S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 1401–1409 (2016) УДК 517.9
DOI 10.17377/semi.2016.13.108 MSC 35Q20

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПЕРЕНОСА ТЕПЛА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ КАНАЛЕ В ЗАДАЧЕ О ТЕЧЕНИИ ПУАЗЕЙЛЯ

О.В. ГЕРМИДЕР, В.Н. ПОПОВ

Abstract. We propose an analytical solution of problem of heat transfer in a long channel with a rectangular cross section. A rarefied gas flow trough cross section is studied on the basis of Williams kinetic equation in the whole range of the Knudsen number varying from the free molecular regime to the hydrodynamic one. A wide range of the aspect ratio is considered. The heat flow is calculated as a function of a constant pressure gradient supported in the channel.

Keywords: Boltzmann kinetic equation, Williams equation, model of diffuse reflection, analytical solutions, Knudsen number.

1. Введение

Одной из наиболее важных задач динамики разреженного газа является описание внутренних течений [1], [2]. Анализ результатов, полученных для течений в щели и трубках, на концах которых поддерживаются равновесные условия, проведен в [2]. Однако в настоящее время особое внимание привлекают исследования внутренних течений разреженного газа в каналах с различной конфигурацией сечения. Например, в [3]-[5] рассматривалось течение разреженного газа в прямоугольном канале, в [6] – в канале треугольного сечения, в [7]-[10] – в цилиндрическом канале, в [11] – в канале, образованном двумя коаксиальными цилиндрами, в [12] – в канале эллиптического сечения.

Germider, O.V., Popov, V.N., Mathematical modeling of heat transfer process in a rectangular channel in the problem of Poiseuille flow.

Работа выполнена при финансировании в рамках Государственного задания "Создание вычислительной инфраструктуры для решения наукоемких прикладных задач"(Проект № 3628).

Поступила 4 июня 2016 г., опубликована 30 декабря 2016 г.

В работе [3] рассматривается стационарное течение Пуазейля разреженного газа на основе БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук) модели. В [4] вычислен массовый поток в задачах о тепловом крипе и течении Пуазейля в промежуточном режиме с применением S-модели Шахова. В [5] построены профили массовой скорости и потока тела в свободномолекулярном режиме при наличии продольного градиента температуры в канале. В [3], [4], [6]-[9], [11], [12] для описания процессов переноса в промежуточном режиме использовалось модельные уравнения с постоянной частотой столкновений. В то время более реалистичным является предположение о постоянстве длины свободного пробега молекул газа, по крайней мере, для молекул, взаимодействие которых между собой можно аппроксимировать моделью твердых сфер. Это предположение эквивалентно тому, что частота столкновений молекул должна быть пропорциональна абсолютной величине их тепловой скорости, и приводит к следующей коррекции БГК модели кинетического уравнения Больцмана [13]

$$\frac{df}{dt} + \mathbf{v}\nabla f = \frac{\omega}{\gamma l_g}(f_* - f).$$

Здесь $\omega = |\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}')|$, $\mathbf{v}$ – скорость молекул газа, $\mathbf{u}(\mathbf{r}')$ – массовая скорость газа, $\mathbf{r}'$ – размерный радиус-вектор, l_g – средняя длина свободного пробега молекул газа, $\beta = m/(2k_B T_0)$, $\gamma = 5\sqrt{\pi}/4$, m – масса молекулы газа, k_B – постоянная Больцмана, T_0 – температура газа в некоторой точке, принятой в качестве начала координат,

$$f_* = n_* \left(\frac{m}{2\pi k_B T_*}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m}{2k_B T_*}\left(\mathbf{v} - \mathbf{u}_*\right)^2\right).$$

Все основные свойства интеграла столкновений Больцмана при такой коррекции сохраняются, однако величины n_*, T_* и $\mathbf{u}_*$, входящие в f_*, уже не локальные плотность, температура и скорость, а некоторые параметры, которые выбираются из условия, что модельный интеграл столкновений удовлетворяет законам сохранения числа частиц, импульса и энергии [13]. Полученное в результате такой коррекции модельное уравнение называется БГК моделью кинетического уравнения Больцмана с частотой столкновений, зависящей от скорости, или модельным уравнением Вильямса. В рамках кинетического подхода в [10] построены профиль вектора потока тепла и поток тепла с помощью уравнения Вильямса при постоянном градиенте температуры. Полученные в [3], [7], [9], [11], [12] результаты относятся к задачам, связанным с переносом массы газа в каналах при наличии параллельного стенкам канала градиента давления. Целью представленной работы является вычисление потока тепла разреженного газа под действием продольного градиента давления в канале прямоугольного сечения в зависимости от значений числа Кнудсена. В качестве основного уравнения, описывающего кинетику процесса, в работе использовано уравнение Вильямса, а в качестве граничного условия – модель диффузного отражения.

2. Постановка задачи. Построение функции распределения

Рассмотрим прямоугольный канал со сторонами сечения a' и b', стенки которого расположены в плоскостях $x' = \pm a'/2$ и $y' = \pm b'/2$. Предположим, что в канале поддерживается постоянный градиент давления, направленный вдоль оси канала z'. Кинетическое уравнение Вильямса в выбранной системе координат запишем в виде

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x'} + v_y \frac{\partial f}{\partial y'} + v_z \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{\omega}{\gamma l_g}(f_* - f). \tag{1}$$

В качестве граничного условия на стенках канала будем использовать модель диффузного отражения молекул газа стенками канала. В этом случае [14]:

$$f^+(\mathbf{r'}_s, \mathbf{v}) = f_s(\mathbf{r}', \mathbf{v}), \quad \mathbf{vn} > 0, \tag{2}$$

где $f^+(\mathbf{r'}_s, \mathbf{v})$ – функция распределения молекул газа, отраженных от стенок канала, $f_s(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ – локально-равновесная функция распределения с параметрами, заданными на стенках, $\mathbf{n}$ – вектор нормали к стенке канала, направленный в сторону газа,

$$f_s(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = n(z') \left(\frac{m}{2\pi k_B T_0} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m}{2k_B T_0}\, \mathbf{v}^2 \right). \tag{3}$$

Рассмотрим установившееся движение газа в канале. Будем полагать, что температура стенок канала постоянна и равна T_0, а изменение давления на длине свободного пробега молекул газа является малым. В этом случае решение задачи получаем в линеаризованном виде, представляя функции f и f_* следующим образом

$$f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = f_s(\mathbf{r}', \mathbf{v})(1 + h(\mathbf{r}, \mathbf{C})), \tag{4}$$

$$f_*(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = f_s(\mathbf{r}', \mathbf{v})(1 + h_*(\mathbf{r}, \mathbf{C})), \tag{5}$$

$$h_*(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = \frac{\delta n_*}{n(z)} + 2\mathbf{C}\mathbf{U}_* + \left(C^2 - \frac{3}{2} \right) \frac{\delta T_*}{T_0}. \tag{6}$$

Здесь $\mathbf{C} = \beta^{1/2}\mathbf{v}$ – безразмерная скорость молекул газа, $\mathbf{r} = \mathbf{r}'/b'$ – безразмерный радиус-вектор, а величины n_*, T_* и $\mathbf{u}_*$, входящие в (6), находим из соотношений [14]:

$$\int \omega M_j f_* d^3\mathbf{v} = \int \omega M_j f d^3\mathbf{v}, \quad j = \overline{0,4}, \tag{7}$$

$M_0 = 1$, $M_i = m\mathbf{v}_i$ $(i = \overline{1,3})$, $M_4 = mv^2/2$.

Подставляя (4)-(6) в (1), для определения функции $h(\mathbf{r}, \mathbf{C})$ получаем уравнение в безразмерных координатах:

$$\left(C_x \frac{\partial h}{\partial x} + C_y \frac{\partial h}{\partial y} + C_z \left(\frac{\partial h}{\partial z} + G_n \right) \right) \gamma Kn + Ch(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = Ch_*(\mathbf{r}, \mathbf{C}), \tag{8}$$

где $Kn = l_g/b'$ – число Кнудсена, n_0 – концентрация молекул газа в начале координат, G_n – безразмерный градиент концентрации молекул газа:

$$G_n = \frac{b'}{n_0} \frac{dn}{dz'}.$$

Подставляя (4)-(6) в (7), находим

$$\frac{\delta n_*}{n(z)} = \frac{3}{4\pi}\int C\exp(-C^2)hd^3\mathbf{C} - \frac{1}{8\pi}\int C^3\exp(-C^2)hd^3\mathbf{C},$$
$$\frac{\delta T_*}{T_0} = \frac{1}{2\pi}\int C\exp(-C^2)hd^3\mathbf{C} - \frac{1}{4\pi}\int C^3\exp(-C^2)hd^3\mathbf{C},$$
$$\mathbf{U}_* = \frac{3}{8\pi}\int C\mathbf{C}\exp(-C^2)hd^3\mathbf{C}.$$

Таким образом, уравнение (8) перепишем в виде

$$\left(C_x\frac{\partial h}{\partial x} + C_y\frac{\partial h}{\partial y} + C_z\frac{\partial h}{\partial z} + C_zG_n(1+h(\mathbf{r},\mathbf{C}))\right)\gamma Kn + Ch(\mathbf{r},\mathbf{C}) = = \frac{C}{2\pi}\int C'\exp(-C'^2)k(\mathbf{C},\mathbf{C}')h(\mathbf{r},\mathbf{C}')d^3\mathbf{C}', \tag{9}$$

где $k(\mathbf{C},\mathbf{C}') = 1 + 3\mathbf{C}\mathbf{C}'/2 + \left(C^2-2\right)\left(C'^2-2\right)/2$.

Принимая во внимание, что в линейном приближении $p(z) = p_0(1+G_pz)$ и $n(z) = n_0(1+G_nz)$, из равенства $p(z) = n(z)k_BT(z)$ в предположении постоянства температуры, получаем $G_n = G_p$.

Решение уравнения уравнения (9) ищем в виде:

$$h(\mathbf{r},\mathbf{C}) = C_zG_p\gamma KnZ_0(x,y,C_x,C_y). \tag{10}$$

Подставляя (10) в (9), приходим к уравнению относительно $Z_0(x,y,C_x,C_y)$:

$$\left(C_x\frac{\partial Z_0}{\partial x} + C_y\frac{\partial Z_0}{\partial y}\right)\gamma Kn + CZ_0(x,y,C_x,C_y) + 1 = = \frac{3C}{4\pi}\int C'\exp(-C'^2)C_z'^2Z_0(x,y,C_x',C_y')d^3\mathbf{C}', \tag{11}$$

с граничным условием

$$Z_0(x,y,C_x,C_y)|_s = 0, \quad \mathbf{Cn} > 0. \tag{12}$$

Для нахождения решения уравнения (11) образуем на множестве функций, зависящих от модуля молекулярной скорости, скалярное произведение весом $g(C) = C^5\exp(-C^2)$:

$$(f_1,f_2) = \int_0^{+\infty} g(C)f_1(C)f_2(C)dC.$$

Раскладываем $Z_0(x,y,C_x,C_y)$ по ортогональным функциям $e_1 = 1$, $e_2 = 1/C - 3\sqrt{\pi}/8$ (ортогональность понимается здесь как равенство нулю записанного выше интеграла):

$$Z_0(x,y,C_x,C_y) = Z_1(x,y,\varphi,\sin\theta) + \left(\frac{1}{C} - \frac{3\sqrt{\pi}}{8}\right)Z_2(x,y,\varphi,\sin\theta). \tag{13}$$

При записи (13) перешли в пространстве скоростей к сферической системе координат $C_x = C\cos\varphi\sin\theta$, $C_y = C\sin\varphi\sin\theta$, $C_z = C\cos\theta$, где углы φ и θ отсчитываются от положительных направлений осей C_x и C_z, соответственно.

Подставляя (13) в (11), в силу ортогональности функций e_1, e_2 приходим к системе двух незацепленных уравнений

$$\left(\frac{\partial Z_1}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial Z_1}{\partial y}\sin\varphi\right)\gamma Kn\sin\theta + Z_1(x,y,\varphi,\sin\theta) + \frac{3\sqrt{\pi}}{8} = \\ = \frac{3}{4\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos^2\theta'\sin\theta' d\theta' \int\limits_0^{2\pi} Z_1(x,y,\varphi',\sin\theta')d\varphi', \tag{14}$$

$$\left(\frac{\partial Z_2}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial Z_2}{\partial y}\sin\varphi\right)\gamma Kn\sin\theta + Z_2(x,y,\varphi,\theta) + 1 = 0, \tag{15}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} &Z_1(x,y,\varphi,\sin\theta)|_s = 0, \quad \mathbf{Cn} > 0, \\ &Z_2(x,y,\varphi,\sin\theta)|_s = 0, \quad \mathbf{Cn} > 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Исходя из статистического смысла функции распределения, отличная от нуля компонента вектора потока тепла определяется выражением [14]:

$$q'_z(x',y') = \frac{m}{2}\int(\upsilon_z - u_z(x',y'))|\mathbf{v} - \mathbf{u}(x',y')|^2 f(\mathbf{r}',\mathbf{v})d^3\mathbf{v} = \frac{p_0}{\beta^{1/2}}q_z(x,y),$$

где безразмерная компонента вектора потока тепла:

$$q_z(x,y) = \pi^{-3/2}\int\exp\left(-C^2\right)C_z\left(C^2 - \frac{5}{2}\right)h(\mathbf{r},\mathbf{C})d^3\mathbf{C} = \\ = -\frac{G_p\gamma Kn}{4\pi^{3/2}}\int\limits_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta d\theta\int\limits_0^{2\pi} Z_2(x,y,\varphi,\sin\theta)d\varphi. \tag{17}$$

Из (17) следует, что функция $Z_1(x,y,\varphi,\sin\theta)$ не вносит вклада в вектор потока тепла. Следовательно, решение задачи сводится к отысканию функции $Z_2(x,y,\varphi,\sin\theta)$ из уравнения (15) с граничным условием (16).

Граничное условие (16) для $Z_2(x,y,\varphi,\sin\theta)$ перепишем в виде:

$$Z_2(\pm a/2, y, \varphi, \sin\theta) = 0, \quad \pm\cos\varphi < 0, \tag{18}$$

$$Z_2(x, \pm 1/2, \varphi, \sin\theta) = 0, \quad \pm\sin\varphi < 0. \tag{19}$$

где $a = a'/b'$.

Решение уравнения (15) с граничными условиями (18) и (19) находим методом характеристик [15]. Система уравнений характеристик для уравнения (18) имеет вид

$$\frac{dx}{\gamma Kn\cos\varphi\sin\theta} = \frac{dy}{\gamma Kn\sin\varphi\sin\theta} = -\frac{dZ_2}{Z_2(x,y,\varphi,\sin\theta)+1} = dt. \tag{20}$$

Получаем функцию $Z_2(x,y,\varphi,\sin\theta)$ из системы (20)

$$Z_2(x,y,\varphi,\sin\theta) = \exp(-t) - 1. \tag{21}$$

Здесь значения параметра t, учитывая граничные условия (18) и (19), находим при отражении молекул от правой стенки

$$t_1 = \frac{2x-a}{2\gamma Kn\cos\varphi\sin\theta}, \quad \varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1, \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg}\frac{2y+1}{2x-a} + \pi, \quad \varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{2y-1}{2x-a} + \pi, \tag{22}$$

при отражении молекул от верхней стенки

$$t_2 = \frac{2y-1}{2\gamma Kn\sin\varphi\sin\theta}, \quad \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2, \quad \varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{2y-1}{2x+a} + 2\pi, \tag{23}$$

при отражении молекул от левой стенки

$$t_3 = \frac{2x+a}{2\gamma Kn\cos\varphi\sin\theta}, \quad \varphi_2 \le \varphi \le \varphi_3, \quad \varphi_3 = \operatorname{arctg}\frac{2y+1}{2x+a} + 2\pi, \tag{24}$$

при отражении молекул от нижней стенки

$$t_4 = \frac{2y+1}{2\gamma Kn\sin\varphi\sin\theta}, \quad \varphi_3 \le \varphi \le \varphi_4, \quad \varphi_4 = \operatorname{arctg}\frac{2y+1}{2x-a} + 3\pi. \tag{25}$$

Соотношения (21)-(25) полностью определяют решение уравнения (15) с граничными условиями (18) и (19). Таким образом, функция распределения молекул газа построена.

3. Вычисление потока тепла в канале. Анализ полученных результатов

Подставляя построенную функцию $Z_2(x, y, \varphi, \sin\theta)$ в (17), находим отличную от нуля компоненту вектора потока тепла:

$$q_z(x,y) = \frac{G_p\gamma Kn}{3\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{3}{4\pi}\sum_{k=1}^{4}\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta d\theta\int_{\varphi_{k-1}}^{\varphi_k}\exp(-t_k)d\varphi\right). \tag{26}$$

Соответственно поток тепла через поперечное сечение канала равен [2]

$$J'_Q = \int_{-b'/2}^{b'/2}\int_{-a'/2}^{a'/2} q'_z(x',y')dx'dy' = \frac{p_0}{2\beta^{1/2}}J_Q, \tag{27}$$

где J_Q – безразмерный поток тепла:

$$J_Q = \frac{8}{a}\int_0^{1/2}\int_0^{a/2} q_z(x,y)dxdy. \tag{28}$$

Значения J_Q, найденные согласно (28) с использованием системы компьютерной алгебры Maple 17 при различных значениях числа Кнудсена и отношениях размеров сечения канала a' и b' приведены в таблице 1.

Kn	$a = a'/b'$							
	0.1	0.5	0.9	1	1.1	5	10	100
0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
0.001	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008
0.01	0.0076	0.0081	0.0082	0.0082	0.0082	0.0083	0.0083	0.0083
0.1	0.0395	0.0649	0.0699	0.0705	0.0711	0.0752	0.0758	0.0764
0.5	0.0700	0.1623	0.1984	0.2043	0.2094	0.2593	0.2673	0.2745
1	0.0799	0.2017	0.2572	0.2669	0.2756	0.3752	0.3949	0.4129
2	0.0871	0.2321	0.3048	0.3182	0.3303	0.5105	0.5323	0.5729
5	0.0931	0.2586	0.3478	0.3649	0.3804	0.6193	0.6996	0.8014
10	0.0958	0.2706	0.3678	0.3866	0.4040	0.6882	0.7990	0.9758
100	0.0990	0.2854	0.3929	0.4142	0.4340	0.7877	0.9579	1.4333
1000	0.0995	0.2878	0.3969	0.4186	0.4388	0.8059	0.9898	1.5984

Таблица 1. Значения J_Q/G_p при различных значениях a и Kn.

Приведенный поток тепла, найденный согласно (28) не зависит непосредственно от размеров сечения этого канала, а определяется их отношением $a = a'/b'$ и числом Кнудсена Kn. Для режима течения, близкого к свободномолекулярному ($Kn \gg 0$), выражение (28) можно существенно упростить. Раскладывая в ряд по малому параметру $1/Kn$ подынтегральные выражения в (28) и ограничиваясь линейными членами разложения, находим

$$J_Q = \frac{G_p}{2\sqrt{\pi}a}\int\limits_0^{1/2}\int\limits_0^{a/2}\left(\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{2x-a}{\cos\varphi}d\varphi + \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{2y-1}{\sin\varphi}d\varphi + \int\limits_{\varphi_2}^{\varphi_3}\frac{2x+a}{\cos\varphi}d\varphi + \int\limits_{\varphi_3}^{\varphi_4}\frac{2y+1}{\sin\varphi}d\varphi\right)dxdy.$$

Интегралы в последнем выражении могут быть вычислены аналитически [5]:

$$J_Q = \frac{G_p}{2\sqrt{\pi}a}\left(\ln\left(\sqrt{a^2+1}+a\right) + a\ln\left(\sqrt{\frac{1}{a^2}+1}+\frac{1}{a}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{a}{3\left(1+\sqrt{a^2+1}\right)} - \frac{a}{3\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)}\right). \tag{29}$$

При этом для $a \gg 0$ выражение (29) имеет логарифмическую особенность

$$J_Q = G_p\ln(2a)/(2\sqrt{\pi}) + G_p/(4\sqrt{\pi}), \tag{30}$$

что также совпадает с аналогичными результатами, приведенными в [4] для прямоугольного канала и для каналов с бесконечными параллельными стенками [2] в свободномолекулярном режиме. Для режимов течения, близких к гидродинамическому, анализ выражения (28) приводит к следующему результату:

$$J_Q = \frac{5G_pKn}{6}. \tag{31}$$

Таким образом, для режимов, близких к гидродинамическому, значение приведенного потока тепла не зависит от размеров сечения канала. Последнее утверждение подтверждается результатами, приведенными в таблице 1 для

$Kn \ll 0.001$. Согласно [2] в гидродинамическом режиме значение потока тепла через поперечное сечение равно нулю. При $Kn \ll 0.001$ значения потока тепла, вычисленные с помощью (28), также стремятся к нулю.

Коэффициент теплового скольжения согласно (31) равен 5/6, что совпадает со значением, найденным в [16]. В то время, как кинетическое уравнение Больцмана для молекул жестких сфер, дает значение 0.9876 [2]. Коэффициент теплового скольжения, вычисленный с помощью БГК модели равен 1.149483 [16], на основе S-модели 1.175 [17]. Таким образом, учет зависимости частоты столкновений молекул от величины модуля их скорости приводит к уменьшению погрешности при нахождении коэффициента теплового скольжения на 2% по сравнению с S-моделью. Значения J_Q/G_p, вычисленные согласно (28) и полученные в [4], приведены в таблице 2. Отличие приведенных значений потока тепла от [4] обусловлено тем фактом, что коэффициент скольжения существенно зависит от выбора модели интеграла столкновений [2].

$1/Kn$	$a = a'/b'$			
	1		10	
	J_Q/G_p		J_Q/G_p	
	[4]	(28)	[4]	(28)
0.001	0.4181	0.4186	0.9839	0.9898
0.01	0.4110	0.4142	0.9165	0.9579
0.1	0.3637	0.3866	0.6763	0.7990
0.5	0.2953	0.3182	0.3182	0.5323
1	0.2545	0.2669	0.3553	0.3949
10	0.0868	0.0705	0.0956	0.0758

Таблица 2. Значения J_Q/G_p при $a = 1$ и $a = 10$.

4. Заключение

В работе в рамках кинетического подхода решена задача о переносе тепла в канале прямоугольного сечения под действием постоянного градиента давления. Для различных значений отношений сторон этого сечения построен профиль вектора потока тепла, вычислены значения потока тепла через поперечное сечение канала в широком диапазоне изменения числа Кнудсена. Проведено сравнение с аналогичными результатами, полученными при условии, что один из размеров канала много меньше другого. Представленные в работе результаты переходят в аналогичные результаты для каналов с бесконечными параллельными стенками. Показано, что в предельных случаях, когда $Kn \ll 1$ и $Kn \gg 1$, полученные в работе результаты переходят в аналогичные для гидродинамического и свободномолекулярного режимов, соответственно.

References

[1] Yu.A. Koshmarov, Yu.A. Ryzhov, *Applied dynamics of rarified gas*, Moscow, Mashinostroenie, 1977.

[2] F.M. Sharipov, V.D. Seleznev, *Motion of Rarefied Gases in Channels and Microchannels*, UrO RAN, Yekaterinburg, 2008.

[3] V.A. Titarev, E.M. Shakhov, *Kinetic analysis of an isothermal flow in a long microchannel with rectangular cross section*, Comput. Math. Math. Phys., **50**:7 (2010), 1221–1237.

[4] F.M. Sharipov, *Rarefied gas flow through a long rectangular channel*, J. Vac. Sci. Technol. A., **17**:5 (1999), 3062–3066.

[5] O.V. Germider, V.N. Popov, A.A. Yushkanov, *Calculation of the gas mass and heat fluxes in a channel of rectangular section in the free regime*, Technical Physics, **61**:6 (2016), 835–840.

[6] S. Naris, D. Valougeorgis, *Rarefied gas flow in a triangular duct based on a boundary fitted lattice*, Eur. J. Mech. B/ Fluids, **27**: (2008), 810–822. Zbl 1151.76570

[7] C.E. Siewert, D. Valougeorgis, *An analytical discrete-ordinates solution of the S-model kinetic equations for flow in a cylindrical tube*, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf., **72** (2002), 531–550.

[8] P. Taheri, M. Bahrami, *Macroscopic description of nonequilibrium effects in thermal transpiration flows in annular microchannels*, Phys. Rev., **86** (2012), 1–9.

[9] C.H. Kamphorst, P. Rodrigues, L.B. Barichello, *A Closed-Form Solution of a Kinetic Integral Equation for Rarefied Gas Flow in a Cylindrical Duct*, Applied Mathematics, **5** (2014), 1516–1527.

[10] O.V. Germider, V.N. Popov, A.A. Yushkanov, *Mathematical modeling of heat transfer processes in a long cylindrical channel*, Zh. SVMO, **17** (2015), 22–29.

[11] V.A. Titarev, E.M. Shakhov, *Numerical analysis of the spiral Couette flow of a rarefied gas between coaxial cylinders*, Comput. Math. Math. Phys., **46** (2006), 505–513. Zbl 1210.76154

[12] I. Graur, F. Sharipov, *Gas flow through an elliptical tube over the whole range of the gas rarefaction*, European Journal of Mechanics B Fluids, **27** (2008), 335–345. Zbl 1154.76376

[13] C. Cercignani, *The method of elementary solutions for kinetic models with velocity-dependent collision frequency*, Annals of Physics, **40** (1966), 469–481.

[14] M. N. Kogan, *Rarefied gas dynamics. Kinetic theory.* Moscow, Nauka, 1967. Zbl 0173.28301

[15] P. Courant, *Partial Differential Equations*, Moscow, Mir, 1964.

[16] A. V. Latyshev, A. A. Yushkanov, *Analytic solution of boundary problems for kinetic equations*, MGOU, Moscow, 2004.

[17] C. Siewert, F. Sharipov, *Model equations in rarefied gas dynamics: viscous-slip and thermal-slip coefficients*, Phys. Fluids., **14**:12 (2002), 4123–4129. Zbl 1185.76340

Oksana Vladimirovna Germider
Northern Arctic Federal University named after M. V. Lomonosov,
Severnaya Dvina Emb., 4,
163002, Arkhangelsk, Russia
E-mail address: o.germider@narfu.ru

Vasily Nikolaevich Popov
Northern Arctic Federal University named after M. V. Lomonosov,
Severnaya Dvina Emb., 4,
163002, Arkhangelsk, Russia
E-mail address: v.popov@narfu.ru