S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 137–147 (2016) УДК 510.67, 519.17

DOI 10.17377/semi.2016.13.012 MSC 03C48, 05B35, 05C63

ОБ АКСИОМАТИЗИРУЕМОСТИ НАСЛЕДСТВЕННЫХ КЛАССОВ ГРАФОВ И МАТРОИДОВ

А.В. ИЛЬЕВ

Abstract. In the paper, hereditary classes of graphs and matroids are studied by means of the model theory. The problems of first-order axiomatizability of some classes of graphs and matroids are considered. The criterion of axiomatizability of monotone hereditary classes of graphs defined by forbidden noninduced subgraphs is proved. Necessary and sufficient conditions of universal and finite axiomatizability of the monotone hereditary classes of graphs are obtained. It is proved that the class of matroids of fixed rank k is finitely axiomatizabile, as well as two hereditary classes of matroids of bounded rank — the class of matroids of rank not exeeding k and the class of partition matroids of rank not exeeding k. It is also shown that the hereditary class of matroids of finite rank is nonaxiomatizable.

Keywords: axiomatizability, graph, matroid, hereditary class.

1. Введение

Граф — это пара $G = (V, E)$, где V — непустое множество элементов, называемых *вершинами*, а E — множество неупорядоченных пар различных элементов из V, называемых *ребрами*. Если $(u, v) \in E$, то вершины u и v называются *смежными*.

Вопросы универсальной аксиоматизируемости и конечной аксиоматизируемости различных классов графов и гиперграфов вызывают традиционный

Iliev, A.V., On axiomatizability of hereditary classes of graphs and matroids.

Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013-2020 годы, п.I.1.1.3. «Теоретико-модельные и алгебро-геометрические свойства алгебраических систем».

Поступила 21 декабря 2015 г., опубликована 11 марта 2016 г.

интерес. Например, в [2] обсуждаются вопросы аксиоматизируемости наследственных классов графов, определенных в терминах запрещенных порожденных подграфов. Однако существуют наследственные классы графов, которые определяются в терминах запрещенных непорожденных подграфов. Примерами таких классов являются класс планарных графов, класс двудольных графов, класс графов максимальной степени, не превосходящей фиксированного $p \in \mathbb{N}$ (где $p \geq 2$) и другие. Поэтому естественно возникает задача поиска условий аксиоматизируемости монотонных наследственных классов графов, определенных в терминах запрещенных непорожденных подграфов.

Понятие матроида впервые было введено Уитни в работе [8] и охватывало только конечный случай.

Конечный матроид — это пара $M = (U, \mathcal{I})$, где U — непустое конечное множество, $\mathcal{I}$ — непустое семейство его подмножеств (называемых *независимыми*), обладающее свойствами:

(I1) если $I \in \mathcal{I},\ J \subseteq I$, то $J \in \mathcal{I}$ (наследственность);

(I2) для любых $I, J \in \mathcal{I}$ таких, что $|J| = |I| + 1$, существует элемент $j \in J \setminus I$, для которого $I \cup \{j\} \in \mathcal{I}$ (пополнение).

Максимальные независимые подмножества множества $A \subseteq U$ называются *базами* множества A. Максимальные независимые подмножества множества U называются *базами матроида* M. Напомним, что в матроиде все базы любого множества равномощны. *Рангом* $r(A)$ множества A называется мощность любой базы A. Число $r(M) = r(U)$ называется *рангом матроида* M.

В литературе наряду с конечными рассматриваются также бесконечные матроиды. Пусть $k \in \mathbb{N}$ — фиксированное число. В общем случае *матроид ранга, не большего* $k \in \mathbb{N}$, — это пара $M = (U, \mathcal{I})$, где U — непустое (возможно, бесконечное) множество, $\mathcal{I}$ — непустое семейство его независимых подмножеств, обладающее свойствами наследственности, пополнения, а также свойством (I3):

(I3) $|I| \leq k$ для всех $I \in \mathcal{I}$.

Чтобы определить класс *матроидов фиксированного ранга* $k \in \mathbb{N}$, в приведенном выше определении условие (I3) нужно заменить на условие (I3$'$):

(I3$'$) $r(M) = k$.

Данный класс матроидов можно определить также в терминах баз.

Матроид фиксированного ранга k — это пара $M = (U, \mathcal{B})$, где U — непустое множество, $\mathcal{B}$ — непустое семейство его баз, обладающее свойствами:

(B1) если $B_1, B_2 \in \mathcal{B},\ B_1 \neq B_2$, то $B_1 \not\subset B_2,\ B_2 \not\subset B_1$;

(B2) пусть $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Для каждого $x \in B_1$ существует такой $y \in B_2$, что $(B_1 \setminus x) \cup y \in \mathcal{B}$;

(B3) $|B| = k$ для всех $B \in \mathcal{B}$.

Класс *матроидов конечного ранга* является объединением всех классов матроидов фиксированного ранга k. Для его определения в терминах независимых множеств условие (I3) нужно заменить на условие (I3$''$):

(I3$''$) Существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $|I| \leq n$ для всех $I \in \mathcal{I}$ [1].

Аналогично он может быть определен и в терминах баз, если свойство (B3) заменить на свойство (B3$'$):

(B3$'$) Существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $|B| \leq n$ для всех $B \in \mathcal{B}$.

В данной работе средствами теории моделей изучаются наследственные классы графов и матроидов. Рассмотрены вопросы аксиоматизируемости различных классов графов и матроидов на языке логики первого порядка. Доказан критерий аксиоматизируемости монотонных наследственных классов графов, определенных в терминах запрещенных непорожденных подграфов. Найдены необходимые и достаточные условия универсальной и конечной аксиоматизируемости монотонных наследственных классов графов. Доказана конечная аксиоматизируемость класса матроидов фиксированного ранга k, а также конечная и универсальная аксиоматизируемость двух наследственных классов матроидов — класса матроидов ранга, не большего k, и класса матроидов разбиения ранга, не большего k. Показано также, что наследственный класс матроидов конечного ранга не является аксиоматизируемым.

2. Предварительные сведения из теории моделей

Алгебраические системы сигнатуры Σ будем называть Σ-*системами.* Σ-система $\mathcal{M} = \langle M, \Sigma\rangle$ называется *подсистемой* Σ-системы $\mathcal{N} = \langle N, \Sigma\rangle$ (обозначается $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$), если

1) $M \subseteq N$;

2) функции и предикаты в $\mathcal{M}$ являются ограничениями на M соответствующих функций и предикатов в $\mathcal{N}$;

3) множество M замкнуто относительно функций.

Две Σ-системы $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ называются *элементарно эквивалентными* (обозначается $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$), если для любого предложения φ сигнатуры Σ

$$\mathcal{M} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi.$$

Под *классом алгебраических систем* в дальнейшем будем понимать *абстрактный класс*, т. е. такое семейство Σ-систем, которое вместе с любой алгебраической системой содержит все изоморфные ей Σ-системы. Класс $\boldsymbol{K}$ алгебраических систем называется *аксиоматизируемым*, если существует такое множество предложений Z сигнатуры Σ, что произвольная система $\mathcal{M}$ принадлежит $\boldsymbol{K}$, если и только если любое предложение $\varphi \in Z$ истинно в $\mathcal{M}$. Множество предложений Z называется *множеством аксиом* для $\boldsymbol{K}$. Если для класса $\boldsymbol{K}$ существует конечное множество аксиом, то класс $\boldsymbol{K}$ называется *конечно аксиоматизируемым.*

Теорема 2.1 (Критерий конечной аксиоматизируемости)**.** [6] *Пусть $\boldsymbol{K}$ — класс алгебраических систем сигнатуры Σ. Класс $\boldsymbol{K}$ является конечно аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда он и его дополнение $\overline{\boldsymbol{K}}$ в классе всех Σ-систем аксиоматизируемы.*

Предложение φ называется *универсальным предложением* или $\forall$-*предложением*, если $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_n\, \psi$, где ψ — бескванторная формула, не содержащая других переменных, кроме $x_1, \dots, x_n$. Если для класса $\boldsymbol{K}$ существует множество аксиом, состоящее только из $\forall$-предложений, то класс $\boldsymbol{K}$ называется *универсально аксиоматизируемым* или $\forall$-*аксиоматизируемым.*

Теорема 2.2 (Критерий универсальной аксиоматизируемости)**.** [6] *Пусть $\boldsymbol{K}$ — аксиоматизируемый класс алгебраических систем сигнатуры Σ. Класс $\boldsymbol{K}$ $\forall$-аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подсистем.*

Класс алгебраических систем называется *наследственным*, если он замкнут относительно подсистем. Примерами наследственных классов являются классы матроидов ранга, не большего k, и класс матроидов конечного ранга. Заметим, что классы маторидов фиксированного ранга наследственными не являются.

Фильтр над непустым множеством I — это непустая совокупность $\mathcal{F}$ подмножеств множества I, удовлетворяющая условиям:

1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$;

2) если $X \in \mathcal{F}$, $X \subseteq Y \subseteq I$, то $Y \in \mathcal{F}$;

3) если $X, Y \in \mathcal{F}$, то $X \cap Y \in \mathcal{F}$.

Пусть I — бесконечное множество мощности $\overline{\overline{I}} = \alpha \geqslant \aleph_0$. Тогда семейство множеств $X \subseteq I$ таких, что $\overline{\overline{I \setminus X}} < \alpha$, является фильтром и называется *фильтром Фреше*. Примером фильтра Фреше над $\mathbb{N}$ является фильтр, состоящий из всех подмножеств $\mathbb{N}$, дополнения которых конечны.

Ультрафильтром называется максимальный фильтр, т. е. фильтр, не содержащийся ни в каком отличном от него фильтре.

Лемма 2.1. [6] *Для каждого фильтра над I существует содержащий его ультрафильтр над I.*

Лемма 2.2. [6] *Фильтр $\mathcal{F}$ над I является ультрафильтром тогда и только тогда, когда для любого $X \subseteq I$ либо $X \in \mathcal{F}$, либо $I \setminus X \in \mathcal{F}$.*

Пусть $\{\mathcal{A}_i = \langle A_i, \Sigma\rangle \mid i \in I\}$ — семейство алгебраических систем сигнатуры Σ. *Декартовым* или *прямым произведением* семейства систем $\{\mathcal{A}_i\}$ называется Σ-система $\mathcal{A} = \prod\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i = \langle A,\ \Sigma\rangle$, где A — декартово произведение основных множеств A_i, а предикаты и функции на A задаются условиями:

1) $P_s(a_1, ..., a_{n_s})$ истинно тогда и только тогда, когда $P_s(a_1(i), ..., a_{n_s}(i))$ истинно для любого $i \in I$ ($a_1, ..., a_{n_s} \in A$, $P_s \in \Sigma$ — n_s-местный предикат);

2) $f_t(a_1, ..., a_{m_t})$ есть элемент $a \in A$ с координатами $a(i) = f_t(a_1(i), ..., a_{m_t}(i))$ для любого $i \in I$ ($a_1, ..., a_{m_t} \in A$, $f_t \in \Sigma$ — m_t-местная функция);

3) $c_k(i) = c_k$ для любого $i \in I$ ($c_k \in \Sigma$).

Пусть $\mathcal{F}$ — фильтр над $I \neq \emptyset$. Отношение

$$a \equiv_{\mathcal{F}} b \Leftrightarrow \{i \in I \mid a(i) = b(i)\} \in \mathcal{F} \ (a, b \in A)$$

есть отношение эквивалентности на основном множестве $A = \prod\limits_{i\in I} A_i$ Σ-системы $\mathcal{A} = \prod\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i$. Пусть $a/\mathcal{F} = \{b \in A \mid a \equiv_{\mathcal{F}} b\}$ — смежный класс по этой эквивалентности для любого элемента $a \in A$, и $A/\mathcal{F} = \{a/\mathcal{F} \mid a \in A\}$.

Фильтрованное по фильтру $\mathcal{F}$ произведение Σ-систем $\mathcal{A}_i$ ($i \in I$) — это Σ-система $\mathcal{A}/\mathcal{F} = \langle A/\mathcal{F},\ \Sigma\rangle$, в которой

1) $P_s(a_1/\mathcal{F}, ..., a_{n_s}/\mathcal{F})$ истинно, если и только если $\{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models P_s(a_1(i), ..., a_{n_s}(i))\} \in \mathcal{F}$ ($P_s^{(n_s)} \in \Sigma$);

2) $f_t(a_1/\mathcal{F}, ..., a_{m_t}/\mathcal{F}) = a/\mathcal{F}$, если и только если $\{i \in I \mid f_t(a_1(i), ..., a_{m_t}(i)) = a(i)\} \in \mathcal{F}$ ($f_t^{(m_t)} \in \Sigma$);

3) $c_k = c_k/\mathcal{F}$ ($c_k \in \Sigma$).

Σ-системы $\mathcal{A}_i$ ($i \in I$) называются *сомножителями* этого произведения.

Если $\mathcal{F}$ — ультрафильтр над I, то фильтрованное произведение $\mathcal{A}/\mathcal{F}$ называется *ультрапроизведением* Σ-систем $\mathcal{A}_i$ ($i \in I$).

Теорема 2.3 (Лось). [4] *Предложение φ сигнатуры Σ истинно в ультрапроизведении $\mathcal{A}/\mathcal{F}$ Σ-систем $\mathcal{A}_i$ ($i \in I$) тогда и только тогда, когда множество номеров сомножителей, в которых предложение φ истинно, принадлежит ультрафильтру $\mathcal{F}$.*

Замкнутость относительно ультрапроизведений вместе с замкнутостью относительно элементарной эквивалентности необходима и достаточна для аксиоматизируемости класса алгебраических систем.

Теорема 2.4 (Критерий аксиоматизируемости). [6] *Класс алгебраических систем аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он замкнут относительно элементарной эквивалентности и ультрапроизведений.*

3. Аксиоматизируемость наследственных классов графов

Определение графа на языке исчисления предикатов первого порядка с равенством выглядит следующим образом [5]. *Граф* — это алгебраическая система $G = \langle V, \Sigma\rangle$, носитель которой V — непустое множество вершин, а сигнатура $\Sigma = \langle E, =\rangle$ состоит из бинарного предиката смежности вершин и предиката равенства, причем предикат смежности $E(x, y)$ *иррефлексивен и симметричен*, т. е. удовлетворяет аксиоме:

$$\forall x \forall y\ [\neg E(x, x) \wedge (E(x, y) \to E(y, x))].$$

Таким образом, класс всех графов является конечно $\forall$-аксиоматизируемым.

Граф $H = \langle V_H, \Sigma\rangle$ называется *подграфом* графа $G = \langle V_G, \Sigma\rangle$, если $V_H \subseteq V_G$ и любая пара смежных вершин графа H смежна в графе G. Подграф H называется *порожденным подграфом* графа G, если любые две вершины $u, v \in V_H$ смежны в графе H тогда и только тогда, когда они смежны в графе G. Очевидно, что всякий порожденный подграф является подсистемой графа, и наоборот, любая подсистема графа является его порожденным подграфом. Поэтому класс графов, замкнутый относительно порожденных подграфов, является *наследственным классом* графов. Наследственный класс графов называется *монотонным* [7], если он замкнут относительно любых подграфов (не только порожденных).

Монотонные наследственные классы графов тесно связаны с запрещенными подграфами. Пусть $\boldsymbol{H}$ — некоторый класс графов. Тогда класс $Forb(\boldsymbol{H})$, состоящий из всех графов, не содержащих подграфов из $\boldsymbol{H}$, является абстрактным классом, т. е. замкнут относительно изоморфизма. Этот класс может быть определен заданием графов $H \in \boldsymbol{H}$ в качестве *запрещенных подграфов*. Будем говорить, что класс $\boldsymbol{K}$ графов *определим в терминах запрещенных подграфов*, если $\boldsymbol{K} = Forb(\boldsymbol{H})$ для некоторого класса $\boldsymbol{H}$.

Для указания связи между монотонными наследственными классами графов и запрещенными подграфами нам потребуется следующий критерий наследственности. Аналогичное утверждение для классов графов, определенных в терминах запрещенных миноров, можно найти в книге [3].

Теорема 3.1. *Абстрактный класс графов $\boldsymbol{K}$ является монотонным наследственным тогда и только тогда, когда он может быть определен в терминах запрещенных подграфов.*

Доказательство. **Необходимость.** Пусть $\boldsymbol{K}$ — монотонный наследственный класс графов, $\boldsymbol{H}$ — дополнение к классу $\boldsymbol{K}$ в классе всех графов. Тогда $\boldsymbol{K} = Forb(\boldsymbol{H})$.

Достаточность очевидна. □

Для бесконечных графов верна следующая теорема, которая легко доказывается от противного.

Теорема 3.2. *Пусть $\boldsymbol{K} = Forb(\boldsymbol{H})$, причем все графы множества $\boldsymbol{H}$ конечны, G — бесконечный граф, каждый конечный подграф которого принадлежит классу $\boldsymbol{K}$. Тогда G также принадлежит классу $\boldsymbol{K}$.*

С использованием теорем 3.1 и 3.2 можно получить критерии аксиоматизируемости и универсальной аксиоматизируемости произвольного монотонного наследственного класса графов.

Теорема 3.3 (Критерий (универсальной) аксиоматизируемости монотонного наследственного класса графов)**.** *Монотонный наследственный класс графов (универсально) аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он может быть определен в терминах конечных запрещенных подграфов.*

Доказательство. **Необходимость.** Поскольку всякий монотонный наследственный класс графов замнут относительно подсистем, то в силу теоремы 2.2 любой аксиоматизируемый монотонный наследственный класс графов является $\forall$-аксиоматизируемым, поэтому любая его аксиома может считаться $\forall$-предложением. Тогда множество его запрещенных подграфов, которое существует по теореме 3.1, можно задать следующим образом.

Для каждой аксиомы φ ее отрицание $\neg\varphi$ эквивалентно формуле $\exists x_1 ... \exists x_n \psi$, где ψ — бескванторная формула. Очевидно, что можно определить конечное множество $\boldsymbol{H}_\varphi$ всех графов с числом вершин от 1 до n, на которых предложение $\neg\varphi$ истинно. Тогда, объединив множества $\boldsymbol{H}_\varphi$ для всех аксиом, получим семейство $\boldsymbol{H}$ конечных запрещенных подграфов для данного класса.

Достаточность. Любому конечному графу можно поставить в соответствие условие существования подграфа, изоморфного этому графу. Оно имеет вид

$$\exists x_1 \; ... \; \exists x_n \, \psi, \tag{1}$$

где n — число вершин этого графа, а ψ — конъюнкт, который содержит условия попарного различия всех переменных и не содержит множителей вида $\neg E(x_i, x_j)$ и повторяющихся множителей.

Тогда в силу теоремы 3.2 аксиоматика монотонного наследственного класса графов содержит аксиому теории графов и некоторое (возможно бесконечное) множество аксиом, каждая из которых соответствует одному из запрещенных подграфов, т. е. является отрицанием соответствующего предложения (1). Все эти аксиомы — универсальные предложения. □

Следствие 3.1. *Класс конечных графов неаксиоматизируем.*

Действительно, множество запрещенных подграфов для класса конечных графов не содержит ни одного конечного подграфа, поэтому в силу теоремы 3.3 класс конечных графов неаксиоматизируем. Заметим также, что следствие 3.1 может быть выведено из теоремы компактности.

В качестве примера $\forall$-аксиоматизируемого монотонного наследственного класса графов рассмотрим класс планарных графов. Конечный граф называется *планарным*, если его можно так уложить на плоскости, что его ребра не будут пересекаться вне вершин. Бесконечный граф называется *планарным*, если любой его конечный подграф планарен. Простейшими непланарными графами являются полный пятивершинный граф K_5 и полный двудольный граф $K_{3,3}$.

Теорема 3.4 (Понтрягин–Куратовский). [3] *Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных* K_5 *или* $K_{3,3}$.

Применяя этот критерий, можно аксиоматизировать класс планарных графов на языке исчисления предикатов первого порядка с равенством. Для этого введем некоторые дополнительные обозначения:

$$P_0(x,y) = E(x,y);$$
$$P_1(x,y,z_1) = E(x,z_1) \wedge E(z_1,y);$$
$$P_2(x,y,z_1,z_2) = E(x,z_1) \wedge E(z_1,z_2) \wedge E(z_2,y);$$

и т. д.

С помощью этих обозначений сформулируем предложения $\varphi_{k_1\ldots k_{10}}$, означающие существование подграфа, гомеоморфного K_5 (переменные $x_1,\ldots,x_5$ соответствуют вершинам графа K_5):

$$\exists x_1\exists x_2\exists x_3\exists x_4\exists x_5\ \exists z_{1,1}\ldots\exists z_{1,k_1}\ \ldots\ \exists z_{10,1}\ldots\exists z_{10,k_{10}}\ [\bigwedge_{i\neq j}(x_i\neq x_j)\wedge$$
$$\bigwedge_{\substack{p=1,\ldots,10\\ q=1,\ldots,k_p}}(x_i\neq z_{p,q})\wedge\bigwedge_{p\neq s\,\vee\,q\neq t}(z_{p,q}\neq z_{s,t})\wedge P_{k_1}(x_1,x_2,z_{1,1},\ldots,z_{1,k_1})\wedge$$
$$\wedge P_{k_2}(x_1,x_3,z_{2,1},\ldots,z_{2,k_2})\wedge\ldots\wedge P_{k_{10}}(x_4,x_5,z_{10,1},\ldots,z_{10,k_{10}})],$$

где $k_1,\ldots,k_{10}\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Аналогично записываются предложения $\psi_{k_1\ldots k_9}$, означающие существование подграфа, гомеоморфного $K_{3,3}$ (переменные x_1,x_3,x_5 соответствуют вершинам одной доли, x_2,x_4,x_6 — вершинам другой доли графа $K_{3,3}$):

$$\exists x_1\exists x_2\exists x_3\exists x_4\exists x_5\exists x_6\ \exists z_{1,1}\ldots\exists z_{1,k_1}\ \ldots\ \exists z_{9,1}\ldots\exists z_{9,k_9}\ [\bigwedge_{i\neq j}(x_i\neq x_j)$$
$$\wedge\bigwedge_{\substack{p=1,\ldots,9\\ q=1,\ldots,k_p}}(x_i\neq z_{p,q})\wedge\bigwedge_{p\neq s\,\vee\,q\neq t}(z_{p,q}\neq z_{s,t})$$
$$\wedge P_{k_1}(x_1,x_2,z_{1,1},\ldots,z_{1,k_1})\wedge P_{k_2}(x_1,x_4,z_{2,1},\ldots,z_{2,k_2})\wedge\ldots\wedge$$
$$\wedge P_{k_9}(x_5,x_6,z_{9,1},\ldots,z_{9,k_9})],$$

где $k_1,\ldots,k_9\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Таким образом, аксиоматика класса планарных графов содержит аксиому теории графов и счетное множество аксиом $\neg\varphi_{k_1\ldots k_{10}}$ и $\neg\psi_{k_1\ldots k_9}$

Далее рассмотрим вопрос конечной аксиоматизируемости монотонных наследственных классов графов. Связь аксиоматизируемости с ультрапроизведениями, изложенная в теореме 2.4, вместе с теоремой 2.1 предоставляет схему доказательства невозможности конечной аксиоматизации многих классов графов. Наряду с классом $\boldsymbol{K}$ рассматривается его дополнение $\overline{\boldsymbol{K}}$ в классе всех Σ-систем, затем доказывается незамкнутость этого дополнения относительно ультрапроизведений, а отсюда следует невозможность конечной аксиоматизации.

Лемма 3.1. *Пусть $\boldsymbol{K}$ — монотонный наследственный класс графов, для которого минимальное множество запрещенных конечных подграфов счетно бесконечно. Тогда дополнение к классу $\boldsymbol{K}$ незамкнуто относительно ультрапроизведений.*

Доказательство. По условию леммы $\boldsymbol{K} = Forb(\boldsymbol{H})$, где $\boldsymbol{H}$ — счетно бесконечное множество конечных графов G_i, $i \in \mathbb{N}$, причем $G_i \not\subseteq G_j$ для всех $i \neq j$.

Рассмотрим фильтр Фреше над множеством $\mathbb{N}$, состоящий из всех подмножеств $\mathbb{N}$, дополнения которых конечны. Из леммы 2.1 следует, что существует ультрафильтр $\mathcal{F}$ над $\mathbb{N}$, содержащий этот фильтр Фреше. В силу леммы 2.2 этот ультрафильтр не содержит ни одного конечного множества.

Все $G_i \in \overline{\boldsymbol{K}}$. Покажем, что их ультрапроизведение $G/\mathcal{F} = \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} G_i/\mathcal{F}$ принадлежит $\boldsymbol{K}$.

Очевидно, что для всякого G_i существует предложение $\varphi_i = \exists x_1 ... \exists x_n \psi_i$, означающее существование конечного подграфа, изоморфного G_i (ψ_i — бескванторная формула). Причем предложение φ_i ложно во всех G_j ($j \neq i$). По теореме 2.3 все φ_i будут ложны в ультрапроизведении $G/\mathcal{F}$, т. е. оно не содержит ни одного из подграфов G_i.

Аналогично, в силу теоремы 2.3 $G/\mathcal{F}$ не будет содержать петель и ориентированных ребер. Поэтому $G/\mathcal{F} \in \boldsymbol{K}$. □

В заключение этого параграфа докажем критерий конечной аксиоматизируемости монотонного наследственного класса графов.

Теорема 3.5 (Критерий конечной аксиоматизируемости монотонного наследственного класса графов). *Монотонный наследственный класс графов конечно аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он может быть определен в терминах конечного множества конечных запрещенных подграфов.*

Доказательство. **Необходимость.** По теореме 3.3 всякий аксиоматизируемый наследственный класс графов может быть определен в терминах конечных запрещенных подграфов. При этом в силу леммы 3.1 если этот класс не может быть определен в терминах конечного множества конечных запрещенных подграфов, то он не является конечно аксиоматизируемым, что противоречит условию теоремы.

Достаточность. Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.3. □

Следствие 3.2. *Класс планарных графов не является конечно аксиоматизируемым.*

4. Аксиоматизируемость классов матроидов

Пусть $M = (U, \mathcal{I})$ — матроид. Обозначим через $\mathcal{I}_A$ семейство независимых подмножеств множества $A \subseteq U$. Тогда $M' = (A, \mathcal{I}_A)$ является матроидом и называется *подматроидом* исходного матроида M. Очевидно, что любой подматроид произвольного матроида M является его подсистемой, причем верно также и обратное утверждение. Таким образом, любой класс матроидов, замкнутый относительно подматроидов, является наследственным.

Теорема 4.1. 1) *Класс матроидов ранга, не большего k, является конечно $\forall$-аксиоматизируемым.*

2) *Класс матроидов фиксированного ранга k конечно аксиоматизируем, но не является $\forall$-аксиоматизируемым.*

Доказательство. **1)** Приведем определение класса матроидов ранга, не большего k, в терминах независимых множеств. *Матроид M ранга, не большего k,* — это алгебраическая система $M = \langle U, \Sigma_I \rangle$, где U — непустое множество, а сигнатура $\Sigma_I = \langle I_0, I_1, ..., I_k, = \rangle$ состоит из $k+1$ предикатов независимости, местность каждого из которых совпадает с его порядковым номером, и предиката равенства, причем предикаты независимости удовлетворяют условиям неупорядоченности и неповторения элементов, наследственности и пополнения:

• $\forall x_1 \ ... \ \forall x_n \ [I_n(x_1, ..., x_n) \to \bigwedge\limits_{\pi} I_n(\pi(x_1), ..., \pi(x_n))]$, где π пробегает по всем перестановкам элементов $x_1, ..., x_n$, $\ n \in \{1, ..., k\}$;

• $\forall x_1 \ ... \ \forall x_n \ [I_n(x_1, ..., x_n) \to \bigwedge\limits_{i \neq j} (x_i \neq x_j)]$, $\ n \in \{1, ..., k\}$;

• $\forall x_1 \ ... \ \forall x_n \ [(I_n(x_1, ..., x_n) \to I_{n-1}(x_2, ..., x_n) \wedge I_{n-1}(x_1, x_3, ..., x_n) \wedge \ ... \ \wedge I_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1})) \ \wedge \ I_0]$, $\ n \in \{2, ..., k\}$;

• $\forall x_1 \ ... \ \forall x_n \quad \forall y_1 \ ... \ \forall y_{n+1} \quad [\ I_n(x_1, ..., x_n) \quad \wedge \quad I_{n+1}(y_1, ..., y_{n+1}) \quad \to \bigvee\limits_{i \in \{1, ..., n+1\}} I_{n+1}(x_1, ..., x_n, y_i)]$, $\ n \in \{1, ..., k-1\}$.

2) Чтобы определить *матроид фиксированного ранга k*, в приведенное выше определение нужно добавить еще одну аксиому:

• $\exists x_1 \ ... \ \exists x_k \ I_k(x_1, ..., x_k)$.

На языке исчисления предикатов первого порядка с равенством можно записать и аксиомы баз матроида. В этом случае определение матроида фиксированного ранга выглядит так. *Матроид M фиксированного ранга k* — это алгебраическая система $M = \langle U, \Sigma_B \rangle$, где U — непустое множество, а сигнатура $\Sigma_B = \langle B, = \rangle$ состоит из k-местного предиката баз матроида и предиката равенства, причем предикат баз удовлетворяет условиям:

• $\forall x_1 \ ... \ \forall x_k \ [B(x_1, ..., x_k) \to \bigwedge\limits_{\pi} B(\pi(x_1), ..., \pi(x_k))]$, где π пробегает по всем перестановкам элементов $x_1, ..., x_k$;

• $\forall x_1 \ ... \ \forall x_k \ [B(x_1, ..., x_k) \to \bigwedge\limits_{i \neq j} (x_i \neq x_j)]$;

• $\forall x_1 \ ... \ \forall x_k \ \forall y_1 \ ... \ \forall y_k \ [B(x_1, ..., x_k) \wedge B(y_1, ..., y_k) \to \bigwedge\limits_{i \in \{1, ..., k\}} (B(x_i, y_2, ..., y_k) \vee B(y_1, x_i, y_3, ..., y_k) \vee \ ... \ \vee B(y_1, ..., y_{k-1}, x_i))]$;

• $\exists x_1 \ ... \ \exists x_k \ B(x_1, ..., x_k)$.

Очевидно, что класс матроидов фиксированного ранга не является замкнутым относительно подсистем. Из теоремы 2.2 следует, что класс матроидов фиксированного ранга не является $\forall$-аксиоматизируемым. $\square$

В качестве еще одного примера $\forall$-аксиоматизируемого наследственного класса матроидов рассмотрим класс матроидов разбиения ранга, не большего k.

Пусть $P = \{U_1, U_2, ..., U_k\}$ — разбиение множества U, т. е. $\bigcup\limits_{i=1}^{k} U_i = U$ и $U_i \cap U_j = \emptyset$ для любых $i \neq j$. Множество $I \subseteq U$ содержится в $\mathcal{I}_P$ тогда и только тогда, когда $|I \cap U_i| \leq 1$ для всех $i \in \{1, ..., k\}$. Тогда пара $M = (U, \mathcal{I}_P)$ является матроидом, который называется *матроидом разбиения* множества U, а $\mathcal{I}_P$ — семейство его независимых множеств.

Данный класс интересен своей тесной связью с классом M-графов. Граф называется *M-графом*, если каждая его компонента связности является полным графом. Множество вершин U такого графа является множеством элементов матроида разбиения, а вершины, составляющие i-ю компоненту связности, соответствуют множеству U_i в разбиении P множества U. Поэтому класс матроидов разбиения аксиоматизируем следующим образом.

Матроид разбиения ранга, не большего k — это алгебраическая система $\langle U, \Sigma \rangle$, носитель которой U — непустое множество, а сигнатура $\Sigma = \langle E, = \rangle$ состоит из бинарного предиката смежности и предиката равенства, причем выполнены условия иррефлексивности и симметричности, транзитивности и ограничения по рангу:

(M1) $\forall x \forall y\ [\neg E(x,x) \wedge (E(x,y) \rightarrow E(y,x))]$;

(M2) $\forall x \forall y \forall z\ [E(x,y) \wedge E(y,z) \rightarrow E(x,z)]$;

(M3) $\forall x_1\ ...\ \forall x_k\ \forall y\ [\bigwedge\limits_{i \neq j} (\neg E(x_i, x_j) \wedge (x_i \neq x_j)) \wedge \bigwedge\limits_{i \in \{1,...,k\}} (x_i \neq y) \rightarrow \bigvee\limits_{j \in \{1,...,k\}} E(x_j, y)]$.

Заметим, что аксиомы (M1) и (M2) составляют аксиоматику класса M-графов. Из теоремы 2.2 легко сделать вывод о замкнутости этого класса относительно подсистем. Таким образом, класс матроидов разбиения ранга, не большего k, является наследственным.

Для класса матроидов конечного ранга выполнено следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Класс матроидов конечного ранга незамкнут относительно ультрапроизведений.*

Доказательство. Рассмотрим фильтр Фреше над множеством $\mathbb{N}$, состоящий из всех подмножеств $\mathbb{N}$, дополнения которых конечны. Из леммы 2.1 следует, что существует ультрафильтр $\mathcal{F}$ над $\mathbb{N}$, содержащий этот фильтр Фреше. В силу леммы 2.2 этот ультрафильтр не содержит ни одного конечного множества.

Рассмотрим счетно бесконечное множество матроидов конечного ранга M_i, $i \in \mathbb{N}$, причем ранг каждого M_i совпадает с номером i. Покажем, что их ультрапроизведение $M/\mathcal{F} = \prod\limits_{i \in \mathbb{N}} M_i/\mathcal{F}$ не является матроидом конечного ранга.

Очевидно, что для всякого M_i истинно предложение

$$\varphi_i = \exists x_1\ ...\ \exists x_i\ I_i(x_1, ..., x_i),$$

означающее существование независимого множества мощности i, причем предложение φ_i будет также истинным во всех M_j, где $j > i$. Т. е. для сколь угодно большого i существует счетно бесконечное множество матроидов M_j, в которых предложение φ_i истинно. Тогда по теореме 2.3 все φ_i будут истинны в ультрапроизведении $M/\mathcal{F}$, т. е. оно не является матроидом конечного ранга, поскольку содержит независимые множества сколь угодно большой конечной мощности. □

В силу леммы 4.1 и теоремы 2.4 справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2. *Класс матроидов конечного ранга не является аксиоматизируемым.*

Заметим также, что теорема 4.2 является непосредственным следствием теоремы компактности.

Автор выражает благодарность анонимному рецензенту за полезные замечания.

References

[1] M. Aigner, *Combinatorial Theory*, Mir, Moscow, 1982 (in Russian).

[2] X. Caicedo, *Finitely axiomatizable quasivarieties of graphs*, Algebra Universalis, **34**:2 (1995), 314–321. Zbl 0837.08007

[3] R. Diestel, *Graph theory*, Izdatelstvo Instituta matematiki, Novosibirsk, 2002 (in Russian).

[4] Yu. L. Ershov, *Problems of decidability and constructive models*, Nauka, Moscow, 1980 (in Russian). Zbl 0495.03009

[5] Yu. L. Ershov, I. A. Lavrov, A. D. Taimanov, M. A. Taitslin, *Elementary theories*, Uspekhi Mat. Nauk, **20**:4(124) (1965), 37–108 (in Russian). Zbl 0199.03001

[6] Yu. L. Ershov, E. A. Palyutin, *Mathematical Logic*, Nauka, Moscow, 1987 (in Russian). Zbl 0632.03001

[7] D. S. Malyshev, *Classes of graphs critical for the edge list-ranking problem*, Diskretnyi Analiz i Issledovanie Operatsii, **20**:6 (2013), 59–76 (in Russian). Engl. transl.: Journal of Applied and Industrial Mathematics, **57** (2014), 245–255. Zbl 1324.05163

[8] H. Whitney, *On the abstract properties of linear dependence*, American Journal of Mathematics, **57** (1935), 509–533. Zbl 0012.00404

Artyom Victorovich Iliev
Sobolev Institute of Mathematics,
Pevtsova str., 13,
644043, Omsk, Russia
E-mail address: `artyom_iljev@mail.ru`