electr. Math. Reports. **12** (2015), 802–809.

[8] Makhnev A.A., Tsiovkina L.Yu., *On automorphisms of distance-regular graph with intersection array* $\{42, 39, 1; 1, 3, 42\}$, Doklady Mathematics **84**:3 (2011), 814–817. Zbl 1243.05243

[9] Tsiovkina L.Yu., *On automorphisms of distance-regular graph with intersection array* $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$, Sibirean electr. Math. Reports. **10** (2013), 689–698. Zbl 06509107

[10] Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A., *Distance-Regular Graphs*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York, 1989.

[11] Cameron P.J., *Permutation Groups*, London Math. Soc. Student Texts **45** (1999), Cambridge University Press, Cambridge. Zbl 0922.20003

[12] Gavrilyuk A.L., Makhnev A.A., *On automorphisms of distance-regular graph with intersection array* $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$, Doklady Mathematics **81**:3 (2010), 439–442. Zbl 1250.05059

[13] Zavarnitsine A.V., *Finite simple groups with narrow prime spectrum*, Sibirean electr. Math. Reports, **6** (2009), 1–12. Zbl 1289.20021

Alexandr Alexeevich Makhnev
Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS,
S. Kovalevskoi 16,
620990, Yekaterinburg, Russia
E-mail address: makhnev@imm.uran.ru

Veronika Igorevna Belousova
Ural Federal University,
Mira 16,
620000, Yekaterinburg, Russia
E-mail address: vkazarina@mail.ru