S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 154–174 (2016) УДК 514.8:517.983:519.6
DOI 10.17377/semi.2016.13.014 MSC 44A30

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО СИММЕТРИЧНОГО 2-ТЕНЗОРНОГО ПОЛЯ В ШАРЕ ПО ЕГО НОРМАЛЬНОМУ ПРЕОБРАЗОВАНИЮ РАДОНА

А.П. ПОЛЯКОВА, И.Е. СВЕТОВ

Abstract. We propose a numerical solution of reconstruction problem of a potential symmetric 2-tensor field in a ball from the known values of the normal Radon transform. The algorithm is based on the method of truncated singular value decomposition. Numerical simulations confirm that the proposed method yields good results of reconstruction of potential symmetric 2-tensor fields.

Keywords: tensor tomography, potential symmetric 2-tensor field, operator of inner differentiation, normal Radon transform, approximation, truncated singular value decomposition, orthogonal polynomials.

1. Введение

Задача компьютерной томографии состоит в восстановлении функции по ее преобразованию Радона — множеству ее интегралов вдоль прямых. Одним из обобщений задачи компьютерной томографии является задача восстановления векторных и тензорных полей по их лучевым преобразованиям или нормальному преобразованию Радона. Такие постановки естественным образом возникают в задачах физики атмосферы и океана, исследованиях неоднородных и анизотропных сред и многих других задачах, где состояние исследуемого объекта описывается не только скалярными, но и векторными, и тензорными

Polyakova, A.P., Svetov, I.E., Numerical solution of reconstruction problem of a potential symmetric 2-tensor field in a ball from its normal Radon transform.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-31491-мол_а).

Поступила 13 декабря 2015 г., опубликована 16 марта 2016 г.

полями. Методы восстановления скалярных свойств объектов по томографическим данным общеизвестны и изучены в деталях, в то время как методы решения задач векторной и тензорной томографии развиты не в полной мере.

В качестве первого примера задачи тензорной томографии можно привести задачу поляризационной томографии: по степени поляризации падающей волны и волны, прошедшей через среду, требуется определить свойства среды [1]. Строгая общая постановка задачи и ее математические аспекты исследованы в работах [2], [3], [4]. Эта задача имеет традиционные приложения в диагностике плазмы [5], фотоупругости и волоконной оптике, см. например [6], [7]. В последние два десятилетия постановки и приложения тензорной томографии претерпели существенное расширение. Возникли целые новые направления, такие как магнито-фотоупругость [8], томография тензорных полей остаточных напряжений [9], дифракционная томография деформаций [10], поляризационная томография квантового излучения [11]. Отметим некоторые интенсивно развивающиеся направления методов тензорной томографии, которые особенно успешны в биологии и медицине. Это диффузионная МРТ-томография [12], позволяющая более детально исследовать головной мозг; кросс-поляризационная оптическая когерентная томография [13], применяемая в морфологии, исследовании сосудов, диагностике рака.

Упомянем некоторые работы, посвященные численному решению задачи тензорной томографии в $\mathbb{R}^2$. В [14] предложен алгоритм, основанный на методе наименьших квадратов (МНК) с аппроксимирующей последовательностью, построенной на основе многочленов. В дальнейшем выбор аппроксимирующей последовательности полей на основе многочленов сменился B-сплайновыми аппроксимирующими последовательностями [15], [16]. Из работ, посвященных получению формул обращения для решения задачи 2-тензорной томографии в $\mathbb{R}^3$, отметим работы [17], [18].

В данной работе предлагается алгоритм численного решения задачи 2-тензорной томографии по восстановлению потенциального трехмерного симметричного 2-тензорного поля по его известному нормальному преобразованию Радона. Алгоритм основан на методе усеченного сингулярного разложения (SV-разложения) оператора нормального преобразования Радона симметричных 2-тензорных полей. Суть метода заключается в том, что оператор представляется в виде ряда по сингулярным числам и базисным элементам в пространстве образов, тогда обратный оператор будет представлять собой ряд со схожей структурой, где задействованы прообразы этих базисных элементов и те же сингулярные числа. Упомянем работу [19], в которой исследован вопрос обращения преобразования Радона симметричного 2-тензорного поля и, в частности нормального преобразования Радона. Сингулярные разложения операторов преобразования Радона [20] и продольного лучевого преобразования [21], действующих на скалярные поля в $\mathbb{R}^3$, хорошо известны. В то время как разложения операторов лучевых преобразований векторных [22] и симметричных 2-тензорных [23] полей в $\mathbb{R}^2$ и разложение оператора нормального преобразования Радона векторных полей в $\mathbb{R}^3$ [24] появились сравнительно недавно. Отметим также работы посвященные разработке, реализации и исследованию алгоритмов численного решения векторной и тензорной томографии в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ с использованием указанных выше SV-разложений [25], [26], [27].

Проведено тестирование предлагаемого алгоритма с целью определения пределов его применимости. Исследовано влияние на точность восстановления потенциального симметричного 2-тензорного поля таких факторов, как дискретизация исходных данных, гладкость восстанавливаемого поля, уровень и характер вносимого в исходные данные шума.

2. Основные определения и обозначения

Введем обозначения $B = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} < 1\}$ для единичного шара, $\partial B = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$ — для единичной сферы, $Z = \{(s, \xi) \mid \xi \in \mathbb{R}^3, |\xi| = 1, s \in \mathbb{R}\}$ — для цилиндра.

Функции будем обозначать через $f(x), g(x), \ldots$ Для потенциалов будем использовать обозначения $\phi(x), \psi(x), \ldots$ Множество симметричных m-тензорных полей $\mathbf{w}(x) = (w_{i_1 \ldots i_m}(x))$, $\mathbf{u}(x) = (u_{i_1 \ldots i_m}(x))$, $\mathbf{v}(x) = (v_{i_1 \ldots i_m}(x))$, $i_1, \ldots, i_m = 1, 2, 3$, определенных в B, обозначается $S^m(B)$. Скалярное произведение в $S^m(B)$ вводится формулой

$$\langle \mathbf{u}(x), \mathbf{v}(x) \rangle = \sum_{i_1, .., i_m = 1}^{3} u_{i_1 .. i_m}(x) v_{i_1 .. i_m}(x).$$

Функциональное пространство $L_2(S^m(B))$ состоит из интегрируемых в квадрате симметричных m-тензорных полей, определенных в B. Скалярное произведение двух тензорных полей $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ из пространства $L_2(S^m(B))$ задается формулой:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L_2(S^m(B))} = \int_B \langle \mathbf{u}(x), \mathbf{v}(x) \rangle dx.$$

Пространства Соболева для симметричных m-тензорных полей обозначим через $H^k(S^m(B))$, $H_0^k(S^m(B))$. Кроме того, мы будем использовать весовое пространство $L_2(Z, \rho)$, где $\rho(s) > 0$ задана на Z. Скалярное произведение функций f и g из $L_2(Z, \rho)$ задается формулой:

$$(f, g)_{L_2(Z, \rho)} = \int_Z f(y) g(y) \rho(y) dy.$$

Дифференциальные операторы. Мы будем использовать следующие операторы:

1) *Оператор внутреннего дифференцирования*

$$\mathrm{d} : H^k(S^m(B)) \to H^{k-1}(S^{m+1}(B)),$$

который действует на потенциал ψ и векторное поле $\mathbf{v}$ следующим образом:

$$(\mathrm{d}\psi)_i = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}, \qquad (\mathrm{d}\mathbf{v})_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

2) *Оператор ротора*

$$\mathrm{rot} : H^k(S^1(B)) \to H^{k-1}(S^1(B)),$$

который действует на векторное поле $\mathbf{w}$ по формуле

$$\mathrm{rot}\mathbf{w} = \left(\frac{\partial w_3}{\partial x_2} - \frac{\partial w_2}{\partial x_3}, \ \frac{\partial w_1}{\partial x_3} - \frac{\partial w_3}{\partial x_1}, \ \frac{\partial w_2}{\partial x_1} - \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \right).$$

3) *Оператор дивергенции*

$$\mathrm{div} : H^k(S^{m+1}(B)) \to H^{k-1}(S^m(B)),$$

который действует на тензорное поле $\mathbf{w}$ по правилу:

$$(\mathrm{div}\,\mathbf{w})_{i_1..i_m} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial w_{i_1..i_m j}}{\partial x_j}.$$

Напомним, что m-тензорное поле $\mathbf{u} \in H^k(S^m(B))$ называется *потенциальным*, если существует $(m-1)$-тензорное поле $\mathbf{v} \in H^{k+1}(S^{m-1}(B))$ (потенциал), такое что $\mathbf{u} = \mathrm{d}\mathbf{v}$. Поле $\mathbf{w} \in H^k(S^m(B))$ называется *соленоидальным*, если $\mathrm{div}\,\mathbf{w} = 0 \in H^{k-1}(S^{m-1}(B))$. Очевидно, что векторное поле $\mathbf{w} = \mathrm{rot}\mathbf{u}$ — соленоидально. Аналогично, симметричное 2-тензорное поле $\mathbf{w}$ соленоидально, если $(w_{i1}, w_{i2}, w_{i3}) = \mathrm{rot}\,\mathbf{v}^i,\ i = 1, 2, 3$ для некоторых векторных полей $\mathbf{v}^i$.

Известно [2], что имеет место единственное разложение любого симметричного m-тензорного поля $\mathbf{v} \in L_2(S^m(B))$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathrm{d}\mathbf{u}, \tag{1}$$

$$\mathbf{w} \in H^1(S^m(B)), \qquad \mathrm{div}\mathbf{w} = 0, \qquad \mathbf{u} \in H^1_0(S^{m-1}(B)). \tag{2}$$

В частности, любое трехмерное векторное поле $\mathbf{v} \in L_2(S^1(B))$ может быть единственным образом представлено в виде суммы потенциальной и соленоидальной частей

$$\mathbf{v} = \mathrm{rot}\mathbf{u} + \mathrm{d}\phi, \tag{3}$$

$$\mathbf{u} \in H^1(S^1(B)), \qquad \phi \in H^1_0(B). \tag{4}$$

Используя (1)–(2) и учитывая (3)–(4), получим более подробное разложение для симметричного 2-тензорного поля $\mathbf{v} \in L_2(S^2(B))$

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathrm{d}(\mathrm{rot}\mathbf{u}) + \mathrm{d}^2\phi,$$

где

$$\begin{aligned} &\mathbf{w} \in H^1(S^2(B)), && \mathrm{div}\mathbf{w} = 0,\\ &\mathbf{u} \in H^2(S^1(B)), && \mathrm{rot}\mathbf{u} \in H^1_0(S^1(B)),\\ &\phi \in H^2_0(B). \end{aligned}$$

Интегральные операторы. Плоскость $P_{\xi,s}$ в $\mathbb{R}^3$ задается нормальным уравнением $\langle \xi, x\rangle - s = 0$ для $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $|\xi| = 1$. Здесь $|s|$ — расстояние от плоскости до начала координат, а ξ — нормальный вектор плоскости.

Преобразование Радона $\mathcal{R}f : L_2(\mathbb{R}^3) \to L_2(Z, \rho)$ скалярной функции $f(x)$ задается формулой

$$[\mathcal{R}f](s, \xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} f(x)\,\delta(\langle \xi, x\rangle - s)\,dx = \int\limits_{P_{\xi,s}} f(x)\,dx,$$

где δ — дельта-функция.

Нормальное преобразование Радона $\mathcal{R}_m^\perp : L_2(S^m(B)) \to L_2(\mathbb{Z}, \rho)$ симметричного m-тензорного поля $\mathbf{u}(x)$ задается формулой

$$[\mathcal{R}_m^\perp \mathbf{u}](s,\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \langle \mathbf{u}(x), \xi^m \rangle \, \delta(\langle \xi, x\rangle - s)\, dx = \int\limits_{P_{\xi,s}} \langle \mathbf{u}(x), \xi^m\rangle \, dx. \tag{5}$$

В работе [24] показано, что для функции $\psi \in H_0^1(B)$ имеет место следующее равенство

$$[\mathcal{R}_1^\perp(\mathrm{d}\psi)](s,\xi) = \frac{\partial}{\partial s}[\mathcal{R}\psi](s,\xi). \tag{6}$$

Докажем, что для функции $\psi \in H_0^2(B)$ выполняется равенство

$$[\mathcal{R}_2^\perp(\mathrm{d}^2\psi)](s,\xi) = \frac{\partial^2}{\partial s^2}[\mathcal{R}\psi](s,\xi). \tag{7}$$

Действительно, в [28] показано, что для любого вектора $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ и функции $\psi \in H_0^1(B)$

$$[\mathcal{R}\langle \mathbf{a},\ \mathrm{d}\psi\rangle](s,\xi) = \langle \mathbf{a}, \xi\rangle \frac{\partial}{\partial s}[\mathcal{R}\psi](s,\xi). \tag{8}$$

Полагая $\mathbf{a} = \xi$, получим

$$\begin{aligned}
[\mathcal{R}_2^\perp(\mathrm{d}^2\psi)](s,\xi) &= \sum_{i=1}^3 \xi_i \Big[\mathcal{R}\Big\langle \xi,\ \mathrm{d}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\Big)\Big\rangle\Big](s,\xi) \overset{(8)}{=} \sum_{i=1}^3 \xi_i \langle \xi,\xi\rangle \frac{\partial}{\partial s}\Big[\mathcal{R}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\Big)\Big](s,\xi)\\
&= \sum_{i=1}^3 \xi_i |\xi|^2 \frac{\partial}{\partial s}\Big[\mathcal{R}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\Big)\Big](s,\xi) = \sum_{i=1}^3 \xi_i \frac{\partial}{\partial s}\Big[\mathcal{R}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\Big)\Big](s,\xi)\\
&= \frac{\partial}{\partial s}\Big[\sum_{i=1}^3 \xi_i \mathcal{R}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\Big)\Big](s,\xi) = \frac{\partial}{\partial s}[\mathcal{R}_1^\perp(\mathrm{d}\psi)](s,\xi) \overset{(6)}{=} \frac{\partial^2}{\partial s^2}[\mathcal{R}\psi](s,\xi).
\end{aligned}$$

Это свойство понадобится в дальнейшем для нахождения образов базисных симметричных 2-тензорных полей под действием оператора нормального преобразования Радона.

Известно [24], что

$$[\mathcal{R}_1^\perp(\operatorname{rot}\mathbf{w})](s,\xi) = 0, \qquad \mathbf{w} \in H_0^1(S^1(B)). \tag{9}$$

То есть, ядро оператора нормального преобразования Радона, действующего на векторные поля, состоит из соленоидальных векторных полей $\mathrm{rot}\mathbf{w}$ с потенциалом $\mathbf{w} \in H_0^1(S^1(B))$. По известному нормальному преобразованию Радона векторного поля можно восстановить лишь его потенциальную часть.

Определим ядро оператора нормального преобразования Радона, действующего на симметричные 2-тензорные поля. Вычислим нормальное преобразование Радона $\mathcal{R}_2^\perp$ от соленоидального симметричного 2-тензорного поля $\mathbf{w}$. Так как $\operatorname{div}\mathbf{w} = 0$ имеют место равенства

$$(w_{i1}, w_{i2}, w_{i3}) = \operatorname{rot}\mathbf{u}^i, \qquad i = 1,2,3,$$

где $\mathbf{u}^i$, $i = 1,2,3$ — некоторые векторные поля. Пусть $\mathbf{u}^i \in H^2(S^1(B)) \cup H_0^1(S^1(B))$, $i = 1,2,3$. Используя определение (5) и свойство (9) нормального преобразования Радона векторного поля, получим

$$[\mathcal{R}_2^\perp \mathbf{w}](s,\xi) = \int\limits_{P_{\xi,s}} \sum_{i,j=1}^3 w_{ij}\xi_i\xi_j\,dx = \sum_{i=1}^3 \xi_i \int\limits_{P_{\xi,s}} \sum_{j=1}^3 w_{ij}\xi_j\,dx$$
$$= \sum_{i=1}^3 \xi_i [\mathcal{R}_1^\perp(\operatorname{rot}\mathbf{u}^i)](s,\xi) \overset{(9)}{=} 0.$$

Теперь вычислим нормальное преобразование Радона $\mathcal{R}_2^\perp$ от потенциального симметричного 2-тензорного поля $\mathbf{w} = \mathrm{d}(\operatorname{rot}\mathbf{v})$. Введем векторные поля

$$\widetilde{\mathbf{u}}^i = \Big(\frac{\partial v_1}{\partial x_i}, \frac{\partial v_2}{\partial x_i}, \frac{\partial v_3}{\partial x_i}\Big), \qquad \widetilde{\mathbf{u}}^i\big|_{\partial B} = 0, \qquad i = 1,2,3.$$

Используя определение (5) и свойство (9) нормального преобразования Радона векторного поля, получим

$$[\mathcal{R}_2^\perp \mathbf{w}](s,\xi) = \int\limits_{P_{\xi,s}} \sum_{i,j=1}^3 w_{ji}\xi_j\xi_i\,dx$$
$$= \int\limits_{P_{\xi,s}} \Big[\Big(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1\partial x_2} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1\partial x_3}\Big)\xi_1\xi_1 + \Big(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2\partial x_3} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1\partial x_3} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2}\Big)\xi_1\xi_2$$
$$+ \Big(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2\partial x_3} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1\partial x_2}\Big)\xi_1\xi_3 + \Big(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2\partial x_3} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1\partial x_2}\Big)\xi_2\xi_2$$
$$+ \Big(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1\partial x_3} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1\partial x_2} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}\Big)\xi_2\xi_3 + \Big(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1\partial x_3} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2\partial x_3}\Big)\xi_3\xi_3\Big]\,dx$$
$$= \sum_{i=1}^3 \xi_i \int\limits_{P_{\xi,s}} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\Big(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\Big)\xi_1 + \Big(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\Big)\xi_2 + \Big(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\Big)\xi_3\Big]\,dx$$
$$= \sum_{i=1}^3 \xi_i [\mathcal{R}_1^\perp(\operatorname{rot}\widetilde{\mathbf{u}}^i)](s,\xi) \overset{(9)}{=} 0.$$

Таким образом получили, что ядро оператора нормального преобразования Радона, действующего на симметричные 2-тензорные поля, состоит из любых линейных комбинаций следующих двух типов полей:

1) соленоидальные симметричные 2-тензорные поля $\mathbf{w}$ такие, что $(w_{i1}, w_{i2}, w_{i3}) = \operatorname{rot}\mathbf{u}^i$, $i = 1,2,3$, где $\mathbf{u}^i \in H^2(S^1(B)) \cup H_0^1(S^1(B))$, $i = 1,2,3$;

2) потенциальные симметричные 2-тензорные поля вида $\mathbf{w} = \mathrm{d}(\operatorname{rot}\mathbf{v})$ такие, что $\mathbf{v} \in H^2(S^1(B)) \cup H_0^1(S^1(B))$.

По известному нормальному преобразованию Радона симметричного 2-тензорного поля можно восстановить лишь его потенциальную часть вида $\mathrm{d}^2\psi$, $\psi \in H^2(B)$.

Постановка задачи. Пусть в единичном шаре распределено некоторое потенциальное симметричное 2-тензорное поле вида $\mathrm{d}^2\phi \in L_2(S^2(B))$, $\phi \in H_0^2(B)$. Требуется по его известному нормальному преобразованию Радона $[\mathcal{R}_2^\perp(\mathrm{d}^2\phi)]$ найти это поле.

В данной работе для численного решения поставленной задачи будет использоваться алгоритм, основанный на методе усеченного сингулярного разложения оператора нормального преобразования Радона, действующего на симметричные 2-тензорные поля. Ортонормированный потенциальный базис строится на основе полиномов Якоби и сферических функций.

Ортогональные многочлены. Напомним определения и некоторые свойства ортогональных многочленов, необходимых для построение сингулярного разложения нормального преобразования Радона и численной реализации предлагаемого алгоритма.

Полиномы Якоби $P_n^{(p,q)}(t)$ степени n с индексами (p,q), заданные на отрезке $[0,1]$, определяются явной формулой

$$P_n^{(p,q)}(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k \frac{(p+n)(p+n+1)\dots(p+n+k-1)}{q(q+1)\dots(q+k-1)} t^k,$$

где C_n^k — биномиальные коэффициенты. Для вычисления значений этих многочленов высоких степеней удобно использовать рекуррентное соотношение

$$(n+p)(n+q)(2n+p-1)P_{n+1}^{(p,q)}(t) + n(n+p-q)(2n+p+1)P_{n-1}^{(p,q)}(t)$$
$$+(2n+p)\big[(2n+p)^2 t - t - 2n^2 - 2np - pq + q\big] P_n^{(p,q)}(t) = 0.$$

На отрезке $[0,1]$ эти полиномы ортогональны с весом $t^{q-1}(1-t)^{p-q}$, т.е. при $n \neq m$ имеет место равенство

$$\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-q}\, P_n^{(p,q)}(t)\, P_m^{(p,q)}(t)\, dt = 0.$$

Первая и вторая производные полинома Якоби вычисляются по формулам

$$\left(P_n^{(p,q)}\right)'(t) = -\frac{n(n+p)}{q} P_{n-1}^{(p+2,q+1)}(t),$$
$$\left(P_n^{(p,q)}\right)''(t) = \frac{n(n-1)(n+p)(n+p+2)}{q(q+1)} P_{n-2}^{(p+4,q+2)}(t).$$

Полиномы Гегенбауэра $C_n^{(\mu)}(t)$ степени n с индексом μ задаются явной формулой

$$C_n^{(\mu)}(t) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{\Gamma(n-k+\mu)}{\Gamma(\mu)\, k!\, (n-2k)!} (2t)^{n-2k},$$

где $\Gamma(\alpha)$ — Гамма-функция, а $[\,\cdot\,]$ — целая часть числа. Многочлены Гегенбауэра удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению, которое можно использовать для построения полиномов с $n \geq 2$:

$$C_n^{(\mu)}(t) = \frac{1}{n}\left(2t(n+\mu-1)C_{n-1}^{(\mu)}(t) - (n+2\mu-2)C_{n-2}^{(\mu)}(t)\right).$$

На отрезке $[-1,1]$ полиномы Гегенбауэра ортогональны с весом $(1-t^2)^{\mu-1/2}$.

Полиномы Лежандра $L_k(t)$ степени k представляют собой частный случай полиномов Гегенбауэра: $L_k(t) = C_k^{(0.5)}(t)$. Первая производная полинома Лежандра вычисляется по формуле

$$\frac{d}{dt}L_k(t) = \frac{k}{1-t^2}\big(L_{k-1}(t) - tL_k(t)\big).$$

Производные более высоких порядков могут быть найдены по рекуррентным формулам

$$(1-t^2)\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}L_k(t) - 2mt\frac{d^m}{dt^m}L_k(t) + (k+m)(k-m+1)\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}L_k(t) = 0.$$

Присоединенный полином Лежандра $L_{kl}(t)$ степени k с целым индексом $l = 0, \dots, k$ определяется через полином Лежандра: $L_{kl}(t) = (1-t^2)^{l/2}\dfrac{d^l}{dt^l}L_k(t)$. Приведем явную формулу для вычисления значений этих полиномов

$$L_{kl}(t) = \frac{(1-t^2)^{l/2}}{k!\,2^k}\sum_{m=[(k+l+1)/2]}^{k}\frac{(-1)^{k-m}C_k^m\,(2m)!}{(2m-k-l)!}t^{2m-k-l}.$$

На отрезке $[-1,1]$ присоединенные полиномы Лежандра ортогональны.

Сферическая функция Y_{kl} порядка k с целым индексом $l = -k, \dots, k$ определяется формулой

$$Y_{kl}(\theta,\varphi) = L_{k|l|}(\cos\theta)\cdot\begin{cases}\cos l\varphi, & l \geq 0,\\ \sin|l|\varphi, & l < 0.\end{cases}$$

Сферические функции ортогональны на единичной сфере. Норма сферической функции вычисляется по формуле

$$\|Y_{kl}\| = \begin{cases}\sqrt{\frac{4\pi}{2k+1}}, & l = 0,\\ \sqrt{\frac{2\pi}{2k+1}\,\frac{(k+|l|)!}{(k-|l|)!}}, & l \neq 0.\end{cases}$$

Производные первого и второго порядков сферических функций вычисляются по формулам:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}Y_{kl}(\theta,\varphi) = -l\,Y_{k(-l)}(\theta,\varphi);$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}Y_{kl}(\theta,\varphi) = \big(-L_{k(|l|+1)}(\cos\theta) + |l|\operatorname{ctg}\theta L_{k|l|}(\cos\theta)\big)\cdot\begin{cases}\cos l\varphi, & l \geq 0,\\ \sin|l|\varphi, & l < 0;\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}Y_{kl}(\theta,\varphi) = -l^2\,Y_{kl}(\theta,\varphi);$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\theta}Y_{kl}(\theta,\varphi) = l\big(L_{k(|l|+1)}(\cos\theta) - |l|\operatorname{ctg}\theta L_{k|l|}(\cos\theta)\big)\cdot\begin{cases}\sin l\varphi, & l \geq 0,\\ \cos|l|\varphi, & l < 0;\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}Y_{kl}(\theta,\varphi) = \Bigg(L_{k(|l|+2)}(\cos\theta) - (2|l|+1)\operatorname{ctg}\theta L_{k(|l|+1)}(\cos\theta) + \Big(l^2\operatorname{ctg}^2\theta - \frac{|l|}{\sin^2\theta}\Big)L_{k|l|}(\cos\theta)\Bigg)\cdot\begin{cases}\cos l\varphi, & l \geq 0,\\ \sin|l|\varphi, & l < 0.\end{cases}$$

Гармонические полиномы $H_{kl}(x)$ степени k с целым индексом $l = -k, \dots, k$ в сферической системе координат имеют вид

$$H_{kl}(r,\theta,\varphi) = r^kY_{kl}(\theta,\varphi).$$

3. Сингулярное разложение нормального преобразования Радона

Базисные потенциальные симметричные 2-тензорные поля в исходном пространстве $L_2(S^2(B))$ будем строить методом потенциалов, т.е. выбираем базисную систему функций в пространстве потенциалов $H_0^2(B)$ и далее, применяя дифференциальный оператор d^2, образуем из нее 2-тензорный потенциальный базис в исходном пространстве $L_2(S^2(B))$. За основу исходной базисной системы потенциалов выбираются полиномы следующего вида:

$$\Phi_{kln}(x) = \lambda_{kln}(1-|x|^2)^2\, H_{kl}(x)\, P_n^{(k+3.5,k+1.5)}(|x|^2),$$
$$k,n = 0,1,2,\ldots,\quad l=-k,\ldots k,$$

или то же самое в сферической системе координат,

$$\Phi_{kln}(r,\theta,\varphi) = \lambda_{kln}(1-r^2)^2\, r^k\, P_n^{(k+3.5,k+1.5)}(r^2)\, Y_{kl}(\theta,\varphi).$$

Применяя к нашим потенциалам оператор d^2, получим семейство базисных потенциальных симметричных 2-тензорных полей

$$\mathbf{T}_{kln}(x) = \mathrm{d}^2\Phi_{kln}(x), \qquad k,n=0,1,2,\ldots,\quad l=-k,\ldots,k. \tag{10}$$

Константу λ_{kln} выбираем так, чтобы поля $\mathbf{T}_{kln}$ имели единичную норму:

$$\lambda_{kln} = \frac{\Gamma(n+k+1.5)}{(n+2)!\Gamma(k+1.5)\|Y_{kl}\|}\sqrt{\frac{2n+k+3.5}{8}}.$$

Утверждение 1. *Система потенциальных симметричных 2-тензорных полей (10) является ортонормированной системой в пространстве $L_2(S^2(B))$.*

Данное утверждение проверено для симметричных 2-тензорных полей (10) степени $N = 2n+k+2 \leqslant 50$ с использованием пакета программ Wolfram Mathematica 9.

Для вычисления образов базисных полей нам потребуется теорема, которая была сформулирована и доказана в работе [20]. В указанной статье рассмотрен случай пространства произвольной размерности, однако мы приведем ее формулировку для случая размерности 3.

Предложение 2. *Пусть*

$$\Psi(s,\theta,\varphi) = (1-s^2)^{\nu-0.5}\; C_{2n+k}^{(\nu)}(s)\; Y_{kl}(\theta,\varphi),$$

где $\nu > 0.5$, k, $n \geq 0$, $l=-k,\ldots,k$. *Тогда*

$$\Phi(r,\theta,\varphi) = \mathcal{R}^{-1}\Psi = c(n,k,\nu)\left(1-r^2\right)^{\nu-1.5}\; r^k\; P_n^{(k+\nu,k+1.5)}(r^2)\; Y_{kl}(\theta,\varphi),$$

где $c(n,k,\nu) = \dfrac{(-1)^n\; 2^{1-2\nu}\Gamma(2n+k+2\nu)\Gamma(k+n+1.5)}{\sqrt{\pi}(2n+k)!\Gamma(\nu)\;\Gamma(n+\nu-0.5)\Gamma(k+1.5)}$.

Теорема 3. *Образы потенциальных симметричных 2-тензорных полей (10) под действием оператора нормального преобразования Радона имеют вид*

$$[\mathcal{R}_2^{\perp}\mathbf{T}_{kln}](s,\,\theta,\,\varphi) = b_{kln}(1-s^2)C_{2n+k+2}^{(1.5)}(s)Y_{kl}(\theta,\varphi),$$
$$k,n=0,1,2,\ldots,\quad l=-k,\ldots,k,$$

где

$$b_{kln} = \frac{(-1)^n 4\pi}{(2n+k+3)(2n+k+4)\|Y_{kl}\|}\sqrt{\frac{2n+k+3.5}{2}}.$$

Доказательство. Используя свойство оператора нормального преобразования Радона (7) и Предложение 2 при $\nu = 3.5$, имеем

$$\begin{aligned}[\mathcal{R}_2^{\perp}\mathbf{T}_{kln}](s,\theta,\varphi) &= \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left[\mathcal{R}\Phi_{kln}\right](s,\theta,\varphi)\\ &= \frac{\lambda_{kln}}{c(k,n,3.5)}Y_{kl}(\theta,\varphi)\frac{\partial^2}{\partial s^2}\big((1-s^2)^3\,C^{(3.5)}_{2n+k}(s)\big).\end{aligned}$$

Для вычисления производных потребуются следующие соотношения:

$$(1-t^2)\frac{\partial}{\partial t}C_n^{(\mu)}(t) = (n+2\mu)tC_n^{(\mu)}(t) - (n+1)C_{n+1}^{(\mu)}(t), \tag{11}$$

$$(n+2\mu)C_n^{(\mu)}(t) - 2\mu\left(C_n^{(\mu+1)}(t) - tC_{n-1}^{(\mu+1)}(t)\right) = 0. \tag{12}$$

Вычисляем первую производную по s

$$\begin{aligned}\Big((1-s^2)^3\,C^{(3.5)}_{2n+k}(s)\Big)' &= (1-s^2)^2\left(-6sC^{(3.5)}_{2n+k}(s) + (1-s^2)\left(C^{(3.5)}_{2n+k}(s)\right)'\right)\\ &\overset{(11)}{=} (1-s^2)^2(2n+k+1)\left(sC^{(3.5)}_{2n+k}(s) - C^{(3.5)}_{2n+k+1}(s)\right)\\ &\overset{(12)}{=} -\frac{(2n+k+1)(2n+k+6)}{5}(1-s^2)^2C^{(2.5)}_{2n+k+1}(s).\end{aligned}$$

Имеем

$$\Big((1-s^2)^3\,C^{(3.5)}_{2n+k}(s)\Big)'' = -\frac{(2n+k+1)(2n+k+6)}{5}\left((1-s^2)^2C^{(2.5)}_{2n+k+1}(s)\right)',$$

где

$$\begin{aligned}\Big((1-s^2)^2\,C^{(2.5)}_{2n+k+1}(s)\Big)' &= (1-s^2)\left(-4sC^{(2.5)}_{2n+k+1}(s) + (1-s^2)\left(C^{(2.5)}_{2n+k+1}(s)\right)'\right)\\ &\overset{(11)}{=} (1-s^2)(2n+k+2)\left(sC^{(2.5)}_{2n+k+1}(s) - C^{(2.5)}_{2n+k+2}(s)\right)\\ &\overset{(12)}{=} -\frac{(2n+k+2)(2n+k+5)}{3}(1-s^2)C^{(1.5)}_{2n+k+2}(s).\end{aligned}$$

Таким образом получили

$$\begin{aligned}[\mathcal{R}_2^{\perp}\mathbf{T}_{kln}](s,\theta,\varphi) =& \frac{\lambda_{kln}(2n+k+1)(2n+k+2)(2n+k+5)(2n+k+6)}{15\,c(k,n,3.5)}\times\\ &\times(1-s^2)C^{(1.5)}_{2n+k+2}(s)Y_{kl}(\theta,\varphi)\\ &= b_{kln}(1-s^2)C^{(1.5)}_{2n+k+2}(s)Y_{kl}(\theta,\varphi).\end{aligned}$$

Теорема 4. *Система функций*

$$\begin{aligned}G_{kln}(s,\,\theta,\,\varphi) = \frac{(-1)^n\sqrt{2n+k+3.5}}{\sqrt{(2n+k+3)(2n+k+4)}\|Y_{kl}\|}(1-s^2)C^{(1.5)}_{2n+k+2}(s)Y_{kl}(\theta,\varphi),\\ k,n=0,1,2,\ldots,\quad l=-k,\ldots,k,\end{aligned}$$

является ортонормированной системой в пространстве $L_2(Z,(1-s^2)^{-1})$.

Доказательство. Ортогональность системы функций $G_{kln}(s,\,\theta,\,\varphi)$ следует из ортогональности сферических функций и ортогональности полиномов

Гегенбауэра

$$\int\limits_{-1}^{1} C_{m_1}^{(\mu)}(s) C_{m_2}^{(\mu)}(s)(1-s^2)^{\mu-1/2} ds = \frac{\pi 2^{1-2\mu}\Gamma(m_1+2\mu)}{m_1!(m_1+\mu)\Gamma(\mu)\Gamma(\mu)}\delta_{m_1 m_2}, \tag{13}$$

где $\delta_{m_1 m_2}$ — символ Кронекера. Используя формулу (13), имеем

$$\begin{aligned}\|G_{kln}\|_{L_2(Z,(1-s^2)^{-1})} =& \frac{\sqrt{2n+k+3.5}}{\sqrt{(2n+k+3)(2n+k+4)}\|Y_{kl}\|}\times \\ & \times \left(\int\limits_{-1}^{1}\left((1-s^2)C_{2n+k+2}^{(1.5)}(s)\right)^2 (1-s^2)^{-1} ds\right)^{1/2} \|Y_{kl}\| \\ =& \frac{\sqrt{2n+k+3.5}}{\sqrt{(2n+k+3)(2n+k+4)}}\times \\ & \times \left(\frac{\pi 2^{-2}\Gamma(2n+k+5)}{(2n+k+2)!(2n+k+3.5)\Gamma(1.5)\Gamma(1.5)}\right)^{1/2} = 1.\end{aligned}$$

Из Теоремы 3 и определения функций G_{kln} следуют равенства:

$$[\mathcal{R}_2^{\perp}\mathbf{T}_{kln}](s,\,\theta,\,\varphi) = \sigma_{kn} G_{kln}(s,\,\theta,\,\varphi), \qquad k,n = 0,1,2,\ldots, \quad l=-k,\ldots,k.$$

Числа

$$\sigma_{kn} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{(2n+k+3)(2n+k+4)}}$$

являются сингулярными числами оператора нормального преобразования Радона. Таким образом верно следующее утверждение.

Утверждение 5. *Сингулярное разложение оператора нормального преобразования Радона* $\mathcal{R}_2^{\perp} : L_2(S^2(B)) \to L_2(Z,(1-s^2)^{-1})$ *имеет вид*

$$g(s,\theta,\varphi) := [\mathcal{R}_2^{\perp}\mathbf{w}](s,\theta,\varphi) = \sum_{k,n=0}^{\infty}\sum_{l=-k}^{k}\sigma_{kn}\left(\mathbf{w},\mathbf{T}_{kln}\right)_{L_2(S^2(B))} G_{kln}(s,\theta,\varphi),$$

а обратный оператор вычисляется по формуле

$$\mathbf{w}(x) = \left((\mathcal{R}_2^{\perp})^{-1}g\right)(x) = \sum_{k,n=0}^{\infty}\sum_{l=-k}^{k}\sigma_{kn}^{-1}(g,G_{kln})_{L_2(Z,(1-s^2)^{-1})}\mathbf{T}_{kln}(x).$$

4. Алгоритм приближенного восстановления потенциального симметричного 2-тензорного поля

Оператор $(\mathcal{R}_2^{\perp})^{-1}$, обратный для оператора нормального преобразования Радона $\mathcal{R}_2^{\perp}$, не ограничен, так как $\sigma_{kn}^{-1} \to +\infty$ при $n\to\infty$ или $k\to\infty$. Оператор $(\mathcal{R}_2^{\perp})^{-1}$ можно регуляризовать с помощью усеченного сингулярного разложения. Пусть N — максимальная степень базисного потенциального симметричного 2-тензорного поля. Формула для приближенного вычисления обратного оператора нормального преобразования Радона имеет вид:

$$T_{N} g = \sum_{k,n=0}^{k+2n+2\leqslant N}\sum_{l=-k}^{k}\sigma_{kn}^{-1}\left(g,G_{kln}\right)_{L_2(Z,(1-s^2)^{-1})}\mathbf{T}_{kln} \approx \left(\mathcal{R}_2^{\perp}\right)^{-1} g, \tag{14}$$

где g — известные значения нормального преобразования Радона от восстанавливаемого симметричного 2-тензорного поля. Для нормы оператора (14) имеет место равенство

$$\|T_{_N}\| = \max_{k+2n+2\leqslant N} \sigma_{kn}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(N+1)(N+2)}{2}}.$$

Отметим, что количество базисных полей, участвующих в сумме вплоть до степени N, вычисляется по формуле: $\frac{N(N^2-1)}{6}$.

Введем оператор

$$(T_{_N})^{-1}\mathbf{w} \;\; = \sum_{k,n=0}^{k+2n+2\leqslant N} \sum_{l=-k}^{k} \sigma_{kn}\,(\mathbf{w}, \mathbf{T}_{kln})_{L_2(S^2(B))}\, G_{kln} \approx \mathcal{R}_2^{\perp}\mathbf{w}.$$

Известно (см. [29], [30]), что решение уравнения

$$(T_{_N})^{-1}u = f$$

численно устойчиво, если параметр зазора между двумя соседними сингулярными числами, тем, которое участвует в усеченном сингулярном разложении, и тем, которое отбрасывается, не слишком велик. Для оператора $(T_{_N})^{-1}$ параметр зазора вычисляется по формуле

$$d_{_N} = \frac{\sqrt{(N+1)(N+2)(N+3)}}{2\sqrt{3}(\sqrt{N+3}-\sqrt{N+1})}.$$

Алгоритм численного решения задачи восстановления потенциального трехмерного симметричного 2-тензорного поля по его известному нормальному преобразованию Радона основан на усеченном сингулярном разложении (14). Опишем подробно особенности численной реализации предлагаемого алгоритма.

1) Дискретизация значений переменных s, θ, φ. Задавая натуральное L, получаем дискретные последовательности

$$s_i, \quad i=-L+1,\dots,L-1; \quad \theta_j, \quad j=-L/2,\dots,L/2; \quad \varphi_k, \quad k=0,\dots,2L-1$$

для переменных s, θ, φ. При этом $\Delta s = 1/L$, $\Delta\theta = \Delta\varphi = \pi/L$. Задание s_i, θ_j, φ_k означает фиксацию вектора $\xi_{jk} = (\cos\varphi_k \sin\theta_j,\, \sin\varphi_k \sin\theta_j,\, \cos\theta_j)$, ортогонального плоскости P_{ξ_{jk},s_i}, по которой ведется интегрирование. В численных экспериментах использовались дискретизации $100\times 50\times 100$ и $200\times 100\times 200$ по (s,θ,φ).

2) Вычисление интегралов по плоскостям. Интегралы по плоскостям $P_{\xi,s}$ могут быть вычислены аналитически или численно. Эта часть является основой для следующих этапов алгоритма восстановления векторного поля, и поэтому при численном вычислении интегралов расчеты проводились с высокой степенью точности. При вычислении нормального преобразования Радона (5) для восстанавливаемого поля, заключающемся в интегрировании по плоскости, использовалась пятиточечная квадратурная формула Ньютона-Котеса закрытого типа для каждого из двух измерений

$$\int\limits_{t_0}^{t_4} F(t)\,dt \approx \frac{\Delta t}{45}\big(14\,F(t_0) + 64\,F(t_1) + 24\,F(t_2) + 64\,F(t_3) + 14\,F(t_4)\big). \tag{15}$$

На каждом шаге вычисления преобразования (5) контролировались условия выхода луча за пределы круга радиуса $\sqrt{1-s^2}$.

3) Вычисление значений многочленов. Значения полиномов Якоби, Гегенбауэра и Лежандра вычислялись с использованием рекуррентных соотношений. При $0 < l \le k/2$ производные полиномов Лежандра, участвующие в определении присоединенных полиномов Лежандра, вычислялись по рекуррентным соотношениям. В то время как при $l > k/2$ значения присоединенных полиномов Лежандра вычислялись по явной формуле.

4) Вычисление значений компонент базисных полей. Введем для краткости обозначения:

$$P := P_n^{(k+3.5,k+1.5)}(r^2), \quad P' := \frac{\partial P_n^{(k+3.5,k+1.5)}}{\partial(r^2)}(r^2), \quad P'' := \frac{\partial^2 P_n^{(k+3.5,k+1.5)}}{\partial(r^2)^2}(r^2),$$

$$Y := Y_{kl}(\varphi,\theta), \qquad Y'_\varphi := \frac{\partial Y_{kl}}{\partial\varphi}(\varphi,\theta), \qquad Y'_\theta := \frac{\partial Y_{kl}}{\partial\theta}(\varphi,\theta),$$

$$Y''_{\varphi\varphi} := \frac{\partial^2 Y_{kl}}{\partial\varphi^2}(\varphi,\theta), \qquad Y''_{\varphi\theta} := \frac{\partial^2 Y_{kl}}{\partial\varphi\partial\theta}(\varphi,\theta), \qquad Y''_{\theta\theta} := \frac{\partial^2 Y_{kl}}{\partial\theta^2}(\varphi,\theta).$$

Значения компонент базисных симметричных 2-тензорных полей вычислялись по формулам (в полярной системе координат)

$$\begin{aligned}\big(\mathbf{T}_{kln}\big)_{ij}(r,\theta,\varphi) = \lambda_{kln}\Big(&\big(2A_{ij}r^{k+2} - 2B_{ij}(1-r^2)r^k + C_{ij}(1-r^2)^2 r^{k-2}\big)P\\ &+ \big(-4A_{ij}(1-r^2)r^{k+2} + B_{ij}(1-r^2)^2 r^k\big)P'\\ &+ A_{ij}(1-r^2)^2 r^{k+2}P''\Big),\\ i,j = 1,2,3,&\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}A_{11} &= Y\left(4\cos^2\varphi\sin^2\theta\right),\\ B_{11} &= Y\left(4k\cos^2\varphi\sin^2\theta + 2\right) + Y'_\varphi\left(-2\sin 2\varphi\right) + Y'_\theta\left(2\cos^2\varphi\sin 2\theta\right),\\ C_{11} &= Y\left(k(k-2)\cos^2\varphi\sin^2\theta + k\right) + Y'_\varphi\left(\sin 2\varphi(\operatorname{ctg}^2\theta - k + 1)\right)\\ &\quad + Y''_{\varphi\varphi}\left(\sin^2\varphi(1+\operatorname{ctg}^2\theta)\right) + Y'_\theta\left((k-1)\cos^2\varphi\sin 2\theta + \sin^2\varphi\operatorname{ctg}\theta\right)\\ &\quad + Y''_{\varphi\theta}\left(-\sin 2\varphi\operatorname{ctg}\theta\right) + Y''_{\theta\theta}\left(\cos^2\varphi\cos^2\theta\right);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_{12} = A_{21} &= Y\left(2\sin 2\varphi\sin^2\theta\right),\\ B_{12} = B_{21} &= Y\left(2k\sin 2\varphi\sin^2\theta\right) + Y'_\varphi\left(2\cos 2\varphi\right) + Y'_\theta\left(\sin 2\varphi\sin 2\theta\right),\\ C_{12} = C_{21} &= Y\left(k(k-2)\sin 2\varphi\sin^2\theta/2\right) + Y'_\varphi\left(\cos 2\varphi(k-1-\operatorname{ctg}^2\theta)\right)\\ &\quad + Y''_{\varphi\varphi}\left(-\sin 2\varphi(1+\operatorname{ctg}^2\theta)/2\right) + Y'_\theta\left(\sin 2\varphi((k-1)\sin 2\theta - \operatorname{ctg}\theta)/2\right)\\ &\quad + Y''_{\varphi\theta}\left(\cos 2\varphi\operatorname{ctg}\theta\right) + Y''_{\theta\theta}\left(\sin 2\varphi\cos^2\theta/2\right);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_{22} &= Y\left(4\sin^2\varphi\sin^2\theta\right),\\ B_{22} &= Y\left(4k\sin^2\varphi\sin^2\theta + 2\right) + Y'_\varphi\left(2\sin 2\varphi\right) + Y'_\theta\left(2\sin^2\varphi\sin 2\theta\right),\\ C_{22} &= Y\left(k(k-2)\sin^2\varphi\sin^2\theta + k\right) + Y'_\varphi\left(\sin 2\varphi(k-1-\operatorname{ctg}^2\theta)\right)\\ &\quad + Y''_{\varphi\varphi}\left(\cos^2\varphi(1+\operatorname{ctg}^2\theta)\right) + Y'_\theta\left((k-1)\sin^2\varphi\sin 2\theta + \cos^2\varphi\operatorname{ctg}\theta\right)\\ &\quad + Y''_{\varphi\theta}\left(\sin 2\varphi\operatorname{ctg}\theta\right) + Y''_{\theta\theta}\left(\sin^2\varphi\cos^2\theta\right);\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A_{13} &= A_{31} = Y\left(2\cos\varphi\sin 2\theta\right),\\
B_{13} &= B_{31} = Y\left(2k\cos\varphi\sin 2\theta\right) + Y'_\varphi\left(-2\sin\varphi\operatorname{ctg}\theta\right) + Y'_\theta\left(2\cos\varphi\cos 2\theta\right),\\
C_{13} &= C_{31} = Y\left(k(k-2)\cos\varphi\sin 2\theta/2\right) + Y'_\varphi\left(-k\sin\varphi\operatorname{ctg}\theta\right)\\
&\qquad + Y'_\theta\left((k-1)\cos\varphi\cos 2\theta\right) + Y''_{\varphi\theta}\sin\varphi + Y''_{\theta\theta}\left(-\cos\varphi\sin 2\theta/2\right);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{23} &= A_{32} = Y\left(2\sin\varphi\sin 2\theta\right),\\
B_{23} &= B_{32} = Y\left(2k\sin\varphi\sin 2\theta\right) + Y'_\varphi\left(2\cos\varphi\operatorname{ctg}\theta\right) + Y'_\theta\left(2\sin\varphi\cos 2\theta\right),\\
C_{23} &= C_{32} = Y\left(k(k-2)\sin\varphi\sin 2\theta/2\right) + Y'_\varphi\left(k\cos\varphi\operatorname{ctg}\theta\right)\\
&\qquad + Y'_\theta\left((k-1)\sin\varphi\cos 2\theta\right) + Y''_{\varphi\theta}(-\cos\varphi) + Y''_{\theta\theta}\left(-\sin\varphi\sin 2\theta/2\right);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{33} &= Y\left(4\cos^2\theta\right),\\
B_{33} &= Y\left(4k\cos^2\theta + 2\right) + Y'_\theta\left(-2\sin 2\theta\right),\\
C_{33} &= Y\left(k(k-2)\cos^2\theta + k\right) + Y'_\theta\left(-(k-1)\sin 2\theta\right) + Y''_{\theta\theta}\left(\sin^2\theta\right).
\end{aligned}
$$

5) Вычисление скалярных произведений. Скалярные произведения $(g, G_{kln})_{L_2(Z,(1-s^2)^{-1})}$ в пространстве образов, участвующие в усеченном сингулярном разложении, вычислялись с использованием квадратурной формулы (15) по каждой из переменных $s,\ \theta,\ \varphi$.

5. Численные эксперименты.

Относительная погрешность восстановления потенциального симметричного 2-тензорного поля вычислялась по формуле

$$
\frac{\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_\delta\|_{L_2(S^2(B))}}{\|\mathbf{u}\|_{L_2(S^2(B))}}\,100\%,
$$

где $\mathbf{u}$ — восстанавливаемое симметричное 2-тензорное поле, а $\mathbf{u}_\delta$ — его аппроксимация.

Во всех численных экспериментах визуализация приводится для сечения $z = 0$. Качество восстановления тестового симметричного 2-тензорного поля можно понять по визуализации любой из шести его компонент, поэтому приводятся визуализации лишь одной компоненты.

Тест 1. В первой серии экспериментов восстанавливалось трехмерное симметричное 2-тензорное поле $\mathrm{d}^2 f_1$ с бесконечно гладкими в B компонентами и потенциалом

$$
f_1(x) = \begin{cases} (1-|x|^2)^2 e^{-25|x|^2}, & |x| < 1,\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}
$$

Было проведено исследование на зависимость точности восстановления от количества исходных данных и от максимальной степени используемых базисных полей. Использовались два варианта дискретизации входных данных: $100\times 50\times 100$ и $200\times 100\times 200$ по (s,θ,φ). На рисунке 1 приведен результат данного исследования. Из графика видно, что с увеличением количества данных точность восстановления тестового симметричного 2-тензорного поля значительно улучшается.

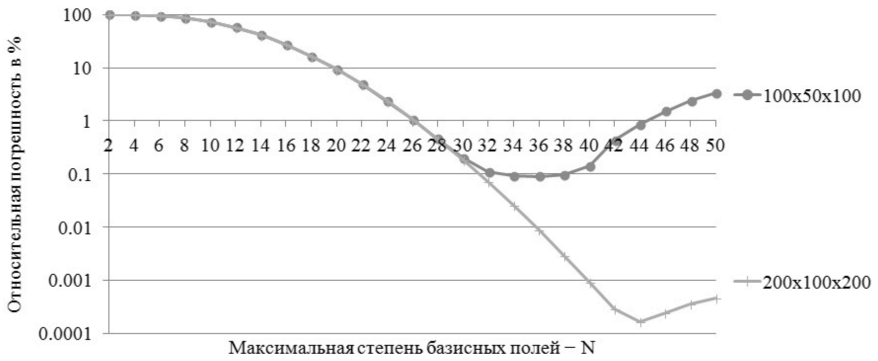

Рис. 1. Зависимость относительной погрешности восстановления поля $d^2 f_1$ от количества исходных данных.

Также исследовалась зависимость относительной погрешности восстановления поля $d^2 f_1$ от внесения в исходные данные равномерного шума (Рисунок 2) и шума с нормальным распределением с параметрами $(0, 1)$ (Рисунок 3). Использовались уровни шума 0%, 0.25%, 0.5%, 0.75% и 1%. Дискретизация исходных данных $100 \times 50 \times 100$ по (s, θ, φ). Из графиков видно, что внесение даже небольшого уровня шума значительно влияет на относительную погрешность восстановления тестового симметричного 2-тензорного поля. При этом с ростом уровня вносимого шума значение оптимального N, то есть степени базисных полей, при использовании которых достигается наименьшая относительная погрешность восстановления, уменьшается. Точность восстановления при внесении равномерного шума лучше чем при внесении шума с нормальным распределением.

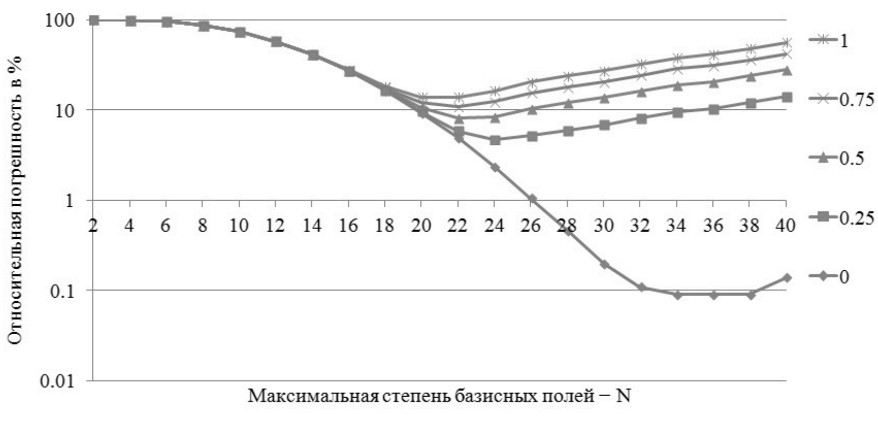

Рис. 2. Зависимость относительной погрешности восстановления поля $d^2 f_1$ от уровня вносимого равномерного шума.

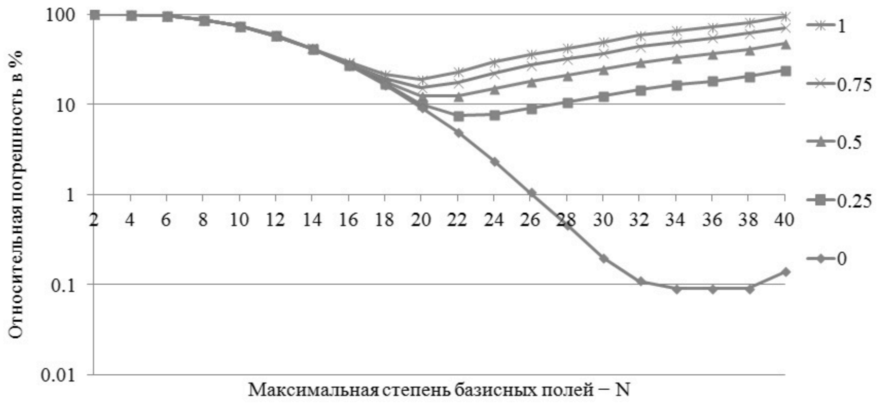

Рис. 3. Зависимость относительной погрешности восстановления поля $\mathrm{d}^2 f_1$ от уровня вносимого шума с нормальным распределением.

На рисунке 4 приведены компонента 11 восстанавливаемого поля $\mathrm{d}^2 f_1$ (а) и компоненты 11 его лучших по точности восстановления аппроксимаций без внесения шума (б) ($N = 36$, погрешность — 0.09%), с внесением равномерного шума уровня 1% (в) ($N = 22$, погрешность — 13.85%) и нормального шума уровня 1% (г) ($N = 20$, погрешность — 18.76%). Несмотря на большую относительную погрешность при внесении шума, рисунки достаточно хорошо передают характерные особенности поведения восстанавливаемого симметричного 2-тензорного поля.

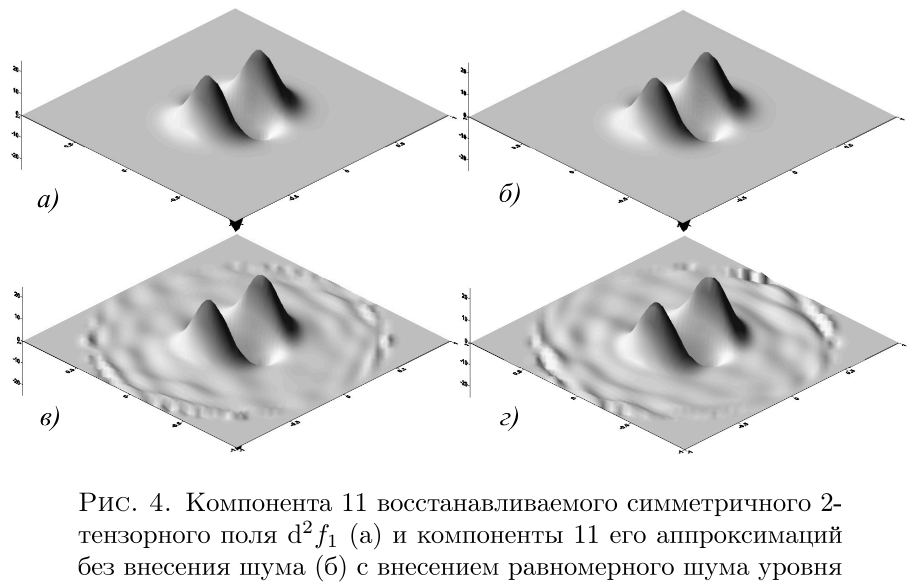

Рис. 4. Компонента 11 восстанавливаемого симметричного 2-тензорного поля $\mathrm{d}^2 f_1$ (а) и компоненты 11 его аппроксимаций без внесения шума (б) с внесением равномерного шума уровня 1% (в) и нормального шума уровня 1% (г).

Тест 2. В следующей серии экспериментов восстанавливалось симметричное 2-тензорное поле $\mathrm{d}^2 f_2$ с компонентами, имеющими первые разрывные производные, и потенциалом

$$f_2(x) = \begin{cases} (0.25 - |x|^2)^3, & |x| \le 0.5, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Было проведено исследование на зависимость точности восстановления от количества исходных данных и от максимальной степени используемых базисных полей. Рассматривались два варианта дискретизации входных данных: $100 \times 50 \times 100$ и $200 \times 100 \times 200$ по (s, θ, φ). На рисунке 5 приведен результат данного исследования. Из графика видно, что с увеличением количества данных в 2 раза по каждому из измерений точность восстановления тестового поля улучшается примерно в 1.6 раза.

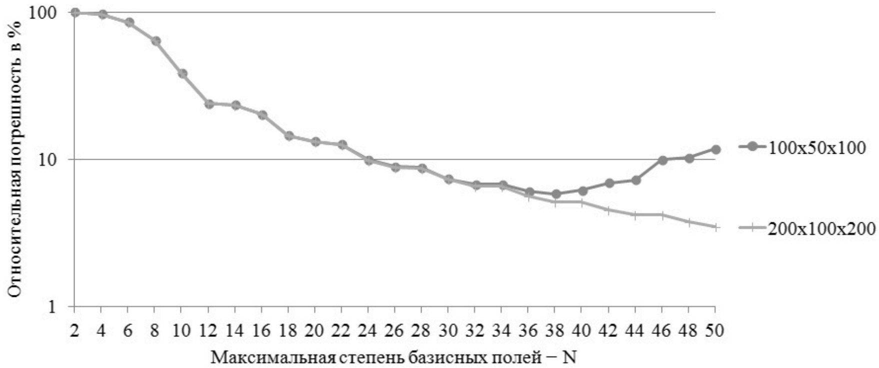

Рис. 5. Зависимость относительной погрешности восстановления поля $\mathrm{d}^2 f_2$ от количества исходных данных.

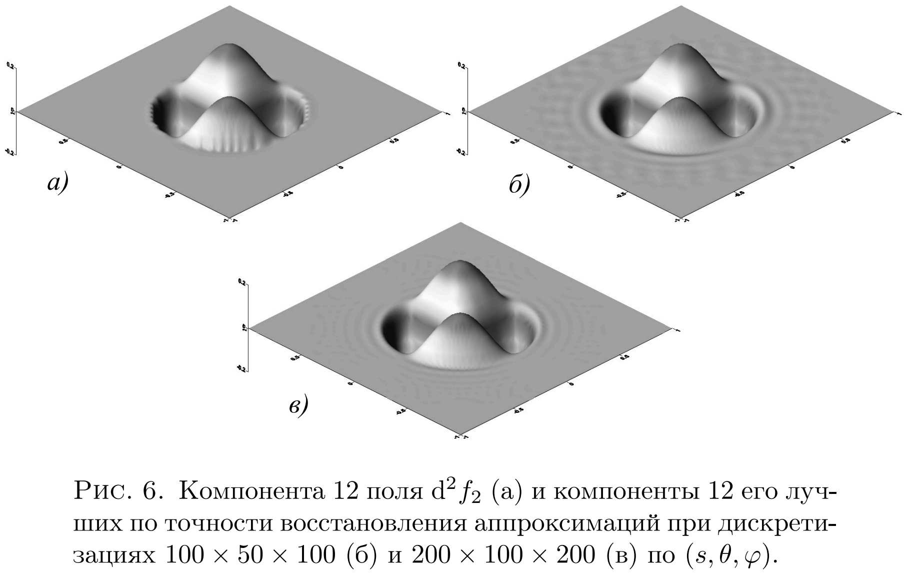

Рис. 6. Компонента 12 поля $\mathrm{d}^2 f_2$ (а) и компоненты 12 его лучших по точности восстановления аппроксимаций при дискретизациях $100 \times 50 \times 100$ (б) и $200 \times 100 \times 200$ (в) по (s, θ, φ).

На рисунке 6 приведена компонента 12 восстанавливаемого симметричного 2-тензорного поля $\mathrm{d}^2 f_2$ (а) и компоненты 12 его лучших по точности восстановления аппроксимаций при дискретизациях $100 \times 50 \times 100$ (б) ($N = 40$, погрешность — 5.83%) и $200 \times 100 \times 200$ (в) ($N = 50$, погрешность — 3.49%) по (s, θ, φ).

Тест 3. В этой серии численных экспериментов восстанавливалось трехмерное симметричное 2-тензорное поле $\mathrm{d}^2 f_3$ с разрывными компонентами и потенциалом

$$f_3(x) = \begin{cases} \left(\cos\frac{5\pi x_1}{4} + \cos\frac{5\pi x_2}{4}\right)^2 \cos^2 \pi x_3, & x \in \{|x_1| + |x_2| \leqslant 0.8,\ |x_3| \leqslant 0.5\}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

На рисунке 7 изображена зависимость точности восстановления тестового поля от количества входных данных. Использовались два варианта дискретизации входных данных: $100 \times 50 \times 100$ и $200 \times 100 \times 200$ по (s, θ, φ). Из графика видно, что увеличение количества исходных данных в 2 раза по каждому из измерений дало улучшение точности восстановления почти в 1.3 раза.

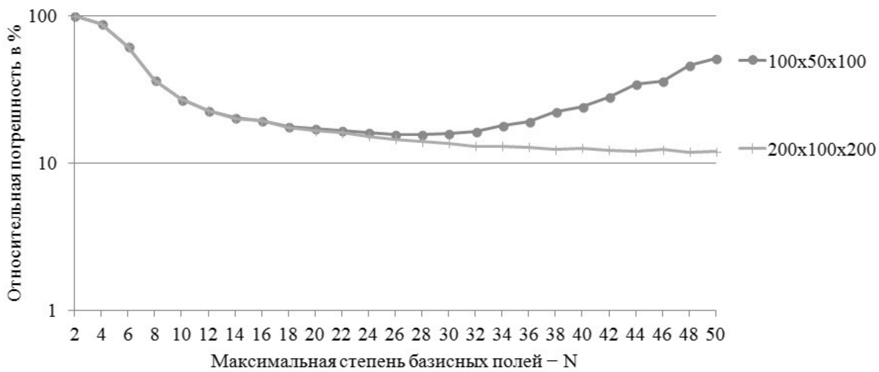

Рис. 7. Зависимость относительной погрешности восстановления симметричного 2-тензорного поля $\mathrm{d}^2 f_3$ от количества исходных данных.

На рисунке 8 приведена компонента 12 восстанавливаемого поля $\mathrm{d}^2 f_3$ (а), компоненты 12 его лучших по точности восстановления аппроксимаций при дискретизациях $100 \times 50 \times 100$ (б) ($N = 30$, погрешность — 15.58%) и $200 \times 100 \times 200$ (в) ($N = 44$, погрешность — 11.91%). Несмотря на большую относительную погрешность, рисунки хорошо передают характерные особенности поведения восстанавливаемого поля.

6. Выводы.

В данной статье предложен алгоритм восстановления трехмерного потенциального симметричного 2-тензорного поля вида $\mathrm{d}^2\phi$ по его известному нормальному преобразованию Радона. Алгоритм основан на методе усеченного сингулярного разложения. То есть обратный оператор приближался конечной суммой базисных в $L_2(Z, (1 - s^2)^{-1})$ элементов с соответствующими коэффициентами.

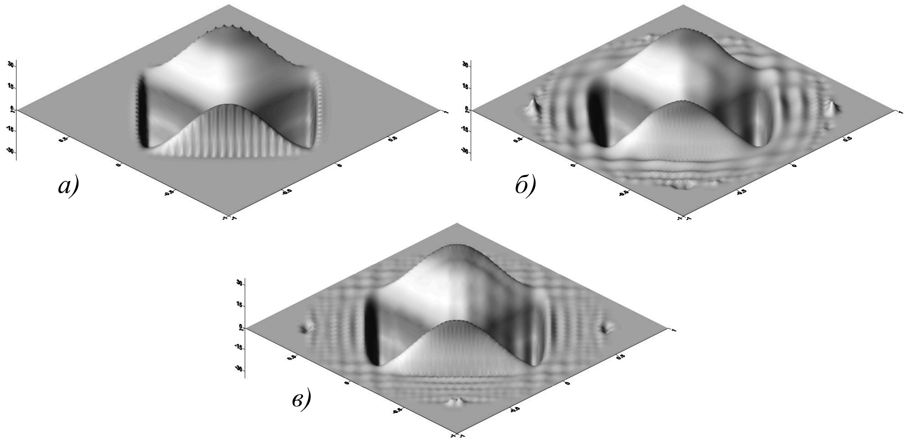

Рис. 8. Компонента 12 восстанавливаемого симметричного 2-тензорного поля $\mathrm{d}^2 f_3$ (а), компоненты 12 его аппроксимаций при дискретизациях $100 \times 50 \times 100$ (б) и $200 \times 100 \times 200$ (в) по (s, θ, φ).

На основе проведенных численных экспериментов можно сделать следующие выводы:

1) При увеличении степени гладкости компонент восстанавливаемого потенциального трехмерного симметричного 2-тензорного поля относительная ошибка значительно уменьшается. Наибольшая ошибка наблюдается при восстановлении разрывных полей, что и не удивительно.

2) Увеличение количества исходных данных в 2 раза по каждому из измерений позволяет улучшить точность восстановления потенциального трехмерного симметричного 2-тензорного поля. Кроме того, с увеличением количества исходных данных увеличивается значение оптимального N. Именно, при восстановлении поля с разрывными компонентами относительная погрешность уменьшилась в 1.3 раза, при восстановлении поля с компонентами, имеющими первые разрывные производные, — в 1.6 раз, а при восстановлении поля с бесконечно гладкими компонентами — в 500 раз. Этот эффект объясняется тем, что увеличение дискретизации ведет к уменьшению погрешности при вычислении скалярных произведений в пространстве образов.

3) Внесение даже небольшого шума (равномерного или с нормальным распределением) в исходные данные значительно влияет на точность восстановления модельного симметричного 2-тензорного поля. При этом изображения реконструкций довольно хорошо передают характерные особенности поведения тестового поля. Кроме того, с ростом уровня вносимого шума уменьшается значение оптимального N. Это связано с тем, что увеличение уровня вносимого шума ведет к увеличению погрешности при вычислении скалярных произведений в пространстве образов оператора нормального преобразования Радона.

References

[1] Yu.A. Kravtsov, Yu.I. Orlov, *Geometrical optics of inhomogeneous media*, Wave phenomena, **6**, Springer, 1990.

[2] V.A. Sharafutdinov, *Integral Geometry of Tensor Fields*, Utrecht: VSP, 1994. Zbl 0883.53004

[3] R. Novikov, V. Sharafutdinov, *On the problem of polarization tomography: I*, Inverse Problems, **23**:3 (2007), 1229–1257. Zbl 1124.53033

[4] V.A. Sharafutdinov, *The problem of polarization tomography: II*, Inverse Problems, **24**:3 (2008), art. 035010. Zbl 1147.53061

[5] V.V. Pikalov, T.S. Melnikova, *Plasma tomography*, Novosibirsk, Nauka, 1995 (in Russian).

[6] H.K. Aben, *Integral photoelasticity*, Tallin, Valgus, 1975 (in Russian)

[7] H. Aben, A. Puro, *Photoelastic tomography for three-dimensional flow birefringence studies*, Inverse Problems, **13**:2 (1997), 215–221. Zbl 0872.35122

[8] A. Puro, *Magneto-photoelasticity as parametric tensor field tomography*, Inverse problems, **14**:5 (1998), 1315–1330. Zbl 0908.73069

[9] V. Sharafutdinov, J. Wang, *Tomography of small residual stresses*, Inverse Problems, **28**:6 (2012), art. 065017. Zbl 1245.35151

[10] W. Lionheart, P. Withers, *Diffraction tomography of strain*, Inverse Problems, 2015, **31**:4, art. 045005. Zbl 06454364

[11] V.P. Karassiov, *Polarization Tomography of Quantum Radiation: Theoretical Aspects and Operator Approach*, Theoretical and Mathematical Physics, **145**:3 (2005), 1666–1677. Zbl 1178.81098

[12] V.Y. Panin, G.L. Zeng, M. Defrise, G.T. Gullberg, *Diffusion tensor MR imaging of principal directions: A tensor tomography approach*, Phys. Med. Biol., **47** (2002), 2737–2757.

[13] V.M. Gelikonov, G.V. Gelikonov, *New approach to crosspolarized optical coherence tomography based on orthogonal arbitrarily polarized modes*, Laser Phys. Lett., **3**:9 (2006), 445–451.

[14] E.Y. Derevtsov, *An approach to direct reconstruction of a solenoidal part in vector and tensor tomography problems*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **13**:3–6 (2005), 213–246. Zbl 1098.53011

[15] I.E. Svetov, A.P. Polyakova, *Reconstruction of 2-Tensor Fields, Given in a Unit Circle, by Their Ray Transform Based on LSM with B-Splines*, Numerical Analysis and Applications, **3**:2 (2010), 151–164. Zbl 1212.65511

[16] I.E. Svetov, *Reconstruction of solenoidal 2-tensor fields, given in a unit disk, in their longitudinal ray transforms*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **7** (2010), Proceedings of first international youth school-conference "Theory and numerical methods of inverse and ill-conditioned problems solving", Part I, 139–149 (in Russian).

[17] A. Denisjuk, *Inversion of the X-ray transform for 3D symmetric tensor fields with sources on a curve*, Inverse Problems, **22**:2 (2006), 399–411. Zbl 1089.65131

[18] V. Sharafutdinov, *Slice-by-slice reconstruction algorithm for vector tomography with incomplete data*, Inverse Problems, **23**:6 (2007), 2603–2627. Zbl 1135.65411

[19] M. Defrise, G.T. Gullberg, *3D reconstruction of tensors and vectors*, Berkeley, LBNL, 2005. (Technical Report № LBNL-54936)

[20] A.K. Louis, *Orthogonal function series expansions and the null space of the Radon transform*, Society for industrial and applied mathematics, **15**:3 (1984), 621–633. Zbl 0533.42018

[21] P. Maass, *The X-ray transform: Singular value decomposition and resolution*, Inverse problems, **3**:4 (1987), 727–741. Zbl 0636.44003

[22] E.Yu. Derevtsov, A.V. Efimov, A.K. Louis, T. Schuster, *Singular value decomposition and its application to numerical inversion for ray transforms in 2D vector tomography*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **19**:4–5 (2011), 689–715. Zbl 1279.33015

[23] E.Yu. Derevtsov, A.P. Polyakova, *Solution of the Integral Geometry Problem for 2-Tensor Fields by the Singular Value Decomposition Method*, Journal of Mathematical Sciences, **202**:1 (2014), 50–71.

[24] Polyakova A. P. *Reconstruction of a vector field in a ball from its normal radon transform*, Journal of Mathematical Sciences, **205**:3 (2015), 418–439.

[25] I.E. Svetov, A.P. Polyakova, *Comparison of two algorithms for the numerical solution of the two-dimensional vector tomography*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **10** (2013), 90–108 (in Russian). Zbl 1330.65208

[26] I.E. Svetov, A.P. Polyakova, *Approximate solution of two-dimensional 2-tensor tomography problem using truncated singular value decomposition*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **12** (2015), 480–499 (in Russian).

[27] Polyakova A.P., Svetov I.E. *Numerical Solution of the Problem of Reconstructing a Potential Vector Field in the Unit Ball from Its Normal Radon Transform*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **9**:4 (2015), 547–558.

[28] S. Deans, *The Radon Transform and Some of its Applications.* New York, Wiley, 1983. Zbl 0561.44001

[29] V.A. Tcheverda, V.I. Kostin, *r-pseudoinverse for compact operators in Hilbert spaces: existence and stability*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **3**:2 (1995), 131–148.

[30] V.A. Tcheverda, V.I. Kostin, *r-pseudoinverse for compact operator*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **7** (2010), Proceedings of first international youth school-conference "Theory and numerical methods of inverse and ill-conditioned problems solving", Part I, 258–282 (in Russian).

Anna Petrovna Polyakova
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Novosibirsk State University,
st. Pirogova, 2
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: apolyakova@math.nsc.ru

Ivan Evgenyevich Svetov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Novosibirsk State University,
st. Pirogova, 2
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: svetovie@math.nsc.ru