S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 1383–1400 (2016) УДК 512.7
DOI 10.17377/semi.2016.13.107 MSC 20F28, 20F36, 20E36

ВНУТРЕННИЕ АВТОМОРФИЗМЫ И НЕКОТОРЫЕ ИХ ОБОБЩЕНИЯ

М.В. НЕЩАДИМ

Abstract. In the first part of this paper we provides an overview of some of the results for normal, quasi-inner, polynomial, power automorphisms of groups. Each of these automorphisms generalizes the notion of an inner automorphism in certain direction. The second part of the work associated with the classical braid group. Here are the results on the structure of the normal automorphism groups of braid groups and pure braid groups. Also we give the assertion that the center of the pure braid groups is a direct factor, and give the new system generators of braid groups.

Keywords: normal, quasi-inner automorphisms, braid groups.

Введение

Работа состоит из двух частей. В первой части дается обзор результатов по нормальным, квазивнутренним, полиномиальным, степенным автоморфизмам групп. Каждый из этих видов автоморфизмов обобщает понятие внутреннего автоморфизма в определенном направлении. Вторая часть работы связана с классической группой кос. Здесь приводятся результаты о строении нормальных автоморфизмов групп кос и групп крашеных кос. Кроме того, доказано утверждение о том, что центр группы крашеных кос выделяется прямым множителем и приведена новая система порождающих для групп кос. Результаты этой части были получены в препринте [33]. Отметим, что утверждение о том, что центр группы крашеных кос выделяется прямым множителем передоказывалось многими авторами. Например, это утверждение можно найти в книге

Neshchadim, M.V. Inner automorphisms and some their generalizations.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 16-41-02006).

Поступила 17 ноября 2016 г., опубликована 30 декабря 2016 г.

B. Farb, D. Margalit ([81], стр. 252). За последние два десятилетия появились различные обобщения классических кос: виртульные косы, косы со спайками, неограниченные виртульные косы, Гауссовы косы и т.д. Эта область тесно связана с топологией, теорией узлов и интенсивно развивается. Естественно, что такие классические вопросы как строение группы автоморфизмов и выделение естественных классов автоморфизмов представляют интерес как для новых классов групп кос так и для классических групп кос поверхностей.

§1. Нормальные, квазивнутренние, полиномиальные, степенные автоморфизмы групп

Автоморфизм произвольной группы называется *нормальным*, если он оставляет на месте все ее нормальные подгруппы. Множество $\mathrm{Aut}_n G$ всех нормальных автоморфизмов группы G является нормальной подгруппой группы $\mathrm{Aut}\, G$ всех ее автоморфизмов и содержит подгруппу $\mathrm{Inn}\, G$ всех внутренних автоморфизмов.

Вопрос о совпадении группы нормальных автоморфизмов и группы внутренних автоморфизмов является частным случаем следующего общего вопроса.

Пусть A — подгруппа группы всех автоморфизмов $\mathrm{Aut}\, G$ некоторой группы G. Определим множество $\mathcal{H}(A)$ подгрупп из G, которые выдерживают все автоморфизмы из A:

$$\mathcal{H}(A) = \{\, H \leq G \,|\, H^{\varphi} = H \text{ для любого } \varphi \in A \} \,.$$

По множеству подгрупп $\mathcal{H}(A)$ определим множество $\overline{A}$ всех автоморфизмов из $\mathrm{Aut}\, G$, которые оставляют все подгруппы из $\mathcal{H}(A)$ на месте:

$$\overline{A} = \{\, \varphi \in \mathrm{Aut}\, G \,|\, H^{\varphi} = H \text{ для любой } \quad H \in \mathcal{H}(A) \} \,.$$

Ясно, что $\overline{A}$ — подгруппа из $\mathrm{Aut}\, G$, $A \leq \overline{A}$. Для каких групп G и $A \leq \mathrm{Aut}\, G$ имеет место равенство $A = \overline{A}$? Если равенства нет, то насколько отличаются A и $\overline{A}$?

Например, если подгруппа A состоит только из тождественного автоморфизма, то $\overline{A}$ — группа степенных автоморфизмов группы G, то есть тех автоморфизмов, которые оставляют любую (циклическую) подгруппу группы G на месте. В работе Cooper C.D.H. [8] доказано, что группа степенных автоморфизмов произвольной группы G автоморфно допустимая, периодическая и содержится в группе $\mathrm{Aut}_c G$ центральных автоморфизмов группы G, то есть автоморфизмов, действующих тождественно по модулю центра $Z(G)$ группы G. В работе Нещадима М.В. [35] доказывается, что если G — нильпотентная группа без кручения либо ступени нильпотентности 2 и конечно порождена либо ступени нильпотентности 3 с произвольным числом порождающих, то центральные автоморфизмы определяются своими неподвижными подгруппами, то есть $\overline{\mathrm{Aut}_c G} = \mathrm{Aut}_c G$.

Если в качестве подгруппы $A \leq \mathrm{Aut}\, G$ взять группу внутренних автоморфизмов, то $\overline{A}$ в точности группа нормальных автоморфизмов.

Естественным обобщением определения нормального автоморфизма является определение субнормального автоморфизма. Автоморфизм группы G называется субнормальным, если он оставляет на месте все субнормальные подгруппы группы G. Такие автоморфизмы образуют группу $\mathrm{Aut}_{sn}(G)$.

Другим обобщением внутреннего автоморфизма является понятие квазивнутреннего (поточечно внутреннего) автоморфизма. И связано это обобщение с тем что на каждом элементе группы внутренний автоморфизм действует сопряжением. Если считать, что сопрягающий элемент зависит от того к какому элементу применяется автоморфизм, то получим определение квазивнутреннего автоморфизма. Более точно, автоморфизм φ группы G называется *квазивнутренним*, если для любого элемента g группы G найдется такой элемент $w \in G$, что $g^\varphi = w^{-1}gw$, то есть на каждом элементе g группы G автоморфизм φ действует сопряжением, но сопрягающий элемент $w \in G$, вообще говоря, зависит от g, $w = w(g)$. Если w не зависит от g, то автоморфизм φ внутренний. Квазивнутренние автоморфизмы образуют подгруппу $\mathrm{Aut}_{cn}\, G$ в группе $\mathrm{Aut}\, G$ всех автоморфизмов. Кроме того, $\mathrm{Aut}_{cn}\, G$ содержится в группе $\mathrm{Aut}_n\, G$.

Естественным обобщением квазивнутренних автоморфизмов являются полиномиальные автоморфизмы [15]. Автоморфизм φ группы G называется *полиномиальным*, если для любого элемента g группы G найдутся такие элементы $w_1, w_2, ..., w_n \in G$, что

$$g^\varphi = w_1^{-1}gw_1w_2^{-1}gw_2...w_n^{-1}gw_n,$$

n зависит, вообще говоря, от φ. Множество всех полиномиальных автоморфизмов группы G обозначим через $\mathrm{Aut}_p\, G$. Итак, определен ряд подгрупп из группы $\mathrm{Aut}\, G$:

$$\mathrm{Inn}\, G \leq \mathrm{Aut}_{cn}\, G \leq \mathrm{Aut}_p\, G \leq \mathrm{Aut}_n\, G \leq \mathrm{Aut}_{sn}\, G \leq \mathrm{Aut}\, G.$$

Далее приводится обзор результатов по нормальным, субнормальным, квазивнутренним, степенным, полиномиальным автоморфизмам.

Lubotzky A. [20] и Lu A.S.-T. [21] показали, любой нормальный автоморфизм свободной неабелевой группы является внутренним. Естественно предположить, что для группы, близкой к свободной, группа нормальных автоморфизмов тоже близка к группе внутренних автоморфизмов или даже совпадает с ней. Например, легко сообразить, что нормальные автоморфизмы прямого произведения свободных неабелевых групп совпадают с внутренними.

Neukirch J. [9] доказал, что все автоморфизмы абсолютной группы Галуа $G(\mathbb{Q})$ являются нормальными. Опираясь на эту работу Икеда, Ухида, Коматсу, Ивасава (см. ссылки в [18]) доказали, что все нормальные автоморфизмы группы $G(\mathbb{Q})$ внутренние.

Отметим следующий результат для проконечных групп, установленный Jarden M. и Ritter J. [18]. Пусть K — класс конечных групп, замкнутый относительно взятия подгрупп, гомоморфных образов и расширений, G — про-K-группа, заданная n порождающими и k определяющими соотношениями (в классе про-K-групп), где $n - k \geq 2$. Тогда $\mathrm{Aut}_n\, G = \mathrm{Inn}\, G$. Отсюда, в частности, следует указанное равенство для свободных проконечных групп [19], свободных проразрешимых групп и свободных про-p-групп, где p — произвольное простое число.

Романьков В.А. [25] показал, что $\mathrm{Aut}_n\, G = \mathrm{Inn}\, G$ для свободной разрешимой неабелевой группы G, и для групп вида F/R', где F/R либо нильпотентная группа без кручения, либо полициклическая группа без кручения такая, что $R \leq F'$ и все единицы группового кольца $\mathbb{Z}\,[F/R]$ имеют вид $\pm g$, где $g \in F/R$.

Нормальные автоморфизмы свободных 2-ступенно разрешимых про-p-групп исследовали Романовский Н.С. и Болуць В.Ю. [34]. Они дали описание группы $\mathrm{Aut}_n\, G$ и установили, что она строго больше $\mathrm{Inn}\, G$.

Отметим также, что по существу, во всех перечисленных работах, за исключением [21, 25], изучались автоморфизмы, оставляющие на месте нормальные подгруппы конечного индекса.

Нещадим М.В. [38] установил, что всякий нормальный автоморфизм произвольного нетривиального свободного произведения групп является внутренним. Кроме того, в этой работе был построен пример свободного произведения с объединением $G = \langle x, y \,\|\, x^2 = y^2 \rangle$, которое имеет нормальные, но не внутренние автоморфизмы. Как правило, основные свойства свободного произведения с объединением начинают проявляться, когда объединяемая подгруппа имеет индекс не меньший трех в одном из множителей. Поэтому, возможно этот пример имеет исключительный характер.

Вопрос 1. Пусть $G = A \underset{C}{*} B$ — нетривиальное свободное произведение с объединением, причем подгруппа C является собственной в каждом множителе и имеет индекс не меньший трех в одном из множителей. Справедливо ли равенство $\operatorname{Aut}_n G = \operatorname{Inn} G$?

Люлько А.Н. [24] исследовал нормальные автоморфизмы свободных нильпотентных групп. Он доказал, что для свободной нильпотентной группы ступени нильпотентности 2 любой нормальный автоморфизм является внутренним, но, с другой стороны, свободная нильпотентная группа ступени нильпотентности 3 допускает нормальный, но не внутренний автоморфизм.

Так как у свободной нильпотентной группы ступени нильпотентности ≥ 3 существуют нормальные, но не внутренние автоморфизмы, то естественно при изучении нормальных автоморфизмов свободных нильпотентных групп накладывать на них некоторые ограничения. Известно (см. [17], с. 137), что любой автоморфизм свободной нильпотентной группы ступени нильпотентности 2 является ручным, то есть индуцируется автоморфизмом свободной группы при естественном гомоморфизме.

Нещадим М.В. [29] установил, что всякий ручной нормальный автоморфизм группы $F_n/\gamma_4 F_n$ при $n \geq 2$ является внутренним. Кроме получено полное описание группы нормальных автоморфизмов свободной нильпотентной группы ступени нильпотентности 4 с произвольным числом порождающих в терминах порождающих и соотношений.

Квазивнутренние автоморфизмы свободных нильпотентных групп полностью описаны в работе Endimioni G. [49]. А именно, в работе доказаны следующие утверждения.

Теорема А. Пусть G — свободная нильпотентная группа, ступени нильпотентности c, со свободным порождающим множеством S, $|S| \geq 2$. Пусть θ — автоморфизм группы G такой, что для любых двух элементов $x, y \in S$ и для любого целого k элементы $(xy^k)^\theta$ и xy^k сопряжены. Тогда θ — внутренний автоморфизм.

Следствие. Группа квазивнутренних автоморфизмов свободной нильпотентной группы, ступени нильпотентности c, со свободным порождающим множеством S, $|S| \geq 2$ совпадает с группой внутренних автоморфизмов.

Теорема В. Пусть G — свободная нильпотентная группа, ступени нильпотентности c, со свободным порождающим множеством S, $|S| \geq 2$. Тогда

1) если $c = 1$, то $\operatorname{Aut}_n G/\operatorname{Inn} G$ имеет порядок 2;

2) если $c = 2$, то $\mathrm{Aut}_n\, G = \mathrm{Inn}\, G$;
3) если $c \geq 3$, то $\mathrm{Aut}_n\, G/\mathrm{Inn}\, G$ бесконечная.

Также приведен пример прямого произведения копии нильпотентной группы на себя с квазивнутренним, но не внутренним автоморфизмом. Отметим, что утверждение теоремы B содержится в работе [24]. Ключевым моментом в доказательстве является утверждение о том, что если в свободной нильпотентной группе некоторый элемент перестановочен со свободным порождающим, то он по модулю центра является степенью этого порождающего (см. [10], стр. 352).

В работе Endimioni G. [61] полностью описаны нормальные автоморфизмы свободных метабелевых нильпотентных групп. Дальнейшие результаты по нормальным, полиномиальным автоморфизмам групп Endimioni G. можно найти в работах [62, 66].

Отметим, что полного описания нормальных автоморфизмов свободных нильпотентных групп нет. Основные проблемы начинаются со ступени нильпотентности 5, когда присутствуют коммутаторы веса 4. Сформулируем несколько вопросов для свободной нильпотентной группы. Пусть $N_{n,c} = F_n/\gamma_{c+1}F_n$.

Вопрос 2. Описать нормальные автоморфизмы свободной нильпотентной группы. Дать описание факторгруппы $\mathrm{Aut}_n\, N_{n,c}/\mathrm{Inn}\, N_{n,c}$.

Вопрос 3. Описать множество соотношений для известных нормальных автоморфизмов свободной нильпотентной группы $N_{n,c}$ вида

$$g \mapsto g[a_1, ..., a_k, g, a_{k+1}, ..., a_{c-1}],$$

где элементы a_i фиксированы. Подгруппа порожденная автоморфизмами такого вида является свободной абелевой. Какие из автоморфизмов указанного вида составляют свободную базу?

Вопрос 4. Будет ли группа нормальных автоморфизмов свободной нильпотентной группы $N_{n,c}$ порождаться внутренними автоморфизмами и автоморфизмами из вопроса 3?

Вопрос 5. Найти ступень нильпотентности $\mathrm{Aut}_n\, N_{n,c}$.

Вопрос 6. Найти $\mathrm{Aut}_n(\mathrm{Aut}_n\, N_{n,c})$, $\mathrm{Aut}_{n,k+1}\, N_{n,c} = \mathrm{Aut}_n(\mathrm{Aut}_{n,k}\, N_{n,c})$. На каком шаге стабилизируется эта последовательность, если вообще стабилизируется.

Вопрос 7. Естественным обобщением свободной нильпотентной группы является нильпотентное произведение свободных абелевых групп. Дать описание нормальных, квазивнутренних, полиномиальных автоморфизмов нильпотентного произведения свободных абелевых групп. Аналогичный вопрос для метабелева нильпотентного произведения свободных абелевых групп.

В работе Тимошенко Е.И. [84] исследовались нормальные автоморфизмы разрешимого произведения абелевых групп. Пусть группа G является разрешимым класса $n \geq 2$ произведением нетривиальных свободных абелевых групп. Доказано, что подгруппа всех автоморфизмов группы G, тождественных на последнем неединичном коммутанте $G(n)$, совпадает с подгруппой всех внутренних автоморфизмов, соответствующих элементам из $G(n)$. Также доказано, что подгруппа всех нормальных автоморфизмов группы G совпадает с подгруппой всех внутренних автоморфизмов.

Группы верхних треугольных матриц над кольцами, полями близки по свойствам к свободным нильпотентным группам. Поэтому для них естественной рассмотреть все поставленные вопросы. В связи с эти отметим работу трех авторов Бардаков В.Г., Веснин А.Ю., Yadav M.K. [78] для унитреугольных групп, в которой описаны квазивнутренние автоморфизмы.

Матричные группы над кольцами с большим запасом идеалов богаты нормальными подгруппами и естественно ожидать, что группы нормальных и внутренних автоморфизмов таких групп мало отличаются или даже совпадают.

Вопрос 8. Описать группу нормальных автоморфизмов группы

$$GL_n(K[x_1, ..., x_m, y_1^{\pm 1}, ..., y_s^{\pm 1}]),$$

где K — некоторое кольцо, $x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_s$ — переменные, $n \geq 2$. В частности, было бы интересно описать группы нормальных автоморфизмов групп $GL_n(K[x_1, ..., x_m])$, $GL_2(K[x_1, x_2])$ для случая когда K — поле или кольцо целых чисел.

Обзор результатов и литературу по квазивнутренним автоморфизмам конечных p-групп можно найти в работах Yadav M.K. [63–65, 76, 79, 83, 84].

Вопрос 9. Найти описание групп субнормальных автоморфизмов $\mathrm{Aut}_{sn}\, G$ для свободных нильпотентных групп, свободных метабелевых-нильпотентных групп, свободных разрешимых-нильпотентных групп.

В работе Bogopolski O., Kudryavtseva T., Zieschang H. [54] доказано, что для групп поверхностей, за исключением тора и бутылки Клейна, нормальные автоморфизмы совпадают с внутренними.

В работе Tieudjo D. Moldavanskii D. I. [59] изучались автоморфизмы групп вида

$$G_{mn} = \text{гр}(a, b \,||\, [a^m, b^n] = 1),$$

где m и n произвольные целые числа с условием $m > 1$ и $n > 1$. Получено полное описание группы автоморфизов таких групп в терминах порождающих и соотношений. В частности доказано, что нормальные автоморфизмы являются внутренними.

Вопрос 10. Исследовать нормальные, квазивнутренние автоморфизмы групп с одним соотношением. Отметим, что если соотношение R не содержит всех элементов порождающего множества, то группа является свободным произведением и все нормальные автоморфизмы — внутренние. Наверное интересно было бы рассмотреть соотношения вида:

1) $R = [x_1, ..., x_n]$ или, более общо, $R = [x_1^{p_1}, ..., x_n^{p_n}]$;

2) $R = [x_1, ..., x_m][x_{m+1}, ..., x_n]$, (например, фундаментальная группа ориентируемой поверхности задается одним соотношением вида $[x_1, y_1]...[x_g, y_g]$).

В работе Minasyan A., Osin D. [71] дается описание нормальных автоморфизмов относительно гиперболических групп. В частности, доказано, что группа внутренних автоморфизмов имеет конечный индекс в группе нормальных автоморфизмов. И если рассматриваемая группа не является элементарной и не имеет нетривиальных конечных нормальных подгрупп, то $\mathrm{Inn}\, G = \mathrm{Aut}_n\, G$.

В работах Zhou W., Kim G., Tang C.Y., [57, 69, 72, 73, 77, 86] изучались квазивнутренние автоморфизмы 1) свободного произведения с объединением по циклической подгруппе, 2) древесных произведений групп и 3) некоторых HNN расширений. При этом авторы в своих рассуждениях опираются на то, что в HNN расширении есть нормальная форма слова и есть теорема Коллинза о сопряженности. Кроме того используется лемма из работы Grossman E.K. [12] о квазивнутренних автоморфизмах

Нормальные автоморфизмы свободных бернсайдовых групп для больших экспонент исследованы в работе Черепанов Е.А. [58]. В работе Атабекян В.С. [74] получено полное описание нормальных автоморфизмов свободных бернсайдовых групп.

Напомним известную теорему Бернсайда [1, 6] о том, что если группа имеет тривиальный центр и является характеристической подгруппой в своей группе автоморфизмов, то она совершенна, то есть ее группа автоморфизмов совпадает с подгруппой внутренних автоморфизмов.

В работе Нещадима М.В. [35] доказывается аналог этого утверждения для группы нормальных автоморфизмов. А именно, всякий нормальный автоморфизм групп $\operatorname{Aut} G$ и $\operatorname{Aut}_n G$, где G — группа без центра, является внутренним.

Другие результаты по нормальным, квазивнутренним, степенным, субнормальным автоморфизмам групп можно найти в списке литературы, приведенном в данной статье [4, 13–15, 27, 28, 31, 32, 36, 39, 42, 43, 45–48, 52, 55–87].

§2. Группа кос

Напомним [3, 11], что группа кос B_n на n нитях задается порождающими элементами $\sigma_1, ..., \sigma_{n-1}$ и определяющими соотношениями:

$$\begin{array}{ccc} \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} & \text{при} & i = 1, ..., n-2, \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & \text{при} & |i-j| \geq 2. \end{array}$$

Группа крашеных кос P_n, то есть ядро естественного гомоморфизма группы B_n на симметрическую группу S_n на n символах, порождается элементами A_{ij}, $1 \leq i < j \leq n$, где

$$\begin{array}{l} A_{i-1,i} = \sigma_{i-1}^2, \\ A_{ij} = \sigma_{j-1} \cdot ... \cdot \sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1} \cdot ... \cdot \sigma_{j-1}^{-1}. \end{array}$$

Согласно [3, 11], в P_n выполняются следующие соотношения ($\varepsilon = \pm 1$):

$$\begin{array}{l} A_{ik}^{-\varepsilon}A_{kj}A_{ik}^{\varepsilon} = (A_{ij}A_{kj})^{\varepsilon}A_{kj}(A_{ij}A_{kj})^{-\varepsilon}, \\ A_{km}^{-\varepsilon}A_{kj}A_{km}^{\varepsilon} = (A_{kj}A_{mj})^{\varepsilon}A_{kj}(A_{kj}A_{mj})^{-\varepsilon} \text{ при } m < j, \\ A_{im}^{-\varepsilon}A_{kj}A_{im}^{\varepsilon} = \left[A_{ij}^{-\varepsilon}, A_{mj}^{-\varepsilon}\right]^{\varepsilon} A_{kj} \left[A_{ij}^{-\varepsilon}, A_{mj}^{-\varepsilon}\right]^{-\varepsilon} \text{ при } i < k < m, \\ A_{im}^{-\varepsilon}A_{kj}A_{im}^{\varepsilon} = A_{kj} \text{ при } k < i,\ m < j \text{ или } m < k \end{array} \tag{1}$$

и это полная система соотношений группыP_n. Кроме того, P_n разлагается в полупрямое произведение подгруппы $P_{n-1} = \operatorname{gr}(A_{ij} \parallel 1 \leq i < j \leq n-1)$ и свободной нормальной подгруппы U_n со свободными порождающими $A_{1n}, A_{2n}, ..., A_{n-1,n}$.

В самой группе B_n справедливы формулы сопряжения ($\varepsilon = \pm 1$):

$$\begin{array}{l}
\sigma_k^{-\varepsilon} A_{ij} \sigma_k^{\varepsilon} = A_{ij} \text{ при } k \neq i-1, i, j-1, j,\\
\sigma_i^{-\varepsilon} A_{i,i+1} \sigma_i^{\varepsilon} = A_{i,i+1},\\
\sigma_{i-1}^{-1} A_{ij} \sigma_{i-1} = A_{i-1,j},\\
\sigma_{i-1} A_{ij} \sigma_{i-1}^{-1} = A_{ij}^{-1} A_{i-1,j} A_{ij},\\
\sigma_i^{-1} A_{ij} \sigma_i = A_{ij} A_{i+1,j} A_{ij}^{-1} \text{ при } j \neq i+1,\\
\sigma_i A_{ij} \sigma_i^{-1} = A_{i+1,j},\\
\sigma_{j-1}^{-1} A_{ij} \sigma_{j-1} = A_{i,j-1},\\
\sigma_{j-1} A_{ij} \sigma_{j-1}^{-1} = A_{i,j-1} \left[A_{ij}^{-1}, A_{j-1,j}^{-1}\right],\\
\sigma_j^{-1} A_{ij} \sigma_j = A_{j,j+1}^{-1} A_{i,j+1} A_{j,j+1},\\
\sigma_j A_{ij} \sigma_j^{-1} = A_{i,j+1} \text{ при } 1 \leq i < j \neq n-1.
\end{array} \tag{2}$$

2.1. Центр группы крашеных кос.

Как известно [3], центр группы кос B_n совпадает с центром подгруппы крашеных кос P_n и является бесконечной циклической группой порожденной элементом

$$D_{1n} = (\sigma_1 \cdot ... \cdot \sigma_{n-1})^n = A_{12}(A_{13}A_{23}) \cdot ... \cdot (A_{1n} \cdot ... \cdot A_{n-1,n}).$$

В работе [30] доказано, во-первых, что группа P_4 порождается элементами $D_{ij} = (\sigma_1 \cdot ... \cdot \sigma_{j-1})^{j-i+1}$, $1 \leq i < j \leq 4$, и, во-вторых, что ее центр выделяется в P_4 прямым множителем. В этом разделе данные результаты обобщаются на произвольное $n \geq 4$, а также приводится описание действия элементов D_{ij} как автоморфизмов свободной группы степени n.

Теорема 1. При $n \geq 4$ группа крашеных кос на n нитях порождается элементами

$$D_{ij} = (\sigma_1 \cdot ... \cdot \sigma_{j-1})^{j-i+1}, \;\; 1 \leq i < j \leq n,$$

причем $A_{1n} = D_{1,n-1}^{-1} D_{1n} D_{2n}^{-1} D_{2,n-1}$.

Доказательство проведем индукцией по n на основе равенства

$$D_{1n} = A_{12}(A_{13}A_{23}) \cdot ... \cdot (A_{1n} \cdot ... \cdot A_{n-1,n}) = D_{1,n-1}(A_{1n} \cdot ... \cdot A_{n-1,n}). \tag{3}$$

Можно считать, что имеют место включения

$$B_2 < B_3 < B_4 < ... < B_n < ... < B_\infty,$$

где группа B_∞ задается соотношениями групп B_n при всех $n = 1, 2, ...$ Пусть φ — иньективный эндоморфизм группы B_∞, определенный формулой

$$\sigma_i^{\varphi} = \sigma_{i+1}, \;\; i = 1, 2, ...$$

Ясно, что $A_{ij}^{\varphi} = A_{i+1,j+1}$, $D_{ij}^{\varphi} = D_{i+1,j+1}$. Поэтому достаточно доказать, что имеет место равенство

$$A_{1n} = D_{1,n-1}^{-1} D_{1n} D_{2n}^{-1} D_{2,n-1}.$$

Если $n = 2$, то $A_{12} = D_{12}$.

Если $n = 3$, то $A_{12}(A_{13}A_{23}) = D_{13}$ и

$$A_{13} = A_{12}^{-1} D_{13} A_{23}^{-1} = D_{12}^{-1} D_{13} D_{23}^{-1}.$$

Если $n = 4$, то $D_{13}(A_{14}A_{24}A_{34}) = D_{14}$ и

$$A_{14} = D_{13}^{-1}D_{14}(A_{24}A_{34})^{-1} = D_{13}^{-1}D_{14}((A_{13}A_{23})^{\varphi})^{-1} = \\ = D_{13}^{-1}D_{14}((D_{12}^{-1}D_{13})^{\varphi})^{-1} = D_{13}^{-1}D_{14}D_{24}^{-1}D_{23}.$$

Сделаем индуктивный шаг от n к $n+1$. Ввиду (3)

$$A_{1,n+1} = D_{1n}^{-1}D_{1,n+1}(A_{2,n+1}\cdot\ldots\cdot A_{n,n+1})^{-1} = \\ = D_{1n}^{-1}D_{1,n+1}((A_{1n}\cdot\ldots\cdot A_{n-1,n})^{\varphi})^{-1} = \\ = D_{1n}^{-1}D_{1,n+1}((D_{1,n-1}^{-1}D_{1n}^{\varphi})^{-1} = D_{1n}^{-1}D_{1,n+1}D_{2n}^{-1}D_{2,n+1}.$$

Теорема доказана.

Геометрическую интерпретацию элементов D_{ij} можно найти в [30].

Теорема 2. Центр группы крашеных кос выделяется в ней прямым множителем. Более точно,

$$P_n = Z(P_n) \times H_n,$$

где $Z(P_n) = \text{гр}(D_{1n})$, $H_n = \text{гр}(D_{ij} \,\|\, i \neq 1$ или $j \neq n)$. Множитель H_n изоморфен группе порожденной всеми A_{ij} за исключением любого одного.

Доказательство. Пусть R — система соотношений (1), $\overline{R}$ — система соотношений, получающаяся их переписыванием в порождающих D_{ij}, $1 \leq i < j \leq n$. Имеем

$$P_n = \text{гр}(A_{ij},\ 1 \leq i < j \leq n \,\|\, R) = \\ = \text{гр}(A_{ij},\ 1 \leq i < j \leq n \,\|\, R,\ [D_{1n}, D_{ij}] = 1,\ 1 \leq i < j \leq n) = \\ = \text{гр}(D_{ij},\ 1 \leq i < j \leq n \,\|\, \overline{R},\ [D_{1n}, D_{ij}] = 1,\ 1 \leq i < j \leq n).$$

Порождающий D_{1n} из системы соотношений $\overline{R}$ можно исключить, так как соотношения $\overline{R}$ имеют коммутаторный вид. Следовательно, остаются только соотношения между D_{ij}, где $i \neq 1$ или $j \neq n$ и центральные соотношения $[D_{1n}, D_{ij}] = 1$. Аналогично, выражая любой элемент A_{kl} множества $\{A_{ij},\ 1 \leq i < j \leq n\}$ с помощью соотношения (3) через остальные и D_{1n} и, соответственно переписывая систему соотношений (1), получаем, что прямой множитель можно взять равным группе, порожденной всеми $\{A_{ij},\ 1 \leq i < j \leq n\}$ за исключением A_{kl}.

Теорема доказана.

Заметим, что $Z(P_n)$ не выделяется в B_n прямым множителем. Пусть напротив $B_n = Z(B_n) \times T$, где T — некоторая подгруппа в B_n. Если обозначить чертой факторизацию группы B_n по ее коммутанту, то $\overline{B_n} = \overline{Z(B_n)} \times \overline{T}$. Так как $\overline{B_n} = \text{гр}(\overline{\sigma_1}) \cong \mathbb{Z}$, $\overline{Z(B_n)} = \text{гр}(\overline{\sigma_1}^{n(n-1)}) \cong \mathbb{Z}$, то $\overline{T} = 1$. Следовательно, $\text{гр}(\overline{\sigma_1}) = \text{гр}(\overline{\sigma_1}^{n(n-1)})$, что явно невозможно.

Опишем, наконец, сопряжение элементами D_{ij} порождающих свободной группы F_n. Известно [23], что

$$x_i^{D_{1n}} = (x_1\cdot\ldots\cdot x_n)x_i(x_1\cdot\ldots\cdot x_n)^{-1},\ \ i = 1, \ldots, n,$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — свободная база группы F_n.

Будем считать, что

$$F_2 < F_3 < F_4 < \ldots < F_m \leq \ldots < F_\infty,$$

где $F_m =< x_1, ..., x_m >$ и $F_\infty = \cup F_m$. Действие элементов $\sigma_i \in B_\infty$, $i = 1, 2, ...$ на F_∞ согласовано с действием эндоморфизма φ из теоремы 1 на B_∞ и F_∞, то есть

$$x_{i+1}^{(\sigma_j^\varphi)} = (x_i^{\sigma_j})^\varphi,$$

где $x_i^\varphi = x_{i+1}$, $i = 1, 2, ...$. Действие произвольного D_{ij} однозначно определяется действием элемента $D_{1,j-i+1}$ и поэтому

$$x_k^{D_{ij}} = \begin{cases} x_k & \text{при } k < i \text{ или } k > j, \\ (x_i \cdot ... \cdot x_j) x_k (x_i \cdot ... \cdot x_j)^{-1} & \text{при } i \leq k \leq j, \end{cases}$$

где $k = 1, ..., n$.

2.2. Нормальные автоморфизмы групп крашеных кос.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Всякий нормальный автоморфизм группы крашеных кос P_n при $n \geq 3$ является внутренним.

Доказательство. Пусть f — нормальный автоморфизм группы P_n. Так как $U_n \lhd P_n$, то $U_n^f = U_n$.

Обозначим $A_{in} = x_i$, $i = 1, ..., n-1$. Из соотношений (1) следует, что сопряжение элементами группы P_n действуют на порождающих $x_1, ..., x_{n-1}$ группы U_n как сопряжение в самой U_n, то есть $\text{гр}_{\lhd P_n}(x_i) = \text{гр}_{\lhd U_n}(x_i)$, $i = 1, ..., n-1$, где $\text{гр}_{\lhd G}(M)$ обозначает нормальное замыкание подгруппы порожденной подмножеством M в группе G.

Нормальный автоморфизм f оставляет подгруппу $\text{гр}_{\lhd U_n}(x_i)$ на месте, то есть

$$\text{гр}_{\lhd U_n}(x_i) = \text{гр}_{\lhd U_n}(x_i^f).$$

По теореме Магнуса (см. [10], стр. 272) из совпадения нормальных замыканий элементов x_i и x_i^f в свободной группе U_n следует, что $x_i^f = v_i^{-1} x_i^{\alpha_i} v_i$, где $\alpha_i = \pm 1$, $v_i \in U_n$, $i = 1, ..., n-1$. Элементы из подгруппы $P_{n-1} =< A_{ij} \parallel j < n >$ оставляют произведение $x_1 \cdot ... \cdot x_{n-1}$ на месте, поэтому

$$\text{гр}_{\lhd U_n}(x_1 \cdot ... \cdot x_{n-1}) = \text{гр}_{\lhd U_n}((x_1 \cdot ... \cdot x_{n-1})^f)$$

и, следовательно, $(x_1 \cdot ... \cdot x_{n-1})^f = v^{-1}(x_1 \cdot ... \cdot x_{n-1})^\alpha v$, где $\alpha = \pm 1$, $v \in U_n$.

Покажем, что $\alpha_1 = ... = \alpha_{n-1} = \alpha = 1$.

Рассмотрим действие, индуцированное автоморфизмом f на абелизации U_n/U_n', где $U_n' = [U_n, U_n]$ — коммутант группы U_n. Так как каждый элемент группы P_n индуцирует тождественное действие на U_n/U_n', то f индуцирует нормальный автоморфизм свободной абелевой группы U_n/U_n'.

Имеем

$$(x_i U_n')^f = x_i^{\alpha_i} U_n', \ \ i = 1, ..., n-1,$$
$$(x_1 \cdot ... \cdot x_{n-1} U_n')^f = (x_1 \cdot ... \cdot x_{n-1})^\alpha U_n'.$$

Поэтому $\alpha_1 = ... = \alpha_{n-1} = \alpha = \pm 1$.

Пусть $R = \text{гр}_{\lhd P_n}(x_1 \cdot ... \cdot x_{n-3})$. Факторгруппа U_n/R — свободная группа со свободной базой x_{n-2}, x_{n-1}. И в группе U_n/R выполнены соотношения

$$x_{n-2}^{A_{n-2,n-1}^\varepsilon} = (x_{n-2}x_{n-1})^\varepsilon x_{n-2} (x_{n-2}x_{n-1})^{-\varepsilon},$$

$$x_{n-1}^{A_{n-2,n-1}^\varepsilon} = (x_{n-2}x_{n-1})^\varepsilon x_{n-1} (x_{n-2}x_{n-1})^{-\varepsilon},$$

где $\varepsilon = \pm 1$ и

$$x_{n-2}^{A_{ij}} = x_{n-2}, \;\; x_{n-1}^{A_{ij}} = x_{n-1}, \;\; \text{при} \;\; A_{ij} \neq A_{n-2,n-1}.$$

Следовательно, группа P_n действует на факторгруппе U_n/R внутренними автоморфизмами и, поэтому, нормальный автоморфизм f индуцирует нормальный автоморфизм свободной группы U_n/R степени 2. Поэтому [20, 21], f действует как внутренний автоморфизм группы U_n/R. Рассматривая соотношение $x_{n-1}^f = v_{n-1}^{-1} x_{n-1}^{\alpha} v_{n-1} \,(\mathrm{mod}\, R)$, получаем, что $\alpha = 1$. Таким образом,

$$x_k^f = v_k^{-1} x_k v_k, \;\; k = 1, ..., n-1$$

и, кроме того,

$$(x_1 \cdot ... \cdot x_{n-1})^f = v^{-1}(x_1 \cdot ... \cdot x_{n-1}) v.$$

Домножив f на внутренний автоморфизм, индуцированный элементом v^{-1} и переобозначив f и элементы v_k, получим

$$x_k^f = v_k^{-1} x_k v_k, \;\; k = 1, ..., n-1$$

и, кроме того,

$$(x_1 \cdot ... \cdot x_{n-1})^f = x_1 \cdot ... \cdot x_{n-1}.$$

Группа крашеных кос P_{n-1} может быть определена следующим образом [10, 23]. Пусть $\varphi \in \mathrm{Aut}\, F_{n-1}$, тогда $\varphi \in P_{n-1}$ тогда и только тогда, когда φ на свободных порождающих $x_1, ..., x_{n-1}$ свободной группы F_{n-1} действует сопряжением и оставляет слово $x_1 \cdot ... \cdot x_{n-1}$ на месте.

Следовательно, найдется такая крашеная коса $\varphi \in P_{n-1}$, что

$$x_k^f = x_k^{\varphi}, \;\; k = 1, ..., n-1.$$

Домножая f на внутренний автоморфизм, индуцированный элементом φ^{-1} и переобозначая f, получим

$$x_k^f = x_k, \;\; k = 1, ..., n-1.$$

Осталось показать, что $f = 1$.

Будем рассматривать P_n и $\mathrm{Aut}\, P_n$ как подгруппы голоморфа $\mathrm{Hol}\, P_n$.

Для $A_{ij} \in P_{n-1}$ имеем

$$x_k^{A_{ij}^f} = x_k^{f^{-1} A_{ij} f} = x_k^{A_{ij} f} = (x_k^{A_{ij}})^f = (x_k^{A_{ij}}), \;\; k = 1, ..., n-1.$$

Если $A_{ij}^f = W_{ij} B_{ij}$, где $B_{ij} \in P_{n-1}$, $W_{ij} \in U_n$, то, как только что было доказано,

$$x_k^{W_{ij}(B_{ij} A_{ij}^{-1})} = x_k, \;\; k = 1, ..., n-1,$$

или

$$x_k^{W_{ij}} = x_k^{(B_{ij} A_{ij}^{-1})^{-1}}, \;\; k = 1, ..., n-1.$$

Мы видим, что коса $B_{ij} A_{ij}^{-1}$ действует на группе U_n как внутренний автоморфизм, индуцированный элементом W_{ij}^{-1}. Хорошо известно [23], что $\mathrm{Int}\, U_n \cap P_{n-1} = \mathrm{гр}(h)$, где h — внутренний автоморфизм, индуцированный произведением $x_1 \cdot ... \cdot x_{n-1}$. Следовательно, $(B_{ij} A_{ij}^{-1})^{-1} = h^{m_{ij}}$, $m_{ij} \in \mathbb{Z}$ и $W_{ij} = (x_1 \cdot ... \cdot x_{n-1})^{m_{ij}}$. Поэтому

$$A_{ij}^f = W_{ij} B_{ij} = W_{ij} (B_{ij} A_{ij}^{-1}) A_{ij} = (x_1 \cdot ... \cdot x_{n-1})^{m_{ij}} h^{-m_{ij}} A_{ij},$$

где $1 \leq i < j \leq n-1$.

Рассматривая действие f на P_{n-1} как на факторгруппе P_n/U_n, получаем

$$A_{ij}^f = h^{-m_{ij}} A_{ij}, \ \ 1 \le i < j \le n-1.$$

Покажем, что отображение $A_{ij} \mapsto h^{-m_{ij}} A_{ij}$, $1 \le i < j \le n-1$, для любых $m_{ij} \in \mathbb{Z}$ с условием

$$\sum m_{ij} = 0 \ \text{ или } \ 2$$

действительно является автоморфизмом группы P_{n-1}, но нормальным автоморфизмом оно будет только при $m_{ij} = 0$, $1 \le i < j \le n-1$.

Элемент h является порождающим центра группы P_{n-1} [3, 23] и

$$h = A_{12}(A_{13}A_{23}) \cdot ... \cdot (A_{1,n-1} \cdot ... \cdot A_{n-2,n-1}).$$

По теореме 2

$$P_{n-1} = \text{гр}(h) \times \text{гр}(A_{13}, A_{23}, ..., A_{n-2,n-1}).$$

Так как соотношения в группе $\text{гр}(A_{13}, A_{23}, ..., A_{n-2,n-1})$ имеют коммутаторный вид и

$$P_{n-1} = \text{гр}(h, h^{-m_{ij}} A_{ij} \parallel 1 \le i < j \le n-1, j \ne 2, m_{ij} \in \mathbb{Z}),$$

то отображение $A_{ij} \mapsto h^{-m_{ij}} A_{ij}$, $1 \le i < j \le n-1$, для любых $m_{ij} \in \mathbb{Z}$ действительно является автоморфизмом группы P_{n-1} при

$$\sum m_{ij} = 0 \ \text{ или } \ 2,$$

так как

$$h^{\pm 1} = h^f = h^{-\sum m_{ij}} A_{12}(A_{13}A_{23}) \cdot ... \cdot (A_{1,n-1} \cdot ... \cdot A_{n-2,n-1}) = h^{-\sum m_{ij}+1}.$$

Пусть $m_{ij} \ne 0$ для некоторых $(i,j) \ne (1,2)$ и f — нормальный автоморфизм группы P_{n-1}. Имеем

$$\text{гр}(A_{13}, A_{23}, ..., A_{n-2,n-1}) = \text{гр}(A_{13}, A_{23}, ..., A_{n-2,n-1})^f =$$
$$= \text{гр}(A_{13}h^{-m_{13}}, ..., A_{ij}h^{-m_{ij}}, ..., A_{n-2,n-1}h^{-m_{n-2,n-1}}).$$

Следовательно,

$$\text{гр}(A_{13}, A_{23}, ..., A_{n-2,n-1}) = \text{гр}(h^{m_{ij}}, A_{13}, A_{23}, ..., A_{n-2,n-1}).$$

Отсюда получаем противоречие

$$\infty = |P_{n-1} : \text{гр}(A_{13}, A_{23}, ..., A_{n-2,n-1})| =$$
$$= |P_{n-1} : \text{гр}(h^{m_{ij}}, A_{13}, A_{23}, ..., A_{n-2,n-1})| = m_{ij} < \infty.$$

Если $m_{12} \ne 0$, то так же показывается, что f не будет нормальным автоморфизмом, только прямой множитель надо взять равным, например, подгруппе $\text{гр}(A_{12}, A_{23}, \ldots, A_{n-2,n-1})$.

Таким образом, $\sum m_{ij} = 0$, если $1 \le i < j \le n-1$ и $n \ge 4$ (при $n = 3$ имеем $P_{n-1} \cong \mathbb{Z}$ и выше приведенное рассуждение не годится) и нормальный автоморфизм f является внутренним.

Пусть $n = 3$. По теореме 2

$$P_3 = \text{гр}(h) \times \text{гр}(A_{13}, A_{23}),$$

и, как было показано, можно считать, что

$$A_{13}^f = A_{13}, \ \ A_{23}^f = A_{23}.$$

Если $h^f = h^{-1}$, то

$$h^{-1} = h^f = A_{12}^f A_{13} A_{23}$$

и, следовательно,

$$A_{12}^f = h^{-1}(A_{13}A_{23})^{-1} = h^{-1}(A_{12}^{-1}A_{12}A_{13}A_{23})^{-1} = A_{12}h^{-2}.$$

Для группы P_{n-1}, $n \geq 4$, уже было доказано, что автоморфизм такого вида не будет нормальным. Поэтому $h^f = h$ и, следовательно, $f = 1$.

Теорема доказана.

2.3. Нормальные автоморфизмы групп кос.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Всякий нормальный автоморфизм группы кос B_n при $n \geq 3$ является внутренним.

Доказательство. В работе [23] доказано, что

$$\operatorname{Aut} B_n = \text{гр}(\operatorname{Int} B_n, \mu),$$

где μ — автоморфизм, заданный действием

$$\sigma_i^\mu = \sigma_i^{-1}, \ \ i = 1, ..., n-1.$$

Поэтому, достаточно показать, что автоморфизм μ не является нормальным.

Рассмотрим факторгруппу P_n/P_n''. Подгруппу P_n'/P_n'' будем рассматривать как модуль с базой $[A_{ij}, A_{kl}]$, где $1 \leq i < j \leq n$, $1 \leq k < l \leq n$ над кольцом $\mathbb{Z}[P_n/P_n']$ и действие последнего на первом записывать мультипликативно:

$$w^t = t \cdot w, \ \ w \in P_n'/P_n'', \ \ t \in \mathbb{Z}[P_n/P_n'].$$

Группа B_n естественно действует на P_n/P_n' и P_n'/P_n''. Причем, на множестве $\{A_{ij} \parallel 1 \leq i < j \leq n\}$ в факторгруппе P_n/P_n' группа B_n действует как подгруппа симметрической группы этого множества.

Положим

$$t = \sum_{1 \leq i < j \leq n} t_{ij},$$

где t_{ij} — произведение $A_{12}A_{13} \cdot ... \cdot A_{n-1,n}$ с пропущенным множителем A_{ij}, t, $t_{ij} \in P_n/P_n'$. Тогда

$$t^{\sigma_i} = t, \ \ i = 1, ..., n-1.$$

Пусть

$$w = t \cdot [A_{13}, A_{23}].$$

Покажем, что $w^\mu \notin \text{гр}_{\lhd G}(w)$, где $G = B_n/P_n''$.

Из соотношений (2) легко получить, что $A_{ij}^\mu = A_{ij}^{-1}$ в группе P_n/P_n' и $A_{13}^\mu = A_{23}^{-1}A_{13}^{-1}A_{23}$, $A_{23}^\mu = A_{23}^{-1}$ в группе P_n. В модуле P_n'/P_n'' имеем

$$[A_{13}, A_{23}]^\mu = A_{13}^{-1} \cdot [A_{13}, A_{23}].$$

Пусть $w^\mu \notin \text{гр}_{\lhd G}(w)$. Так как $t^{\sigma_i} = t$, $i = 1, ..., n-1$, то

$$t^\mu \cdot A_{13}^{-1} \cdot [A_{13}, A_{23}] = t \cdot v, \tag{4}$$

где v — некоторый элемент из P_n'/P_n''. Достаточно показать, что (4) не выполняется в группе $P_n/(NP_n'') \cong P_3/P_3''$, где $N = \text{гр}_{\lhd P_n}(A_{14}, A_{24}, A_{34}, ..., A_{n-1,n})$.

Пусть φ — гомоморфизм группы P_n/P_n'' на P_3/P_3'' и P_n/P_n' на P_3/P_3'. Тогда

$$t^\varphi = mA_{12}A_{13}A_{23} + A_{12}A_{23} + A_{13}A_{23} + A_{12}A_{13},$$

$$(t^{\mu})^{\varphi} = mA_{12}^{-1}A_{13}^{-1}A_{23}^{-1} + A_{12}^{-1}A_{23}^{-1} + A_{13}^{-1}A_{23}^{-1} + A_{12}^{-1}A_{13}^{-1},$$

где $m = \dfrac{n(n-1)}{2} - 3$.

Элементы $A_{12}A_{13}A_{23}$ и $A_{12}^{-1}A_{13}^{-1}A_{23}^{-1} = (A_{12}A_{13}A_{23})^{-1}$ из P_3/P_3' являются порождающими центра группы P_3, поэтому они действуют как единица кольца $\mathbb{Z}[P_3/P_3']$ на модуле P_3'/P_3''.

Применяя к (4) гомоморфизм φ, получаем

$$(m + A_{12}^{-1}A_{23}^{-1} + A_{13}^{-1}A_{23}^{-1} + A_{12}^{-1}A_{13}^{-1})[A_{13}, A_{23}] =$$
$$= A_{13}(m + A_{12}A_{23} + A_{13}A_{23} + A_{12}A_{13})v^{\varphi}.$$

Так как $P_3 = \text{гр}(A_{12}A_{13}A_{23}) \times \text{гр}(A_{13}, A_{23})$, то

$$v^{\varphi} = F \cdot [A_{13}, A_{23}],$$

где $F \in \mathbb{Z}[P_3/P_3']$. Из того, что $A_{12}A_{13}A_{23}$ действует тождественно на P_3'/P_3'', получаем, что A_{12} действует как $(A_{13}A_{23})^{-1}$.

Пусть $a = A_{13}$, $b = A_{23}$. Переобозначив aF через F и заменив A_{12} на $(ab)^{-1}$, получим

$$(m + a + b + (ab)^{-1})[a, b] = (m + a^{-1} + b^{-1} + ab)F \cdot [a, b].$$

Группа $\text{гр}(A_{13}, A_{23})$ свободная группа ранга 2, поэтому модуль P_3'/P_3'' — свободный $\mathbb{Z}[a^{\pm 1}, b^{\pm 1}]$ – модуль с базой $\{[a, b]\}$. Следовательно, в кольце $\mathbb{Z}[a^{\pm 1}, b^{\pm 1}]$ должно выполняться равенство

$$(m + a + b + (ab)^{-1}) = (m + a^{-1} + b^{-1} + ab)F$$

или

$$(1 + mab + ab^2 + a^2b) = (a + b + mab + a^2b^2)F. \tag{5}$$

Пусть $F = F_1a^{-k}b^{-l}$, где $F_1 \in \mathbb{Z}[a, b]$, k, l — целые числа такие, что F_1a^{-k-1} и F_1b^{-l-1} содержат отрицательную степень элементов a и b, соответственно.

Применяя к (5) подстановку $\gamma : a \mapsto b,\ \ b \mapsto a$, получим

$$F^{\gamma} = F,\ \ F_1^{\gamma}b^{-k}a^{-l} = F_1a^{-k}b^{-l}.$$

Из выбора чисел k и l следует, что $k = l$.

Пусть $\delta : \mathbb{Z}[a^{\pm 1}, b^{\pm 1}] \to \mathbb{Z}[a^{\pm 1}]$ — гомоморфизм, посылающий a и b в a. Из (5) и равенства $k = l$ получаем

$$a^{2k}(1 + ma^2 + 2a^3) = (2a + ma^2 + a^4)F_1^{\delta}.$$

Из этого равенства многочленов в кольце $\mathbb{Z}[a]$ получаем, что F_1^{δ} делится на a^{2k-1} без остатка. Поэтому

$$(1 + ma^2 + 2a^3) = (2 + ma + a^3)(F_1^{\delta}a^{2k-1}).$$

Сравнивая, свободные члены, приходим к противоречию.

Теорема доказана.

В связи с доказанными утверждениями о совпадении групп нормальных и внутренних автоморфизмов групп кос, групп крашеных кос естественно сформулировать следующие вопросы для групп виртуальных кос VB_n, групп кос со спайками WB_n, неограниченных виртуальных кос UVB_n [44, 51, 53].

Вопрос 11. Описать группы автоморфизмов групп VB_n, WB_n, UVB_n.

Известно, что группа WB_n изоморфна группе сопрягающих автоморфизмов свободной группы ранга n. Группа крашеных кос WP_n группы WB_n [40, 41, 50, 87] изоморфна группе сопрягающих базис автоморфизмов свободной группы ранга n. В работе [87] доказан аналог теоремы 3 для WP_n, а именно, что нормальные автоморфизмы группы WP_n совпадают с внутренними.

Вопрос 12. Доказать или опровергнуть равенства

$$\mathrm{Aut}_n\, G = \mathrm{Inn}\, G,$$

где $G = VB_n$, WB_n, UVB_n.

Отметим, что помимо перечисленных групп кос, есть также классические группы кос поверхностей, для которых, поставленные вопросы также имеют смысл.

References

[1] Burnside W., *On the outer automorphisms of a group*, Proc. London Math. Soc., **11**:2 (1913), 40–42.

[2] Golowin O.N., Syadowsky L.E. *Uber die Automorphismengruppen der freien Produkte*, Mat. Sbornik., **4**:3 (1938), 505–514. Zbl 0021.01301

[3] Markov A. A. *Fundamentals of algebraic theory of braid groups*, Trudy Mat. Inst. Akad. Nauk SSSR, **16** (1945), 1–54. Zbl 0061.02507

[4] Wall G. E., *Finite groups with class-preserving outer automorphisms*, J. London Math. Soc., **22** (1947), 315–320. Zbl 0030.00901

[5] Neumann B.H., *Groups with finite classes of conjugate elements*, Proc. London Math. Soc., **3**:1 (1951), 178–187. Zbl 0043.02401

[6] Burnside W., *Theory of groups of finite order*, 2 ed., Dover Publications, Inc., New York, 1955. Zbl 0064.25105

[7] Baumslag G., *Automorphism groups of residually finite groups*, J. London Math. Soc., **38** (1963), 117–118. Zbl 0124.26003

[8] Cooper C.D.H., *Power automorphisms of a group*, Math. Z., **107**, **5** (1968), 335–356. Zbl 0169.33801

[9] Neukirch J., *Kennzeichning der p-adischen und der endlichen Zahlkorper*, Inventiones mathematicae, **6** (1969), 296–314. Zbl 0192.40102

[10] Magnus W., Karrass A., Solitar D., *Combinatorial group theory*, M.: Nauka. 1974. Zbl 0295.20040

[11] Birman J.S., *Braids, links and mapping class group*, Annals of Math. Studies 82, Princeton University Press, 1974.

[12] Grossman E.K., *On the residual finiteness of certain mapping class groups*, J. London Math. Soc., **9**:2 (1974), 160–164.

[13] Dyer J., Formanek E., *The automorphism group of a free group is complete*, J. London Math. Soc., **11**:2 (1975), 181–190. Zbl 0313.20021

[14] Rose J.S., *Automorphism groups of groups with trivial center*, Proc. London Math. Soc., **31**:3 (1975), 167–193. Zbl 0315.20021

[15] Schweigert D., *Polynomautomorphismen auf endlichen Gruppen*, Arch. Math., **29**:1 (1977), 34–38. Zbl 0368.20016

[16] Coxeter H.S.M., Moser W.O.J., *Generators and relations for discrete groups*, Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1980.

[17] Lyndon R.C. and Schupp P.E., *Combinatorial group theory,* Springer-Verlag, Berlin, 1977. Zbl 0368.20023

[18] Jarden M., Ritter J., *Normal automorphisms of absolute Galois groups of p-adic fields*, Duke Math. J., **47**:1 (1980), 47–56. Zbl 0439.20022

[19] Jarden M., *Normal automorphisms of free profinite groups*, J. Algebra, **62**:1 (1980), 118–123. Zbl 0432.20024

[20] Lubotzky A., *Normal automorphisms of free groups*, J. Algebra, **63**:2 (1980), 494–498. Zbl 0432.20025

[21] Lu A. S.-T., *Normal automorphisms of free groups*, J. Algebra, **64**:1 (1980), 52–53.

[22] Dyer J.L., *Separating conjugates in amalgamated free products and HNN extensions*, J. Austral. Math. Soc., Ser. A, **29** (1980), 35–51. Zbl 0429.20033

[23] Dyer J.L., Grossman E.K., *The automorphism groups of the braid groups*, Amer. J. Math., **103**:6 (1981), 1151–1169. Zbl 0476.20026

[24] Lyul'ko A.N., *Normal automorphisms of free nilpotent groups*, Questions in the algebraic systems theory. Karaganda, 1981, 49–54 (Russian).

[25] Roman'kov V.A., *Normal automorphisms of discrete groups*, Siberian Math. J., **24**:4 (1983), 604–614. Zbl 0531.20014

[26] McCool J., *On basis–conjugating automorphisms of free groups*, Can. J. Math., **38**:6 (1986), 1525–1529. Zbl 0613.20024

[27] Franciosi S., de Giovanni F., *On automorphisms fixing normal subgroups of nilpotent groups*, Boll. Un. Mat. Ital., **B 7** (1987), 1161–1170. Zbl 0635.20014

[28] Bryant R.M., Gupta C.K., Levin F., Mochizuki H.Y. *Nontame automorphisms of free nilpotent groups*, Commun. Algebra, **18**: 11 (1990), 3619–3631. Zbl 0722.20017

[29] Neshchadim M.V., *Tame normal automorphisms of free nilpotent groups*, Proc. of XXIX All-Union Scientific Student Conference "The Student and Scientific-Technological Progress" (Novosibirsk, 1991), 34–40, Novosibirsk Gos. Univ., Novosibirsk, 1991.

[30] Droms C., Levin J., Servatius H., *Tree groups and the 4-string pure braid group*, J. Pure and Appl. Algebra, **70**:3 (1991), 251–265. Zbl 0727.20019

[31] Malinowska I., *On quasi-inner automorphisms of a finite p-group*, Publ. Math. Debrecen., **41**:1-2 (1992), 73–77. Zbl 0792.20019

[32] Malinowska I., *p-automorphisms of a finite p-groups: problems and questions*, Advances in Group Theory, (1992), 111–127.

[33] Neshchadim M.V., *Normal automorphisms of braid groups*, Preprint №4. Institute of mathimatics SB RAN. Novosibirsk. 1993.

[34] Bolutse V., Romanovsky N.S., *Normal automorphisms of free two-step solvable pro-p-groups*, Algebra and Logic, **32**:4 (1993), 239–243.

[35] Neshchadim M.V., *On the absence of outer normal automorphisms in some groups of automorphisms*, Group and metric properties of mappings, Novosibirsk Gos. Univ., Novosibirsk, 1995, pp. 48–61. Zbl 0943.20032

[36] Robinson D.J.S., *Automorphisms fixing every subnormal subgroup of a finite group*, Arch. Math., **64**:1 (1995), 1–4. Zbl 0813.20021

[37] Kargapolov M.I., Merzljakov Ju.I., *Fundamentals of the theory of groups*, Graduate Texts in Mathematics, 62. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1979, 203 p. Zbl 0549.20001

[38] Neshchadim M.V., *Free products of groups does not have outer normal automorphisms*, Algebra and Logic, **35**:5 (1996), 316–318. Zbl 0976.20013

[39] Gupta Ch.K., Romanovsky N.S., *Normal automorphisms of a pro-p-group that is free in the variety N_2A*, Algebra and Logic, **35**:3 (1996), 139–148. Zbl 0976.20017

[40] Savushkina A.G., *On the group of conjugating automorphisms of a free group*, Math. Notes, **60**:1 (1996), 68–80. Zbl 0902.20016

[41] Savushkina A.G., *Basis-conjugating automorphisms of a free group*, Mosc. Univ. Math. Bull., **51**:4 (1996), 14–17. Zbl 0913.20026

[42] Romanovskij N.S., *Normal automorphisms of free solvable pro-p-groups*, Algebra and Logic, **36**:4 (1997), 257–263. Zbl 0941.20024

[43] Khukhro E., *p-automorphisms of finite p-groups*, LMS LN Series, **246**, Cambridge Univ. Press, 1998. Zbl 0897.20018

[44] Kauffman L.H., *Virtual knot theory*, Eur. J. Comb., **20**:7 (1999), 663–690. Zbl 0938.57006

[45] Allenby R.B.J.T., Kim G., Tang C.Y., *Residual finiteness of outer automorphism groups of certain pinched 1-relator groups*, J. Algebra, **246**:2 (2001), 849–858. Zbl 1023.20010

[46] Hertweck M., *Class-preserving automorphisms of finite groups*, J. Algebra, **241**:1 (2001), 1–26. Zbl 0993.20017

[47] Szechtman F., *n-inner automorphisms of finite groups*, Proc. Amer. Math. Soc., **131** (2001), 3657–3664.

[48] Curran M.J., McCaughan D.J., *Central automorphisms that are almost inner*, Comm. Algebra, **29** (2001), 2081–2087. Zbl 0991.20019

[49] Endimioni G., *Pointwise inner automorphisms in a free nilpotent group*, Quart. J. Math., **53**:4 (2002), 397–402. Zbl 1060.20025

[50] Bardakov V.G., *The structure of the group of conjugating automorphisms*, Algebra i Logika, **42**:5 (2003), 515–541. Zbl 1067.20041

[51] Manturov V.O., *On the recognition of virtual braids*, Zap. Nauchn. Sem. S. Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov (POMI), **299** (Geom. i Topol. **8**) (2003) 267–286, 331–332 (in Russian); translation in **J. Math. Sci.** (N. Y.) **131** (2005), 5409–5419. Zbl 1144.20310

[52] Allenby R.B.J.T., Kim G., Tang C.Y., *On the residual finiteness of* $Out(\pi_1(M))$ *of certain Seifert manifolds*, Algebra Colloq., **10**:2 (2003), 121–126. Zbl 1040.20023

[53] Bardakov V.G., *The virtual and universal braids*, Fund. Math., **181** (2004), 1–18. Zbl 1078.20036

[54] Bogopolski O., Kudryavtseva E., Zieschang H., *Simple curves on surfaces and an analog of a theorem of Magnus for surface groups*, Math. Z., **247**:3 (2004), 595–609. Zbl 1084.20027

[55] Garge S.M., *On class preserving automorphisms*, Preprint, 2004.

[56] Allenby R.B.J.T., Kim G., Tang C.Y., *Residual finiteness of outer automorphism groups of finitely generated non-triangular Fuchsian groups*, Inernat. J. Algebra Comput., **15**:1 (2005), 59–72. Zbl 1077.20050

[57] Kim G., Tang C.Y., *Conjugacy separability of certain HNN-extensions of groups*, Rocky Mountain J. Math., **35**:2 (2005), 587–602. Zbl 1091.20020

[58] Cherepanov E.A., *Normal automorphisms of free Burnside groups of large odd exponents*, Internat. J. Algebra Comput., **16**:5 (2006), 839–847. Zbl 1115.20024

[59] Tieudjo D., Moldavanskii D.I., *On the automorphisms of some one-relator groups*, Commun. Algebra, **34**:11 (2006), 3975–3983. Zbl 1114.20019

[60] Herman A., Li Y., *Class preserving automorphisms of Blackburn groups*, J. Austral. Math. Soc., **80** (2006), 351–358. Zbl 1102.20023

[61] Endimioni G., *Normal automorphisms of a free metabelian nilpotent group*, arXiv:math/0612347v2 [math.GR] 19 Nov 2007.

[62] Endimioni G., *On the polynomial automorphisms of a group*, Acta Sci. Math., **73**:1 (2007), 61–69. Zbl 1149.20026

[63] Yadav M.K., *Class preserving automorphisms of finite p-groups*, J. London Math. Soc., **75**:3 (2007), 755–772. Zbl 1129.20017

[64] Yadav M.K., *On automorphisms of finite p-groups*, J. Group Theory, **10** (2007), 859–866. Zbl 1131.20015

[65] Yadav M.K., *On automorphisms of some finite p-groups*, Proc. Indian Acad. Sci.(Math. Sci.), **118**:1 (2008), 1–11. Zbl 1148.20014

[66] Endimioni G., *Automorphisms fixing every normal subgroup of a nilpotent-by-abelian group*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **120** (2008), 73–77. Zbl 1179.20034

[67] Minasyan A., *Groups with finitely many conjugacy classes and their automorphisms*, Comm. Math. Helv., **84**:2 (2009), 259–296. Zbl 1180.20033

[68] Allenby R.B.J.T., Kim G., Tang C.Y., *Outer automorphism groups of Seifert 3-manifolds groups over non-orientable surfaces*, J. Algebra, **322**:4 (2009), 957–968. Zbl 1192.57002

[69] Kim G., Tang C.Y., *Residual finiteness of outer automorphism groups of certain 1-relator groups*, Science in China Series A: Mathematics, **52**:2 (2009), 287–292. Zbl 1181.20029

[70] Hertweck M., Jespers E., *Class-preserving automorphisms and normalizer property for Blackburn group*, J. Group Theory, **12** (2009), 157–169. Zbl 1168.16017

[71] Minasyan A., Osin D., *Normal automorphisms of relatively hyperbolic groups*, Trans. Amer. Math. Soc., **362**:11 (2010), 6079–6103. Zbl 1227.20041

[72] Kim G., Tang C.Y., *Outer automorphism groups of certain 1-relator groups*, Science in China Series A: Mathematics, **53**:6 (2010), 1635–1641. Zbl 1209.20030

[73] Zhou W., Kim G., *Class-preserving automorphisms and inner automorphisms of certain tree products of groups*, J. Algebra, **341**:1 (2011), 198–208. Zbl 1243.20040

[74] Atabekyan V.S., *Normal automorphisms of free Burnside groups*, Izv. Math., **75**:2 (2011), 223–237. Zbl 1227.20030

[75] Atabekyan V.S., Gevorgyan A.L., *On outer normal automorphisms of periodic products of groups*, J. Contemp. Math. Anal., **46**:6 (2011), 289–292. Zbl 1299.20047

[76] Yadav M.K., *Class preserving automorphisms of finite p-groups: a servey*, Groups St Andrews-2009 (Bath), LMS Lecture Note Ser., **383** (2011), 569–579. Zbl 1231.20024

[77] Zhou W., Kim G., *Class-preserving automorphisms of generalized free products amalgamating a cyclic normal subgroup*, Bull. Korean Math. Soc., **49**:5 (2012), 949–959. Zbl 06093675

[78] Bardakov V., Vesnin A., Yadav M.K., *Class preserving automorphisms of unitriangular groups*, Internat. J. Algebra Comput., **22** (2012), 17 pages. Zbl 1256.20036

[79] Yadav M.K. *Class preserving automorphisms of finite p-groups: a survey*, arXiv:1002.1359v2 [math.GR] 25 Aug 2012.

[80] Jain V.K., Yadav M.K., *On finite p-groups whose automorphisms are all central*, Israel J. Math., **189** (2012), 225–236. Zbl 1262.20030

[81] Farb B., Margalit D., *A primer on mapping class groups*, Princ. Math. Ser., **49**, 2012.

[82] Atabekyan V., Gevorgyan A., Khachatryan A., Pahlevanyan A., *On normal automorphisms of n-periodic products of finite cyclic groups*, International Journal of Group Theory, **2**:3 (2013), 39–47.

[83] Yadav M.K., *On finite p-groups whose automorphisms are all class preserving*, Comm. Algebra, **41** (2013), 4576–4592. Zbl 1291.20023

[84] Yadav M.K., *Class preserving automorphisms of finite p-groups II*, arXiv:1406.7365v1 [math.GR] 28 Jun 2014.

[85] Timoshenko E. I., *Normal automorphisms of a soluble product of Abelian groups*, Sibirian Mathematical Journal, **56**:1 (2015), 191–198. Zbl 1328.20055

[86] Zhou W., Kim G., *Class preserving automorphisms of certain HNN extensions*, J. Algebra, **431** (2015), 127–137. Zbl 1327.20028

[87] V.G. Bardakov, M.V. Neshchadim, *Subgroups, automorphism and Lie algebras associated with group of basis conjugating automorphisms*, Algebra i Logika, **55**:6 (2016), in print.

Michail Vladimirovich Neshchadim
Sobolev Institute of Mathematics SO RAN,
pr. akad. Koptyuga, 4,
Novosibirsk State University,
Pirogova str., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: neshch@math.nsc.ru