S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 148–153 (2016) УДК 512.5

DOI 10.17377/semi.2016.13.013 MSC 13A99

НЕРАЗРЕШИМОСТЬ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ТЕОРИЙ ПОЛУРЕШЕТОК РОДЖЕРСА АНАЛИТИЧЕСКОЙ ИЕРАРХИИ

М.В. ДОРЖИЕВА

Abstract. We prove that the elementary theory of any nontrivial Rogers semilattice for analytical sets of bounded complexity is hereditarily undecidable. We also prove some results on the existence of minimal numberings in such lattices.

Keywords: analitycal hierarchy, computable numberings, minimal numberings, Rogers semilattices.

1. Введение

Изучение вычислимых нумераций в арифметической иерархии началось в середине 90-х годов по предложенному С.С.Гончаровым и А.Сорби обобщенному понятию вычислимой нумерации [2]. Изучение алгебраических свойств полурешеток Роджерса Σ^0_n-вычислимых нумераций было начато в [2], [4], [5]. В работе С. Ю. Подзорова [1] исследована структура начальных сегментов полурешетки Роджерса Σ^0_n-вычислимых нумераций. С. С. Гончаровым и С. А. Бадаевым в [3] был решен вопрос о существовании минимальных нумераций.

Согласно подходу Гончарова — Сорби можно определить понятие вычислимых нумераций в иерархии Ершова и аналитической иерархии. В работах [6], [7] исследуются минимальные и главные нумерации в аналитической иерархии. В данной работе продолжается изучение вычислимых нумераций в аналитической иерархии.

Используемые определения и обозначения можно найти в [1].

Dorzhieva, M.V., Undecidability of elementary theory of Rogers semilattices in analytical hierarchy.

Работа поддержана РФФИ (грант 14-01-31278 мол-а).

Поступила 10 апреля 2014 г., опубликована 16 марта 2016 г.

Определение 1. *Произвольное сюръективное отображение α множества натуральных чисел на непустое множество $\mathcal{A}$ называется нумерацией $\mathcal{A}$. Пусть α и β нумерации $\mathcal{A}$. Нумерация α сводится к β ($\alpha \leq \beta$), если существует вычислимая функция f, такая что $\alpha(n) = \beta(f(n))$ для любого $n \in \omega$. Нумерации α и β называются эквивалентными ($\alpha \equiv \beta$), если $\alpha \leq \beta$ и $\beta \leq \alpha$.*

Определение 2. *Нумерация семейства $\mathcal{A}$ является минимальной, если она минимальна по сводимости относительно всех нумераций семейства $\mathcal{A}$.*

Определение 3. *Нумерация α семейства $\mathcal{A}$ Π^1_{n+1}-множеств, где $n \geq 0$, называется Π^1_{n+1}-вычислимой, если $\{\langle x, y\rangle \mid x \in \alpha(y)\} \in \Pi^1_{n+1}$. Множество всех Π^1_{n+1}-вычислимых нумераций семейства $\mathcal{A}$ будем обозначать через $Com^1_{n+1}(\mathcal{A})$.*

Семейство $\mathcal{A}$, у которого $Com^1_{n+1}(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ будем называть Π^1_{n+1}-вычислимым. Отношение $\equiv$ является отношением эквивалентности на $Com^1_{n+1}(\mathcal{A})$, а отношение $\leq$ вводит частичный порядок на множестве классов эквивалентности. Класс эквивалентности нумерации α называется степенью α, обозначается символом $deg(\alpha)$. Частично упорядоченное множество $\langle Com^1_{n+1}(\mathcal{A})/\equiv, \leq\rangle$ степеней Π^1_{n+1}-вычислимых нумераций $\mathcal{A}$ будем обозначать $\mathcal{R}^1_{n+1}(\mathcal{A})$. Если $\alpha, \beta \in Com^1_{n+1}(\mathcal{A})$, то нумерация $\alpha \oplus \beta$ семейства $\mathcal{A}$ определяется так: $\alpha \oplus \beta(2n) = \alpha(n)$ и $\alpha \oplus \beta(2n+1) = \beta(n)$, и $deg(\alpha \oplus \beta)$ является наименьшей верхней гранью пары $deg(\alpha), deg(\beta)$ в $\mathcal{R}^1_{n+1}(\mathcal{A})$. Таким образом, $\mathcal{R}^1_{n+1}(\mathcal{A})$ является верхней полурешеткой. Через $\hat{\alpha}$ обозначается главный идеал полурешетки $\mathcal{R}^1_{n+1}(\mathcal{A})$, порожденный элементом $deg(\alpha)$.

Определение 4. *Верхняя полурешетка $\mathcal{R}^1_{n+1}(\mathcal{A})$ называется полурешеткой Роджерса класса аналитических нумераций $\mathcal{A}$.*

Определение 5. *Позитивная эквивалентностьЁ— это в.п. отношение эквивалентности на множестве натуральных чисел.*

Определение 6. *Для нумерации α определим ее нумерационную эквивалентность как множество $\eta_\alpha = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in N \ \&\ \alpha x = \alpha y\}$. Для произвольных нумераций α, β и натурального числа $i \geq 1$ полагаем, что $\alpha \leq^i \beta$, если существует $\emptyset^{i-1}$-вычислимая всюду определенная функция f такая, что $\alpha = \beta f$. Выражение $\alpha \equiv^i \beta$ означает, что $\alpha \leq^i \beta$ и $\beta \leq^i \alpha$. В случае $i = 1$ эти отношения совпадают с обычными отношениями сводимости и эквивалентности нумераций.*

Определение 7. *Через ε обозначается семейство всех в.п. подмножеств натурального ряда. Частично упорядоченное множество $< \varepsilon, \subseteq >$ является решеткой, конечные подмножества $\mathbb{N}$ образуют идеал этой решетки. Фактор-решетка по этому идеалу обозначается $< \varepsilon^*, \subseteq^* >$. Элемент ε^*, состоящий из конечных множеств обозначим за 0.*

Рассмотрим вопрос о существовании минимальных элементов в полурешетках Роджерса аналитической иерархии.

Теорема 1. *Пусть S— бесконечное семейство Π^1_{n+1}—множеств, α— Π^1_{n+1}-нумерация семейства S, M— максимальное множество, $\overline{M} = \{m_0 < m_1 < ... < m_k < ...\}$, $A \in S$. Тогда*

$$\alpha_A(m) = \begin{cases} \alpha(i), & \textit{если } m = m_i, \\ A, & \textit{иначе.} \end{cases} \tag{1}$$

будет минимальной Π^1_{n+1}*-вычислимой нумерацией.*

Доказательство.

Существует $0'$-вычислимая функция $p(i) = m_i$.

1. Докажем, что α_A — Π^1_{n+1}-нумерация, если α— Π^1_{n+1}-нумерация.

$\{\langle n, m\rangle \mid m \in \alpha_A(n)\} = \{\langle n, m\rangle \mid [(\forall i)((n \neq m_i) \,\&\, (m \in A))] \vee [(\exists i)((n = m_i) \,\&\, (m \in \alpha(i))]\}$.

Множества $\{\langle i, n\rangle \mid n \neq m_i\}$ и $\{\langle i, n\rangle \mid n = m_i\}$ вычислимы относительно $0'$, следовательно, Π^1_{n+1}. Так как α — Π^1_{n+1}-нумерация, то $\{\langle i, m\rangle \mid m \in \alpha(i)\}$— Π^1_{n+1}-множество.

По алгоритму Тарского — Куратовского α_A — Π^1_{n+1}-нумерация.

2. Докажем, что нумерация минимальная. Пусть β— Π^1_{n+1}-нумерация и $\beta \leq \alpha_A$, тогда по определению сводимости существует вычислимая функция g такая, что $\beta = \alpha_A g$. Наше семейство S бесконечно, следовательно, $g(N) \cap \overline{M}$ бесконечно (иначе, $g(N) \cap \overline{M}$=$\{g(n) |\ g(n) = m_i\}$ конечно, и $\beta(N)$ конечно). Множества $g(N)$ и M вычислимо перечислимы, их объединение тоже. Так как M максимальное и $M \subset M \cup g(N)$, то $N \backslash (M \cup g(N)) = \overline{M} \backslash g(N)$ конечно (так как $(M \cup g(N)) \backslash M = g(N) \cap \overline{M}$ бесконечно).

Пусть $\overline{M} \backslash g(N)$=$\{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$, рассмотрим также β-номера $\{b_0, b_1, \ldots, b_k\}$ такие, что $\alpha_A(a_i) = \beta(b_i)$, $t : N \to M$— некоторая вычислимая функция.

Зафиксируем n_0 такое, что $\beta(n_0) = A$.

Построим вычислимую функцию h, сводящую α_A к β. Если $x \in \overline{M} \backslash g(N)$, то $x = a_i$ для некоторого $0 \leq i \leq k$, тогда полагаем, $h(x) = b_i$. Если x не лежит в $\overline{M} \backslash g(N)$, то находим наименьшее j такое, что $x = t(j)$ или $x = g(j)$. Если $x = t(j)$, то полагаем, $h(x) = n_0$, если $x = g(j)$, то полагаем, $h(x) = j$.

Отсюда, если $x = t(j)$, то $x \in M$ и $\alpha_A(x) = \beta(n_0) = \beta h(x)$. Если $x = g(j)$, то $\alpha_A(x) = \alpha_A g(j) = \beta(j) = \beta h(x)$. Тогда во всех трех случаях $\alpha_A(x) = \beta h(x)$, а $h(x)$— вычислимая функция. Следовательно, α_A— минимальная нумерация. ∎

Следствие 1. *Семейство S имеет бесконечно много не сводимых друг к другу Π^1_{n+1}-вычислимых минимальных нумераций.*

Доказательство. Возьмем некоторое $B \in S$, $B \neq A$. Допустим, $\alpha_A(x) = \alpha_B(h(x))$, $x \in N$, для некоторой вычислимой функции h. Так как $\alpha_B(x) \neq A$ для всех $x \in M$, то имеем $h(\alpha_A^{-1}(A)) \subseteq \overline{M}$.

Заметим, что множество $\overline{M} \backslash h(\alpha_A^{-1}(A))$ содержит α_B-номера для любых множеств из S, отличных от A и B, таким образом, это множество бесконечно. Максимальность M влечет, что в.п. подмножество $h(M)$ множества $h(\alpha_A^{-1}(A))$ конечно. По той же причине множество $h^{-1}(h(M)) \backslash M$ α_A-номеров также конечно, поскольку $\overline{M}$ содержит бесконечное число α_A-номеров множеств из S, отличных от A. Таким образом, M вычислимо, потому что $h^{-1}(h(M))$ вычислимо. Противоречие.

Поскольку семейство S бесконечно, то оно имеет бесконечно много не сводимых друг к другу Π^1_{n+1}-вычислимых минимальных нумераций. ∎

Предложение 1. [3] Пусть F, G— непустые вычислимо перечислимые множества, β— произвольная нумерация. Тогда
1. $\beta_F \leq \beta_G$ в том и только том случае, если существует частично вычислимая функция h, для которой $\mathrm{dom}(h)=F$, $\mathrm{rng}(h)\subseteq G$ и $\forall x \in F(\beta(x) = \beta(h(x)))$;
2. если $F \subseteq G$, то $\beta_F \leq \beta_G$;
3. если $\beta_F \leq \beta_G$, то $\beta_G \equiv \beta_{F\cup G}$.

Предложение 2. [1] Пусть α— нумерация семейства S, A и B — непустые вычислимо перечислимые множества. Соотношение $\alpha_A \leq \alpha_B$ справедливо в том и только том случае, если существует позитивная эквивалентность ε такая, что
1) $\langle x, y\rangle \in \varepsilon \to \alpha(x) = \alpha(y)$;
2) $(\forall x \in A)(\exists y \in B)[\langle x, y\rangle \in \varepsilon]$.

Определение 8. *Теория T называется наследственно неразрешимой, если любая подтеория теории T той же сигнатуры неразрешима.*

Пусть n — некоторое фиксированное натуральное число, а $\mathcal{A}$ не более чем счетное семейство подмножеств натурального ряда, содержащее не менее двух элементов, для которого $Com^0_{n+2}(\mathcal{A}) \neq \emptyset$. В [1] С. Ю. Подзоров показал, что существует главный идеал в $R^0_{n+2}(\mathcal{A})$ изоморфный решетке $\langle \varepsilon^*, \subseteq^*\rangle$ или $\langle \varepsilon^* \setminus \{0\}, \subseteq^*\rangle$.

Теорема 2. [1] *Для любой нумерации $\alpha \in Com^0_{n+2}(\mathcal{A})$ существует нумерация $\beta \in Com^0_{n+2}(\mathcal{A})$, такая что $\beta \equiv^2 \alpha$ и*

1) *если $\mathcal{A}$ конечно, то $\langle \hat{\beta}, \leqslant\rangle \cong \langle \varepsilon^*, \subseteq^*\rangle$;*
2) *если $\mathcal{A}$ бесконечно, то $\langle \hat{\beta}, \leqslant\rangle \cong \langle \varepsilon^* \setminus \{0\}, \subseteq^*\rangle$.*

Этот результат был распространен и на все конструктивные предельные ординалы в работе Н. А. Баклановой [8].

Теорема 3. *Элементарная теория любой нетривиальной полурешетки Роджерса $R^1_{n+1}(S)$ является наследственно неразрешимой.*

Доказательство.
В действительности, конструкция Подзорова из [1] позволяет получить более общий результат:

Лемма 1. Пусть F— нетривиальное семейство нумераций нетривиального семейства S, замкнутое относительно $\equiv^2$-эквивалентности. Тогда для любой нумерации $\alpha \in F$ существует нумерация $\beta \in F$, такая что $\beta \equiv^2 \alpha$ и

1) если S конечно, то $\langle \hat{\beta}, \leqslant\rangle \cong \langle \varepsilon^*, \subseteq^*\rangle$;
2) если S бесконечно, то $\langle \hat{\beta}, \leqslant\rangle \cong \langle \varepsilon^* \setminus \{0\}, \subseteq^*\rangle$.

Доказательство. В доказательстве будем следовать конструкции С.Ю. Подзорова [1].
Рассмотрим последовательность W_m всех вычислимо перечислимых множеств. Пусть E— множество всех таких m, что W_m— конечно. Так как E — $0'$-перечислимое подмножество в $\mathbb{N}$, то можно считать, что $E = \bigcup\limits_{t\in\mathbb{N}} E^t$, где $E^0 \subseteq E^1 \subseteq \ldots$ — сильно $0'$-вычислимая последовательность конечных множеств.
Будем строить нумерацию β по шагам. На шаге t будем определять натуральное число k_t и значения $\beta(x)$ для всех $x \leqslant k_t$.

Без ограничения общности можно считать, что $\alpha(0) \neq \alpha(1)$.
Шаг 0. Полагаем $k_0 = 0$, $\beta(0) = \alpha(0)$.
Шаг $t+1$. *Этап 1.* Обозначим $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots$ универсальную вычислимую последовательность всех позитивных эквивалентностей. Проверим с помощью оракула $0'$ условие $(\exists x > k_t)(\exists y > k_t)[x \neq y \ \& \ \langle x, y\rangle \in \varepsilon_t]$. Если таких x, y нет, то полагаем $k'_t = k_t$ и переходим к следующему этапу. Если такие x, y найдутся, то полагаем $\beta(x) = \alpha(0)$, $\beta(y) = \alpha(1)$, $k'_t = max\{x, y\}$ и переходим к следующему этапу.
Этап 2. Найдем, используя оракул $0'$, минимальное $k > k'_t$, для которого

$$(\forall i \leqslant t)[|W_i \cap \{x : k'_t < x \leqslant k\}| \geqslant (t+1)^2 \vee i \in E^k].$$

Пусть $\{i_1 < \ldots < i_m\} = \{0, \ldots, t\} \setminus E^k$. Выберем $m(t+1)$ различных элементов $x_0^1, x_1^1, \ldots, x_t^1, x_0^2, \ldots, x_t^m$ множества $\{x : k'_t < x \leqslant k\}$ так, чтобы $x_i^l \in W_{i_l}$. Полагаем $k_{t+1} = k$, $\beta(x_j^l) = \alpha(j)$ для $j \leqslant t, 1 \leqslant l \leqslant m$, и $\beta(x) = \alpha(0)$ для всех $x \leqslant k$, для которых $\beta(x)$ еще не определено. Переходим к следующему шагу.
Корректность конструкции.
1) $\beta \equiv^2 \alpha$.
Конструкция эффективна с оракулом $0'$. С его помощью можно по любому α-индексу найти β-индекс и наоборот.
2) Если W_m бесконечно, то β_{W_m} — нумерация всего семейства S.
Пусть j произвольное натуральное число. Так как W_m бесконечно, то на шаге $t = max\{j, m\} + 1$ множество $\alpha(j)$ получит номер из W_m.
3) Для любых $k, m \in \mathbb{N}$ если β_{W_m} и β_{W_k} — нумерации одного и того же семейства, то $\beta_{W_m} \leqslant \beta_{W_k} \Leftrightarrow W_m \setminus W_k$ конечно.
Покажем достаточность. Пусть f, g — вычислимые всюду определенные функции, для которых $\rho f = W_m$, $\rho g = W_k$, и для каждого $y \in W_m \setminus W_k$ через b_y обозначается некоторый элемент множества W_k, такой что $\beta(y) = \beta(b_y)$. Построим функцию $h(x)$, сводящую β_{W_m} к β_{W_k}. Мы проверяем, лежит ли $f(x)$ в конечном множестве $W_m \setminus W_k$. Если лежит, то положим значение $h(x)$ равным $g^{-1}(b_{f(x)})$, иначе $h(x) = g^{-1}(f(x))$. Тогда $h(x)$ — вычислимая всюду определенная функция, и $\beta f = \beta g h$.
Покажем необходимость. Согласно предложению 2, существует $t \in \mathbb{N}$, такое что $\varepsilon_t \subseteq \eta_\beta$, и для каждого x из W_m отношение ε_t содержит также элемент из W_k.
Пусть множество $W_m \setminus W_k$ бесконечно. Покажем существование элементов $x \neq y$, таких что $x > k_t, y > k_t$ и $\langle x, y\rangle \in \varepsilon_t$. Если

$$(\exists x > k_t)(\exists y > k_t)[x \in W_m \setminus W_k \& y \in W_k \& \langle x, y\rangle \in \varepsilon_t],$$

то утверждение очевидно. В противном случае

$$(\forall x > k_t)[x \in W_m \setminus W_k \to (\exists y \leqslant k_t)(y \in W_k \& \langle x, y\rangle \in \varepsilon_t)].$$

Тогда в силу симметричности, транзитивности отношения ε_t и конечности элементов $y \leq k_t$

$$(\exists x > k_t)(\exists y > k_t)[x \in W_m \setminus W_k \ \& \ y \in W_m \setminus W_k \ \& \ x \neq y \ \& \ \langle x, y\rangle \in \varepsilon_t].$$

Из описания этапа 1 шага $t+1$ следует, что существуют $x, y \in \mathbb{N}$, такие что $\beta(x) \neq \beta(y)$ и $\langle x, y\rangle \in \varepsilon_t$. Но $\varepsilon_t \subseteq \eta_\beta$, что невозможно.

Пусть γ — нумерация семейства S, и $\gamma \leqslant \beta$. Тогда $\gamma = \beta f$ для некоторой вычислимой функции f. Из свойств 2 и 3 следует, что отображение $\gamma \mapsto \rho f$ определяет требуемый изоморфизм. ■

Используя тот факт, что элементарная теория ε^* является наследственно неразрешимой, получаем, что элементарная теория любой нетривиальной полурешетки Роджерса $\mathcal{R}^1_{n+1}(A)$ является наследственно неразрешимой.

■

Из леммы получим

Следствие 2. *Если семейство S бесконечно, то существует нумерация $\beta \in Com^1_{n+1}(S)$ такая, что $\hat{\beta}$ не содержит минимальных элементов.*

References

[1] S.Yu.Podzorov, *Initial segments in Rogers semilattices of Σ^0_n-computable numberings* , Algebra and Logic, **42**:2 (2003), 211–226. Zbl 1029.03033

[2] S. S. Goncharov and A. Sorbi, *Generalized computable numerations and nontrivial Rogers semilattices*, Algebra and Logic, **36**:6 (1997), 621-641. Zbl 0969.0305

[3] S. A. Badaev and S. S. Goncharov, *Rogers semilattices of families of arithmetic sets*, Algebra and Logic, **40**:5 (2001), 507-522. Zbl 0989.03040

[4] S. Badaev, S. Goncharov, S. Podzorov, A. Sorbi, *Algebraic properties of Rogers semilattices of arithmetical numberings*, In Computability and Models, S.B. Cooper and S.S. Goncharov eds.—Kluwer / Plenum Publishers, New York, 2003, 45–77.

[5] S. Badaev, S. Goncharov, A. Sorbi, *Completeness and universality of arithmetical numberings*, In Computability and Models, S.B. Cooper and S.S. Goncharov eds.— Kluwer / Plenum Publishers, New York, 2003, 11–44.

[6] M.V. Dorzhieva, *Eliminatsiya metarekursii iz teoremy Owinsa*, Vestnik NGU. Seriya: Matematika, mekhanika, informatika, **14**:1 (2014), 35–43.

[7] M.V. Dorzhieva, *Odnoznachnaya numeratsiya semeystva vsex Σ^1_2-mnozhestv*, Vestnik NGU (v pechati).

[8] N.A. Baklanova, *Nerazreshimost' elementarnykh teoriy polureshetok Rodzhersa na predel'nykh urovnyakh arifmeticheskoy ierarkhii*, Vestnik NSU. Seriya: Matematika, mekhanika, informatika, **11**:4 (2011), 3—7. Zbl 1249.03082

Marina Valerianovna Dorzhieva
Novosibirsk State University,
st. Pirogova, 2
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: dm-3004@inbox.ru