S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 181–241 (2016) УДК 512.573
DOI 10.17377/semi.2016.13.016 MSC 08A05

ПОЛНОТА, РЕДУЦИРОВАННОСТЬ, ПРИМАРНОСТЬ И ЧИСТОТА ДЛЯ АЛГЕБР: РЕЗУЛЬТАТЫ И ПРОБЛЕМЫ

Л.М. МАРТЫНОВ

Abstract. We give a survey of researches of the author's concepts (1995, 1996) completeness, reducibility, primarity, purity and problems about them (2000) for universal algebras, groups, modules, monoassociative algebras, semigroups, lattices and unary.

Keywords: universal algebra; variety of algebras; complete algebra; reduced algebra; periodic algebra; primary algebra; pure subalgebra.

СОДЕРЖАНИЕ

Martynov, L. M., Completeness, reducibility, primarity and purity for algebras: results and problems.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (задание № 2014/336).

Поступила 9 декабря 2015 г., опубликована 20 марта 2016 г.

1. Введение

Теория абелевых групп дает яркий пример развитой структурной теории. При этом важную роль в ней играют понятия полной (делимой), редуцированной, периодической (в частности, примарной) группы, сервантной и слабо сервантной (чистой) подгруппы. Оказалось, что к определению этих понятий возможен другой подход, использующий теорию многообразий групп. Первым был осознан этот подход к понятиям полноты и редуцированности. А именно, очевидно, что абелева группа является полной тогда и только тогда, когда она не имеет гомоморфизмов на нетривиальные группы из атомов решетки многообразий абелевых групп (напомним, что последние исчерпываются многообразиями $\mathcal{A}p$ абелевых групп экспоненты p по всем простым p).

Поскольку решетка $L(\mathcal{V})$ подмногообразий любого многообразия $\mathcal{V}$ алгебр является атомной, естественно назвать произвольную алгебру из $\mathcal{V}$ полной, если у нее нет гомоморфизмов на нетривиальные алгебры из атомов решетки $L(\mathcal{V})$. Если алгебра не имеет нетривиальных полных подалгебр, то она называется редуцированной. Осознать понятие примарности помогло введенное в работе Л. Н. Шеврина и автора [94] (см. также [95, 60]) понятие разрешимости алгебры по любому многообразию алгебр (аналог групповой разрешимости).

Определения отмеченных понятий для полугрупп были приведены автором в работе [57], в которой, кроме этого, были анонсированы некоторые результаты по их изучению для полугрупп. Несколько позднее, используя понятие произведения классов алгебр в смысле А. И. Мальцева [55], автор определил в [58] аналог групповой периодичности, а также аналоги сервантности и слабой сервантности для произвольных алгебр, введя различные виды чистоты. Там же определен аналог понятия квазициклической группы в любом многообразии алгебр.

Позднее в работе автора [59] была сформулирована основная проблематика по изучению упомянутых понятий. Эти проблемы интересны как для произвольных алгебр, так и для классических алгебр (групп, модулей, линейных алгебр, колец, полугрупп и др.).

Понятия полноты и редуцированности позволяют указать следующий методологический подход к развитию структурной теории алгебр, хорошо зарекомендовавший себя в теории абелевых групп. Отправляясь от атомов решетки подмногообразий данного многообразия $\mathcal{V}$ алгебр, которые зачастую определяются хорошими тождествами и их алгебры устроены довольно просто, конструируем с помощью расширений редуцированные алгебры с «блоками-факторами» из атомов решетки $L(\mathcal{V})$. С другой стороны, полные алгебры — это антиподы редуцированным, их нельзя «собрать» из алгебр атомов, но иногда можно охарактеризовать исчерпывающим образом (как в случае абелевых групп (см., напр., [51, с. 139]) или, как выяснилось сравнительно недавно, в случае унаров [81]).

Поскольку часто алгебры из $\mathcal{V}$ являются расширениями полных алгебр с помощью редуцированных (это имеет место, например, в случаях групп, модулей, ассоциативных колец и алгебр и др. [64]), изучение произвольных алгебр из $\mathcal{V}$ можно свести к изучению полных и редуцированных алгебр из $\mathcal{V}$ и их расширений. Ввиду результатов работы [59], в этом случае в многообразии $\mathcal{V}$ определен строгий радикал (в смысле А. Г. Куроша [52]), для которого радикальный класс состоит из всех полных алгебр из $\mathcal{V}$, а полупростой класс — из всех редуцированных алгебр из $\mathcal{V}$. В дальнейшем этот радикал, в случае его существования, будем называть полным радикалам.

Тесно связанным с понятиями полноты и редуцированности оказались упоминавшиеся понятия чистоты и периодичности (в частности, примарности).

В последующие годы отмеченные понятия довольно интенсивно изучались как в общей ситуации, так и для классических алгебр в течение вот уже двадцати лет. Это привело автора к необходимости сделать обзор результатов по основной проблематике статьи [59] и наметить пути по дальнейшему изучению обсуждаемых понятий. Другим обстоятельством стимулирующим эту работу было то, что автор опубликовал основополагающую работу [59] в мало доступном издании. К тому же многие исследования на начальном этапе также публиковались в мало известных журналах. Все это привело к тому, что основные определения и проблематика работы [59] по изучению обсуждаемых понятий, а также многие результаты оказались вне поля зрения широкой алгебраической общественности. Публикация этого обзора в широко известном и доступном журнале сможет существенно поправить сложившуюся ситуацию.

В настоящей статье мы дадим определения обсуждаемых понятий, приведем касающиеся их изучения проблематику из [59], незначительно модифицировав и дополнив ее, и сделаем обзор результатов по их изучению для универсальных алгебр, групп, модулей, моноассоциативных алгебр (в частности, ассоциативных, альтернативных, лиевых, йордановых колец и алгебр над полем), полугрупп, моноидов, полугрупп с нулем, клиффордовых полугрупп, решеток и унаров. В конце обзора будет приведена таблица, характеризующая степень изученности всех сформулированных здесь проблем на сегодняшний день, что избавит нас от необходимости отмечать нерешенные задачи для конкретных видов алгебр в соответствующих разделах. В некоторых случаях мы, тем не менее, будем обращать внимание на некоторые частные задачи, которые вызывают особый интерес для данного вида алгебр.

2. Основные определения

Условимся, что буквы k, m, n (иногда с индексами) обозначают натуральные числа (т. е. неотрицательные целые числа) и не всегда будем делать оговорки, если из контекста ясно, что некоторые из них отличны от нуля. Буквой p всегда обозначается простое число, буквами α, β, γ — произвольные ординалы, а буквой ω — первый бесконечный ординал. Для множества M через $|M|$ обозначается его кардинальное число. Знак := означает равенство по определению.

Пусть Ω — некоторая сигнатура, т. е. непустое множество символов операций. Будем называть Ω-алгебры просто алгебрами и вместо обозначения $(A;\Omega)$ использовать обозначение A, т. е. не делать различия в обозначениях алгебры и ее носителя.

Пусть $\mathcal{UA}$ — универсальное многообразие алгебр. В этом разделе предполагается, что все рассматриваемые алгебры принадлежат многообразию $\mathcal{UA}$.

Многообразие [квазимногообразие] алгебр есть класс алгебр, который определяется тождествами [квазитождествами]. Хорошо известно (см., напр., [56, Теорема 5, с. 376]), что множество $L(\mathcal{V})$ $[L_{qv}(\mathcal{Q})]$ всех подмногообразий [подквазимногообразий] данного многообразия $\mathcal{V}$ [квазимногообразия $\mathcal{Q}$] образуют атомную полную (в обычном смысле) решетку относительно отношения включения.

Предмногообразие (по другой терминологии — реплично полный класс [55, 56]) алгебр есть класс $\mathcal{K}$ алгебр, замкнутый относительно взятия подалгебр, декартовых произведений и содержащий тривиальную (т. е. одноэлементную) алгебру. Множество $L_{pv}(\mathcal{K})$ всех подпредмногообразий предмногообразия $\mathcal{K}$ образуют полную решетку по включению, но не обязательно атомную [94, Предложение 5].

Псевдомногообразием алгебр называется класс конечных алгебр замкнутый относительно взятия гомомрфных образов, подалгебр и конечных декартовых произведений. Множество $L_{psv}(\mathcal{K})$ всех подпсевдомногообразий псевдомногообразия $\mathcal{K}$ образуют атомную полную решетку по включению.

Напомним, что многообразие $\mathcal{V}$ называется *предполным* [98, 99]), если решетка $L(\mathcal{V})$ имеет единственный атом; если этот атом есть $\mathcal{P}$, то $\mathcal{V}$ называется *предполным по* $\mathcal{P}$ или $\mathcal{P}$*-предполным.*

Тот факт, что алгебра B есть подалгебра алгебры A обозначается $B \leq A$. Подалгебра B алгебры A называется *собственной*, если $B \neq A$. Нетривиальную алгебру, не имеющую нетривиальных подалгебр, будем называть *простейшей.* Если M — подмножество алгебры A, то $\langle M\rangle$ обозначает подалгебру алгебры A, порожденную подмножеством M. Если $a \in A$ и $M = \{a\}$, то подалгебра, порожденная M, называется *моногенной* и обозначается $\langle a\rangle$. Если $e \in A$ и $\langle e\rangle = \{e\}$, то e называется *идемпотентом.* Решетка конгруэнций алгебры A обозначается $Con(A)$. Если $|Con(A)| = 2$, то алгебра A называется *конгруэнц-простой.*

Условимся, что $var\Sigma$ обозначает подмногообразие многообразия $\mathcal{UA}$, определенное системой тождеств Σ. Наименьшее многообразие, содержащее класс $\mathcal{K}$ алгебр обозначается $\mathrm{var}\mathcal{K}$ и называется многообразием, порожденным классом $\mathcal{K}$. Класс $\mathcal{K}$ алгебр называется *нетривиальным*, если $\mathcal{K} \neq \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ — класс тривиальных алгебр.

Всюду в дальнейшем в этом и в двух следующих разделах, если нет оговорок, будут использоваться обозначения: $\mathcal{V}$ — фиксированное многообразие алгебр, $L(\mathcal{V})$ — решетка его подмногообразий, $\mathcal{X} \in L(\mathcal{V})$, $\mathcal{P}$ — атом решетки $L(\mathcal{V})$; $At(L(\mathcal{V}))$ — множество всех атомов из $L(\mathcal{V})$ и A — алгебра из $\mathcal{V}$.

Алгебру A назовем $\mathcal{X}$*-полной*, если A не имеет нетривиальных гомоморфных образов в $\mathcal{X}$, и $\mathcal{X}$*-разрешимой*, если A не имеет нетривиальных $\mathcal{X}$-полных подалгебр.

Понятие $\mathcal{X}$-разрешимой алгебры можно определить через $\mathcal{X}$-вербальный ряд алгебры A [95, 60]. Напомним это определение. Произвольное дизъюнктное семейство алгебр называется *россыпью*, а алгебры, из которых она состоит, называются *компонентами россыпи.* На множестве $S(A)$ всех россыпей, чьи компоненты являются подалгебрами данной алгебры A, естественным образом определяется частичный порядок $\preceq$:

$$\{A_i|i \in I\} \preceq \{B_j|j \in J\} \Longleftrightarrow (\forall i \in I)(\exists j \in J)(A_i \leq B_j).$$

Понятно, что $S(A)$ является полной (в обычном смысле) решеткой, наименьшим элементом которой является пустая россыпь. Условимся, что E_A обозначает тривиальную россыпь, т. е. множество тривиальных подалгебр алгебры A. Ясно, что если A не имеет идемпотентов, то $\mathrm{E}_A = \emptyset$.

Множество всех смежных классов конгруэнции τ алгебры A, являющихся подалгебрами в A образуют россыпь $ker(\tau)$ алгебры A, которая называется *ядром конгруэнции* τ. Ясно, что $ker(\tau)$ может быть пустой россыпью. Россыпь D алгебры A будет называть *конгруэнц-допустимой* в A, если $\mathrm{D} = ker(\tau)$ для некоторой конгруэнции τ алгебры A. Для конгруэнц-допустимой россыпи D алгебры A наименьшую конгруэнцию с ядром D будем называть *конгруэнцией, порожденной россыпью* D, и обозначать ρ_{D}. Условимся при этом фактор-алгебру A/ρ_{D} обозначать A/D.

Если $\mathcal{X}$ — многообразие алгебр, то *$\mathcal{X}$-вербальной конгруэнцией* алгебры A называется наименьший элемент $\rho(\mathcal{X}, A)$ подмножества $\{\rho \in Con(A) \mid A/\rho \in \mathcal{X}\}$ решетки $Con(A)$ (такая конгруэнция существует и в случае, когда $\mathcal{X}$ является квазимногообразием или предмногообразием [56, Теорема 5, с. 292]). Если $\mathcal{X}$ определяется системой тождеств $\{u_i = v_i \mid i \in I\}$, то $\rho(\mathcal{X}, A)$ есть конгруэнция алгебры A, порожденная всевозможными парами значений тождеств $u_i = v_i$ $(i \in I)$ в A. Ядро $\mathcal{X}$-вербальной конгруэнции $\rho(\mathcal{X}, A)$ алгебры A называется *$\mathcal{X}$-вербалом алгебры* A и обозначается $\mathcal{X}(A)$. Ясно, что A является $\mathcal{X}$-полной тогда и только тогда, когда $\mathcal{X}(A) = A$ (эквивалентно, $\rho(\mathcal{X}, A) = A \times A$).

Если $\mathrm{D} = \{A_i : i \in I\}$ — россыпь алгебры A, то россыпь $\mathcal{X}(\mathrm{D}) = \cup_{i \in I}\mathcal{X}(A_i)$ называется *$\mathcal{X}$-вербальной россыпью* для D. Для алгебры A и любого ординала α с помощью трансфинитной индукции определяется α-я $\mathcal{X}$-вербальная россыпь $\mathcal{X}^\alpha(A)$ следующим образом: полагаем $\mathcal{X}^0(A) = A$; если α — непредельный ординал, то $\mathcal{X}^\alpha(A) = \mathcal{X}(\mathcal{X}^{\alpha-1}(A))$; если α — предельный ординал, то $\mathcal{X}^\alpha(A) = \wedge_{\beta<\alpha}\mathcal{X}^\beta(A)$ (здесь знак $\wedge$ обозначает пересечение в решетке $S(A)$). Таким образом, получаем убывающая цепь россыпей алгебры $S(A)$:

$$A = \mathcal{X}^0(A) \succeq \mathcal{X}^1(A) \succeq \cdots \succeq \mathcal{X}^\alpha(A) \succeq \cdots , \tag{2.1}$$

которая называется *$\mathcal{X}$-вербальной цепью алгебры* A.

Если для некоторого ординала γ справедливо равенство

$$\mathcal{X}^\gamma(A) = \mathrm{E}_A, \tag{2.2}$$

то алгебра A называется *γ-ступенно $\mathcal{X}$-разрешимой* или *γ-$\mathcal{X}$-разрешимой*, а наименьшее γ с таким свойством — *ступенью разрешимости алгебры* A и обозначается $Step(\mathcal{X}, A)$. Если γ — натуральное число, то γ-$\mathcal{X}$-разрешимая алгебра будет также называться *конечно $\mathcal{X}$-разрешимой*. Очевидно, что алгебра A является $\mathcal{X}$-разрешимой тогда и только тогда, когда она γ-$\mathcal{X}$-разрешима для некоторого ординала γ.

Если ядро каждой конгруэнции на любой алгебре из многообразия $\mathcal{V}$ состоит из одной подалгебры (это имеет место в случае некоторых классических алгебр: групп, модулей, колец и др.), то мы не будем различать множество, состоящее из одной подалгебры, и саму алгебру, т. е. под ядром конгруэнции будем понимать соответствующую подалгебру. Теперь ясно, что если $\mathcal{V}$ есть многообразие $\mathcal{G}$ всех групп, $\mathcal{X}$ — многообразие $\mathcal{A}$ всех абелевых групп, то $\mathcal{A}$-вербальная цепь группы G есть в точности цепь ее последовательных коммутантов и, таким образом, понятие конечно $\mathcal{A}$-разрешимой групп совпадает с хорошо известным понятием разрешимой группы (в частности, термин разрешимой алгебры заимствован из этого классического случая), в то время как понятие $\mathcal{A}$-разрешимой группы превращается в понятие RK-группы (см., напр., [51], с. 362).

Будем говорить, что *россыпь* D *принадлежит классу* $\mathcal{K}$ алгебр и писать $\mathrm{D} \in \mathcal{K}$, если либо каждая ее компонента принадлежит $\mathcal{K}$, либо D — пустая россыпь.

Напомним, что $\mathcal{K}$-произведение [55] подклассов $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ класса $\mathcal{K}$ алгебр есть подкласс $\mathcal{X} \circ_{\mathcal{K}} \mathcal{Y}$ алгебр из $\mathcal{K}$, определенный следующим образом:

$$A \in \mathcal{X} \circ_{\mathcal{K}} \mathcal{Y} \Longleftrightarrow (A \in \mathcal{K}) \ \& \ (\exists \rho \in Con(A))(ker(\rho) \in \mathcal{X} \ \& \ A/\rho \in \mathcal{Y}).$$

Известно [55], что если $\mathcal{K}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ являются предмногообразиями (в частности, многообразиями), то класс $\mathcal{X} \circ_{\mathcal{K}} \mathcal{Y}$ — предмногообразие, а если $\mathcal{K}$, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — квазимногообразия алгебр конечной сигнатуры, то $\mathcal{X} \circ_{\mathcal{K}} \mathcal{Y}$ — квазимногообразие.

Если $\mathcal{X} \circ_{\mathcal{K}} \mathcal{X} = \mathcal{X}$, то мы говорим, что $\mathcal{X}$ *замкнут относительно расширений в* $\mathcal{K}$. Если класс $\mathcal{K}$ алгебр фиксирован, то $\mathcal{K}$-произведение его подклассов $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ будем обозначать иногда $\mathcal{X} \circ \mathcal{Y}$. Будем говорить, что *алгебра A есть расширение своей россыпи* D *с помощью алгебры B*, если существует такая конгруэнция ρ на A, что $ker(\rho) = \mathrm{D}$ и $A/\rho \cong B$.

Перейдем теперь к более конструктивным определениям аналогов основных понятий теории абелевых групп для произвольных алгебр. Чтобы легче было запоминать и осознавать их естественность, приведем некоторый «алгоритм» для определения этих понятий. Прежде всего, заметим, что в случае абелевых групп соответствующие определения используют понятия простого и натурального числа. Поэтому необходимо «реализовать» их в любом многообразии алгебр. Сначала сделаем это для многообразия $\mathcal{A}$ всех абелевых групп. Хорошо известно, что любое подмногообразие многообразия $\mathcal{A}$ определяется в $\mathcal{A}$ при аддитивной записи единственным тождеством $nx = 0$ для некоторого натурального n, т. е. многообразиями вида $\mathcal{A}_n = var\{nx = 0\}$ по всем n исчерпываются все многообразия из $L(\mathcal{A})$. Как уже отмечалось в начале введения, атомы решетки $L(\mathcal{A})$ суть многообразия вида $\mathcal{A}_p$ для всех простых p и только они. Пусть $\mathbb{N}$ есть множество всех натуральных чисел, $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел.

Общеизвестно, что решетка $L(\mathcal{A})$ изоморфна решетке $(\mathbb{N}; \delta)$ относительно отношения делимости δ. Кроме того, очевидно, что $\mathcal{A}_k \circ_{\mathcal{A}} \mathcal{A}_m = \mathcal{A}_{km}$ для любых $k, m \in \mathbb{N}$ и поэтому группоид $(L(\mathcal{A}); \circ_{\mathcal{A}})$ всех многообразий абелевых групп относительно $\mathcal{A}$-умножения многообразий есть полугруппа с нулем и единицей, изоморфная мультипликативной полугруппе $(\mathbb{N}, \cdot)$. Заметим, что при этом изоморфизме простому числу p соответствует атом $\mathcal{A}_p$ решетки $L(\mathcal{A})$, а натуральному числу n — многообразие $\mathcal{A}_n$. А поскольку любое натуральное число $n > 1$ есть произведение простых чисел, то ввиду отмеченного изоморфизма полугрупп $(\mathbb{N}, \cdot)$ и $(L(\mathcal{A}); \circ_{\mathcal{A}})$ можно считать, что натуральному числу $n > 1$ ставится в соответствие произведение соответствующих атомов в полугруппе $(L(\mathcal{A}); \circ_{\mathcal{A}})$. К этому надо добавить то, что для любой абелевой группы A и многообразия $\mathcal{A}_n$ имеет место $nA = \mathcal{A}_n(A)$. Кроме того, действие натурального числа n на элемент $a \in A$ можно интерпретировать, как $n\langle a\rangle = \mathcal{A}_n(\langle a\rangle)$.

Теперь ясно, что в случае многообразия $\mathcal{V}$ произвольных алгебр простому числу p должен соответствовать некоторый атом $\mathcal{P}$ решетки $L(\mathcal{V})$, натуральному числу n соответствует либо некоторое многообразие $\mathcal{N}$ из $L(\mathcal{V})$, либо $\mathcal{V}$-произведение некоторых атомов $L(\mathcal{V})$) в группоиде $(L(\mathcal{V}); \circ_{\mathcal{V}})$. Кроме того, действие натурального числа n или простого числа p на абелеву группу [элемент группы] заменяется вычислением $\mathcal{N}$-вербала или $\mathcal{P}$-вербала алгебры [моногенной подалгебры].

Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие алгебр. Алгебру C из $\mathcal{V}$ назовем (атомно) *полной* (в $\mathcal{V}$), если C является $\mathcal{P}$-полной (т. е. $\mathcal{P}(C) = C$) для любого атома $\mathcal{P}$ решетки $L(\mathcal{V})$. Объясним, почему не обязательно употреблять конкретизацию «в $\mathcal{V}$». Дело в том, что атомы решетки подмногообразий любого многообразия алгебр порождаются любой своей нетривиальной алгеброй. Поэтому, если алгебра C из многообразия $\mathcal{V}$ будет полной в $\mathcal{V}$, то она будет полной в любом многообразии $\mathcal{V}'$ алгебр этого типа, содержащем алгебру C. В самом деле, если предположить, что C не является полной в $\mathcal{V}'$, то у нее есть гомоморфизм на нетривиальную алгебру из некоторого атома $\mathcal{P}$ решетки $L(\mathcal{V}')$, но тогда этот атом обязан быть атомом решетки $L(\mathcal{V})$, что противоречит полноте алгебры C в многообразии $\mathcal{V}$.

Алгебру C будем называть *ω-полной*, если для любого $\mathcal{P} \in At(L(\mathcal{V}))$ и для любого натурального n имеет место равенство $\mathcal{P}^n(C) = C$. Алгебру назовем *π-полной* (полной по произведениям атомов), если для любых (не обязательно различных) наборов атомов $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_k$ из $At(L(\mathcal{V}))$ и любого натурального числа $k > 0$ имеет место равенство $(\mathcal{P}_1 \circ_{\mathcal{V}} \mathcal{P}_2 \circ_{\mathcal{V}} \cdots \circ_{\mathcal{V}} \mathcal{P}_k)(C) = C$ при правонормированной расстановке скобок для соответствующего произведения (т. е. $\prod_{i=1}^{n}{}_{\mathcal{V}} \mathcal{P}_i := \left(\prod_{i=1}^{n-1}{}_{\mathcal{V}} \mathcal{P}_i\right) \circ_{\mathcal{V}} \mathcal{P}_n$ для любого $n > 1$). Напомним, что произведение $\mathcal{P}_1 \circ_{\mathcal{V}} \mathcal{P}_2 \circ_{\mathcal{V}} \cdots \circ_{\mathcal{V}} \mathcal{P}_k$ является предмногообразием, для которого на алгебре C имеется соответствующая предвербальная конгруэнция и как следствие определен предвербал алгебры C, как ядро этой конгруэнции. Алгебра называется *вербально полной* в $\mathcal{V}$, если она $\mathcal{X}$-полна по любому собственному подмногообразию $\mathcal{X}$ многообразия $\mathcal{V}$.

Мы называем алгебру A (атомно) *редуцированной* [*π-редуцированной, ω-редуцированной, вербально редуцированной*] в $\mathcal{V}$, если A не имеет нетривиальных (атомно) полных [π-полных, ω-полных, вербально полных] в $\mathcal{V}$ подалгебр. Назовем алгебру из $\mathcal{V}$ *конечно редуцированной*, если она принадлежит мальцевскому $\mathcal{V}$-произведению $\mathcal{P}_1 \circ_{\mathcal{V}} \mathcal{P}_2 \circ_{\mathcal{V}} \cdots \circ_{\mathcal{V}} \mathcal{P}_k$ для некоторого конечного набора атомов $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_k$ из $At(L(\mathcal{V}))$; наименьшая длина таких произведений называется *типом редуцированности* алгебры A в многообразии $\mathcal{V}$.

Назовем алгебру A из $\mathcal{V}$ *периодической*, если любая ее моногенная подалгебра конечно редуцирована. Заметим, что в случае групп или полугрупп наше понятие периодической алгебры совпадает с обычными понятиями соответственно периодической группы или периодической полугруппы. Будем говорить, что периодическая алгебра A *имеет конечную экспоненту* n, если существует такое $n > 0$, что любая моногенная подалгебра из A является конечной редуцированной типа $\leq n$ и n — наименьшее натуральное число с этим свойством. Понятно, что в случае групп понятие периодической алгебры конечной экспоненты превращается в понятие группы конечной экспоненты.

Пусть $\mathcal{P}$ — атом решетки $L(\mathcal{V})$. Назовем алгебру A *примарной по* $\mathcal{P}$ (*$\mathcal{P}$-алгеброй*), если любая моногенная подалгебра из A конечно $\mathcal{P}$-разрешима. Будем говорить, что алгебра A является *примарной*, если A — примарная по некоторому $\mathcal{P}$. Ясно, что любая примарная алгебра является периодической и $\mathcal{P}$-алгебра A конечно редуцирована тогда и только тогда, когда существует такое n, что алгебра A является n-$\mathcal{P}$-разрешимой. *Примарной компонентой* по атому $\mathcal{P}$ из $L(\mathcal{V})$ (*$\mathcal{P}$-компонентой*) алгебры A называется множество $A(\mathcal{P})$ всех ее $\mathcal{P}$-элементов, т. е. элементов алгебры A, каждый из которых порождает в ней конечно $\mathcal{P}$-разрешимую моногенную подалгебру.

Заметим, что для многообразия $\mathcal{G}$ всех групп наше понятие $\mathcal{P}$-*алгебры* совпадает с понятием p-группы для некоторого простого p. Действительно, из конечной $\mathcal{A}_p$-разрешимости любой циклической подгруппы данной группы G следует, что порядки всех элементов из G являются некоторыми степенями числа p, т. е. G есть p-группа.

Квазициклическая группа $C(p^\infty)$ типа p^∞ дает пример неограниченной абелевой p-группы при любом p. Аналог этой группы можно определить в любом многообразии $\mathcal{V}$ алгебр. А именно, скажем, что алгебра $C(\mathcal{P}^\infty)$ является *квазимоногенной типа* $\mathcal{P}^\infty$, если выполнены следующие условия:

(1) $C(\mathcal{P}^\infty) = \cup_{n<\omega} C_n$, где C_n — моногенная $\mathcal{P}$-алгебра для любого n;

(2) $C_n \preceq \mathcal{P}(C_{n+1})$ для любого n;

(3) $Step(\mathcal{P}, C_n) = n$ для любого n.

Наконец, определим несколько типов чистоты для алгебр, среди которых будут и аналоги понятий сервантности и слабой сервантности для абелевых групп. Подалгебра S алгебры A называется $\mathcal{X}$-*чистой*, если $\mathcal{X}(S) = S \wedge \mathcal{X}(A)$ и *наследственно* $\mathcal{X}$-*чистой*, если если любая ее подалгебра является $\mathcal{X}$-чистой. Подалгебра S из A называется (атомно) *чистой*, если $\mathcal{P}(S) = S \wedge \mathcal{P}(A)$ для любого атома $\mathcal{P}$ решетки $L(\mathcal{V})$; ω-*чистой*, если $\mathcal{P}^n(S) = S \wedge \mathcal{P}^n(A)$ для любых n и $\mathcal{P}$; *вербально чистой*, если $\mathcal{X}(S) = S \wedge \mathcal{X}(A)$ для любого $\mathcal{X} \in L(\mathcal{V})$; π-*чистой* (или сервантной), если для любого конечного набора атомов $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_k$ из $At(L(\mathcal{V}))$ имеет место равенство $(\mathcal{P}_1 \circ_\mathcal{V} \cdots \circ_\mathcal{V} \mathcal{P}_k)(S) = (\mathcal{P}_1 \circ_\mathcal{V} \cdots \circ_\mathcal{V} \mathcal{P}_k)(A) \wedge S$.

Определения этого абзаца касаются всех видов чистоты. Алгебру A назовем *наследственно чистой* (в работе [59] и в некоторых других статьях используется термин *абсолютно чистая алгебра*), если любая ее подалгебра является чистой, и *всюду чистой*, если A является чистой в любом ее расширении. Мы называем алгебру A *простой по чистоте*, если A не тривиальна и любая чистая подалгебра из A либо тривиальна, либо совпадает с A.

Заметим, что для многообразия $\mathcal{A}$ абелевых групп наше понятие (атомной) чистоты совпадает с понятием слабой сервантности (чистоты), а понятия π-чистоты, ω-чистоты и вербальной чистоты совпадает с обычным понятием сервантности для абелевых групп. В случае модулей наши понятия чистоты является ω-чистотой в смысле А. П. Мишиной и Л. А. Скорнякова [82].

Наконец, сделаем еще одно замечание. И хотя мы рекомендуем исследовать (по крайней мере, на начальном этапе) наиболее естественные понятия (атомной) полноты, (атомной) редуцированности, (атомной) чистоты (слово *атомной* мы берем в круглые скобки из тех соображений, что в дальнейшем его, как правило, будем опускать), укажем возможные обобщения этих понятий [63], которые для некоторых алгебр могут оказаться полезным. Пусть $\mathfrak{K}$ — некоторое множество подмногообразий многообразия $\mathcal{V}$ алгебр. Алгебра называется $\mathfrak{K}$-полной, если она $\mathcal{X}$-полна по любому $\mathcal{X} \in \mathfrak{K}$, и $\mathfrak{K}$-редуцированной, если она не имеет нетривиальных $\mathfrak{K}$-полных подалгебр. Подалгебра S алгебры A называется $\mathfrak{K}$-*чистой*, если $\mathcal{X}(S) = S \wedge \mathcal{X}(A)$ для любого $\mathcal{X} \in \mathfrak{K}$. Частными случаями $\mathfrak{K}$-полноты, $\mathfrak{K}$-редуцированности и $\mathfrak{K}$-чистоты являются упоминавшиеся (атомная) полнота, (атомная) редуцированность и (атомная) чистота, когда $\mathfrak{K} = At(L(\mathcal{V}))$, и также вербальная полнота, вербальная редуцированность и вербальная чистота, когда $\mathfrak{K} = L(\mathcal{V}) \backslash \{\mathcal{V}\}$.

Для удобства чтения приведем «алгоритм» получения аналогов основных понятий теории абелевых групп в виде нижеследующей таблицы.

Таблица 1. «АЛГОРИТМ» ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ

$\mathcal{A}$	$\mathcal{V}$
p — **простое число**	$\mathcal{P}$ — **атом** решетки $L(\mathcal{V})$
n — **натуральное число**	$\mathcal{N}$ — **многообразие** из $L(\mathcal{V})$
$n = p_1p_2\dots p_k$ $(n \in \mathbb{N},\, p_i \in \mathbb{P})$	$\mathcal{N} = \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{P}_2 \circ \dots \circ \mathcal{P}_k$ $(\mathcal{N} \in L_{pv}(\mathcal{V}),\, \mathcal{P}_i \in At(L(\mathcal{V})))$
Полная группа C: $(\forall n \in \mathbb{N})(n > 0 \to nC = C)$	**Вербально полная алгебра** C: $(\forall \mathcal{N} \in L(\mathcal{V}))(\mathcal{N} \neq \mathcal{V} \to \mathcal{N}(C) = C)$
Полная группа C: $(\forall p \in \mathbb{P})(\forall n \in \mathbb{N})(p^nC = C)$	ω**-полная алгебра** C: $(\forall \mathcal{P} \in At(L(\mathcal{V}))(\forall n \in \mathbb{N})(\mathcal{P}^n(C) = C)$
Полная группа C: $(\forall k > 0)(\forall p_i \in \mathbb{P})(p_1\dots p_kC = C)$	π**-полная алгебра** C: $(\forall k > 0)(\forall \mathcal{P}_i \in At(L(\mathcal{V}))$ $((\mathcal{P}_1 \circ \mathcal{P}_2 \circ \dots \circ \mathcal{P}_k)(C) = C)$
Полная группа C: $(\forall p \in \mathbb{P})(pC = C)$	**(Атомно) полная алгебра** C: $(\forall \mathcal{P} \in At(L(\mathcal{V}))(\mathcal{P}(C) = C)$
Сервантная подгруппа S в A: $(\forall n \in \mathbb{N})(nS = nA \cap S)$	**Вербально чистая подалгебра** S в A: $(\forall \mathcal{N} \in L(\mathcal{V})(\mathcal{N}(S) = \mathcal{N}(A) \wedge S)$
Сервантная подгруппа S в A: $(\forall n \in \mathbb{N})(nS = nA \cap S)$	π**-чистая подалгебра** S в A: $(\forall \mathcal{P}_i \in At(L(\mathcal{V}))(\forall k \in \mathbb{N})(\mathcal{P}_1 \circ \mathcal{P}_2 \circ \dots \circ \mathcal{P}_k)(S) = (\mathcal{P}_1 \circ \mathcal{P}_2 \circ \dots \circ \mathcal{P}_k)(A) \wedge S$
Сервантная подгруппа S в A: $(\forall p \in \mathbb{P})(\forall n \in \mathbb{N})(p^nS = p^nA \cap S)$	ω**-чистая подалгебра** S в A: $(\forall \mathcal{P} \in At(L(\mathcal{V}))(\forall n \in \mathbb{N})(\mathcal{P}^n(S) = \mathcal{P}^n(A) \wedge S)$
Слабо сервантная подгруппа S в A: $(\forall p \in \mathbb{P})(pS = pA \cap S)$	**(Атомно) чистая подалгебра** S в A: $(\forall \mathcal{P} \in At(L(\mathcal{V}))(\mathcal{P}(S) = \mathcal{P}(A) \wedge S)$
p**-группа** A $(p \in \mathbb{P})$: $(\forall a \in A)(\exists n > 0)(p^na = 0)$	$\mathcal{P}$**–алгебра** A $(\mathcal{P} \in At(L(\mathcal{V}))$: $(\forall a \in A)(\exists n \in \mathbb{N})(\mathcal{P}^n(\langle a \rangle) = \mathrm{E}_{\langle a \rangle})$
Периодическая группа A: $(\forall a \in A)(\exists n > 0)(na = 0) \cong$ $(\forall a \in A)(\exists k > 0)(\exists p_i \in \mathbb{P})$ $(\langle a \rangle \in \mathcal{A}_{p_1} \circ \mathcal{A}_{p_2} \circ \dots \circ \mathcal{A}_{p_k})$	**Периодическая алгебра** A: $(\forall a \in A)(\exists k > 0)(\exists \mathcal{P}_i \in At(L(\mathcal{V}))$ $(\langle a \rangle \in \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{P}_2 \circ \dots \circ \mathcal{P}_k)$
Группа A **конечной экспоненты**: $(\exists n > 0)(\forall a \in A)(na = 0)$	**Алгебра** A **конечной экспоненты**: $(\exists k > 0)(\exists \mathcal{P}_i \in At(L(\mathcal{V}))(\forall a \in A)$ $(\langle a \rangle \in \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{P}_2 \circ \dots \circ \mathcal{P}_k)$
Ограниченная группа A: $(\exists n > 0)(nA = O)$	**Конечно редуцированная алгебра** A: $(\exists k > 0)(\exists \mathcal{P}_i \in At(L(\mathcal{V}))$ $(A \in \mathcal{P}_1 \circ \mathcal{P}_2 \circ \dots \circ \mathcal{P}_k)$
p**-компонента группы** A: $A(p) = \{a \in A \vert (\exists n \in \mathbb{N})(p^na = 0)\}$	$\mathcal{P}$**-компонента алгебры** A: $A(\mathcal{P}) = \{a \in A \mid (\exists n \in \mathbb{N})(\mathcal{P}^n(\langle a \rangle) = \mathrm{E}_{\langle a \rangle})\}$
Квазициклическая p**-группа типа** p^∞: $C(p^\infty) = \langle c_1, c_2, \dots \vert pc_1 = 0, pc_{n+1} = c_n,\ n = 1, 2, \dots \rangle$	**Квазимоногенная** $\mathcal{P}$**-алгебр типа** $\mathcal{P}^\infty$: $C(\mathcal{P}^\infty) = \cup_{n=1}^\infty C_n$, $C_n = \langle c_n \rangle$; $C_n \preceq \mathcal{P}(C_{n+1})$, $Step(\mathcal{P}, C_n) = n$ $(n = 1, 2, \dots)$.

Определения других используемых и неопределяемых здесь понятий универсальной алгебры и конкретных алгебр можно найти в справочных книгах [13, 14].

3. Основные проблемы

Для удобства чтения и ссылок приведем формулировки проблем статьи [59], используя в некоторых случаях модифицированную терминологию. При этом мы сохраняем сущность проблемы. Учитывая формальное различие постановок проблем, а также логику построения настоящей работы, здесь мы используем двойную нумерацию проблем. При этом второе число этой нумерации совпадает с номером соответствующей проблемы работы [59]. Заметим, что многие проблемы навеяны теорией абелевых групп. Некоторые проблемы оригинальны и принимают во внимание наш подход к обсуждаемым понятиям, идущий от многообразий алгебр. Сформулированные ниже проблемы следует воспринимать как *программу изучения обсуждаемых понятий.* Учитывая проведенные исследования по изучению обсуждаемых понятий, мы добавили к ним еще три естественные проблемы.

При формулировке проблем мы останавливаем свой выбор на многообразиях алгебр, как наиболее изученных классах алгебр. Постановки проблем возможно варьировать, адресуя их тем или иным типам и видам многообразий алгебр (при этом в некоторых случаях возможно получение общих результатов), или к некоторым конкретным хорошо известным многообразиям, например, групп, полугрупп, модулей, колец и др. Многие проблемы естественны также для квазимногообразий и псевдомногообразий алгебр. Ясно, что для данного вида алгебр могут быть актуальны одни проблемы и не представляют интереса другие. Иногда некоторые проблемы решаются тривиально. С другой стороны, многие из перечисленных ниже проблем остаются открытыми даже для модулей.

Если многообразие $\mathcal{V}$ состоит из алгебр со свойством, выраженным прилагательным, будем добавлять соответствующее прилагательное в название $\mathcal{V}$. Например, утверждение «$\mathcal{V}$ есть примарное многообразие» означает, что $\mathcal{V}$ состоит из алгебр, каждая из которых примарна по некоторому фиксированному атому из $L(\mathcal{V})$.

Описание периодических (в частности, примарных) и редуцированных алгебр представляет собой довольно трудную проблему уже в случае абелевых групп. С другой стороны, как уже отмечалось, любое собственное многообразие абелевых групп имеет вид $\mathcal{A}_n$ для некоторого $n > 0$ и поэтому является периодическим и редуцированным, а при $n = p^k$ — примарным. Это обстоятельство добавляет оптимизма в успешном решении нижеследующих двух проблем для конкретных видов алгебр.

Проблема 3.1. *Охарактеризовать примарные* [*периодические*] *многообразия алгебр.*

Проблема 3.2. *Охарактеризовать редуцированные многообразия алгебр.*

Хорошо известно, что любая абелева группа является прямой суммой своих полной и редуцированной подгрупп. Более того, общеизвестно, что в случае абелевых групп любая полная подгруппа выделяется прямым слагаемым. Прежде чем поставить аналогичную задачу для алгебр, условимся говорить, что собственная подалгебра B алгебры A выделяется прямым множителем в A, если найдется такая подалгебра C алгебры A, что A изоморфна прямому произведению $B \times C$. Считаем, что подалгебра A алгебры A выделяется прямым множителем в A, даже в случае если в A нет идемпотентов. Алгебру назовем (слабо) *расщепляемой*, если в ней существует наибольшая полная подалгебра, которая выделяется прямым множителем. Алгебру будем называть *сильно расщепляемой*, если в ней любая полная подалгебра выделяется прямым множителем. Понятно, что любая редуцированная алгебра A является сильно расщепляемой, так как в ней либо вообще нет полных подалгебр, либо любая полная C подалгебра тривиальна, т. е. $C = \{e\}$ и $A \cong A \times C$. Многообразие алгебр назовем [сильно] расщепляемым, если в нем любая алгебра является [сильно] расщепляемой. Понятно, что этими свойствами обладает любое редуцированное многообразие. Поэтому естественной является постановка следующей проблемы, являющейся небольшой модификацией проблемы 3 из [60]).

Проблема 3.3. *Охарактеризовать нередуцированные [сильно] расщепляемые многообразия алгебр.*

Что касается свойства расщепляемости, то эта проблема более актуальна для алгебр с единственным выделенным идемпотентом, в которых всегда имеется наибольшая полная подалгебра. Интересно изучить взаимосвязь понятий расщепляемости и сильной расщепляемости для многообразия алгебр.

Отметим, что для многообразия $\mathcal{A}$ всех абелевых групп понятия полной и вербально полной группы совпадают. Действительно, разрешимость в абелевой группе C уравнения $nx = a$ для любых a из C и натуральных $n > 0$ эквивалентна выполнимости равенства $nC = C = \mathcal{A}_n(C)$, т. е. вербальной полноте C в $\mathcal{A}$. С другой стороны, хорошо известно, что разрешимость в C уравнения $nx = a$ для любых $a \in C$ и $n > 0$ эквивалентна разрешимости в C уравнения $px = a$ для любого p. Таким образом, понятия полноты и вербальной полноты для многообразия $\mathcal{A}$ совпадают.

В общем случае, понятия полной и вербально полной алгебры в многообразии $\mathcal{V}$ не совпадают. Это имеет место, например, в любом многообразии $\mathcal{V}$, в котором все атомы решетки $L(\mathcal{V})$ порождают собственное подмногообразие $\mathcal{M}$ многообразия $\mathcal{V}$ и $\mathcal{M}$ содержит нетривиальную (атомно) полную в $\mathcal{M}$ (а значит и в $\mathcal{V}$) алгебру C. Действительно, в этом случае $\mathcal{M}(C) = \mathrm{E}_C$, так как $C \in \mathcal{M}$, и поэтому C не является вербально полной в $\mathcal{V}$. Поэтому естественна следующая проблема.

Проблема 3.4. *Охарактеризовать многообразия алгебр, в которых понятия полноты и вербальной полноты совпадают.*

Напомним, что полные абелевы группы — это в точности прямые суммы некоторого множества групп, изоморфных аддитивной группе $\mathbb{Q}$ рациональных чисел и квазициклическим группам $C(p^\infty)$ для некоторых простых p (см., напр., [51, с. 139]). Вопрос об описании полных алгебр для произвольных многообразий может оказаться довольно сложным. В самом деле, легко понять, что любая конгруэнц-простая алгебра, не принадлежащая ни одному из атомов решетки $L(\mathcal{V})$, является полной. Но уже описание конгруэнц-простых алгебр для многих многообразий является трудно обозримой задачей. Этим объясняется тот факт, что нижеследующие две проблемы будут адресованы к многообразиям специального вида.

Прежде отметим одно важное свойство многообразия $\mathcal{A}$ всех абелевых групп, возможно способствующее решению задачи описания полных абелевых групп:

многообразие $\mathcal{A}$ совпадает с объединением всех атомов решетки $L(\mathcal{A})$. Условимся называть полную решетку 1-*атомной*, если ее наибольший элемент (обозначаемый обычно 1) является объединением всех ее атомов. В соответствии с этим определением, мы называем многообразие $\mathcal{V}$ алгебр 1-*атомным*, если оно совпадает с объединением всех атомов решетки $L(\mathcal{V})$.

Проблема 3.5. *Охарактеризовать полные алгебры* 1*-атомных многообразий.*

Проблема 3.6. *Охарактеризовать* 1*-атомные многообразия, в которых любая алгебра вложима в полную алгебру.*

Заметим, что проблема 3.6 для произвольных многообразий алгебр не столь интересна — для многих видов алгебр (напр., групп, полугрупп, ассоциативных колец и др.) хорошо известно, что любая алгебра этого многообразия вложима в конгруэнц-простую алгебру из этого же многообразия, которые, как уже отмечалось перед постановкой проблемы 3.5, как правило, являются полными.

Особый интерес представляет изучение наших понятий для конечных алгебр (в частности, в связи с рассмотрением псевдомногообразий конечных алгебр). Нижеследующие три проблемы адресованы конечным алгебрам.

Проблема 3.7. *Охарактеризовать конечные полные алгебры данного многообразия алгебр.*

Заметим, что в случае групп проблема 3.7 равносильна описанию конечных групп, совпадающих со своим коммутантом.

Проблема 3.8. *Охарактеризовать конечные редуцированные алгебры данного многообразия алгебр.*

В случае групп указанным в проблеме 3.8 свойством обладают только разрешимые (в обычном смысле) конечные группы.

Проблема 3.9. *Охарактеризовать многообразия алгебр, в которых любая конечная алгебра вложима в полную конечную алгебру.*

Указанным в проблеме 3.9 свойством обладает многообразие всех групп, так как общеизвестно, что любая конечная группа вкладывается в конечную простую некоммутативную группу, которая является, очевидно, полной.

Нетривиальную полную алгебру мы называем *минимально полной*, если она не имеет собственных нетривиальных подалгебр. Хорошо известно, что аддитивные минимально полные абелевы группы с точностью до изоморфизма исчерпываются группами $\mathbb{Q}$ и $C(p^{\infty})$ по всем простым p. При этом, как уже отмечалось, любая полная абелева группа является прямой суммой минимально полных абелевых групп. Поэтому заслуживает постановки следующая проблема.

Проблема 3.10. *Охарактеризовать минимально полные алгебры данного многообразия алгебр.*

Проблема 3.11. *Изучить вопросы существования, изоморфизма и минимальной полноты квазимоногенных алгебр в данном многообразии алгебр.*

Напомним, что согласно первой теореме Прюфера (см., напр., [51, с. 146]), любая ограниченная абелева p-группа есть прямая сумма циклических p-групп.

Проблема 3.12. *Найти условия для многообразия $\mathcal{V}$ и атома $\mathcal{P}$ решетки $L(\mathcal{V})$, при которых любая конечно редуцированная $\mathcal{P}$-алгебра из $\mathcal{V}$ является подпрямым произведением моногенных $\mathcal{P}$-алгебр.*

Проблема 3.13. *Охарактеризовать многообразия $\mathcal{V}$, в которых $\mathcal{P}$-компонента любой алгебры $A \in \mathcal{V}$ является подалгеброй и прямым множителем в A для любого атома $\mathcal{P}$ решетки $L(\mathcal{V})$.*

Проблема 3.14. *Охарактеризовать непериодические многообразия, в любой алгебре из которых множество всех периодических элементов есть конгруэнц-допустимая подалгебра.*

Проблема 3.15. *Охарактеризовать многообразия $\mathcal{V}$, в которых все примарные компоненты любой периодической алгебры A из $\mathcal{V}$ являются подалгебрами в A и A является их подпрямым произведением.*

Заметим, что в случае групп, кроме многообразий абелевых групп, указанными в проблемах 3.14 и 3.15 свойствами обладает любое многообразие нильпотентных групп [51, с. 390].

Проблема 3.16. *Охарактеризовать многообразия алгебр, в которых следующие понятия совпадают:* 1) *чистоты и ω-чистоты;* 2) *чистоты и вербальной чистоты;* 3) *ω-чистоты и вербальной чистоты.*

Проблема 3.17. *Описать наследственно чистые алгебры данного многообразия алгебр.*

Проблема 3.18. *Охарактеризовать многообразия, в которых совпадают классы наследственно чистых и наследственно вербально чистых алгебр.*

Приведенные ниже проблемы 3.19 – 3.23 можно адресовать любому виду чистоты.

Проблема 3.19. *Охарактеризовать наследственно чистые многообразия алгебр.*

Проблема 3.20. *Описать алгебры данного многообразия, любая чистая подалгебра которых выделяется прямым множителем.*

Проблема 3.21. *Описать многообразия алгебр, любая чистая подалгебра которых выделяется прямым множителем.*

Заметим, что постановки проблем 3.17 и 3.20 обусловлены известными результатами для абелевых групп. Напомним, что в [12] описаны наследственно сервантные абелевы группы. В этой же работе начато изучение абелевых групп, в которых любая сервантная подгруппа выделяется прямым слагаемым. Окончательное описание таких групп получено в статье [5]. В работе [19] охарактеризованы наследственно слабо сервантные абелевы группы — как и в случае сервантности, это в точности элементарные абелевы группы (т. е. являющиеся прямыми суммами циклических групп простых порядков).

Проблема 3.22. *Описать простые по чистоте алгебры данного многообразия алгебр.*

Напомним, что абелевы группы, не содержащие нетривиальных сервантных подгрупп, исчерпываются подгруппами аддитивной группы рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и квазициклических групп $C(p^\infty)$ по всем простым p (см., напр., [82, с. 80]), т. е. подгруппами минимально полных абелевых групп. Последнее обстоятельство указывает на связь проблем 3.22 и 3.10 и вызывает к жизни следующую проблему.

Проблема 3.23. *Охарактеризовать многообразия алгебр, в которых простые по чистоте алгебры являются подалгебрами минимальных полных подалгебр.*

Заслуживает внимания следующая проблема.

Проблема 3.24. *Охарактеризовать непериодические многообразия алгебр, в которых множество периодических элементов любой алгебры является чистой подалгеброй.*

Заметим, что в случае абелевых групп понятие полной группы совпадает с категорным понятием инъективного $\mathbb{Z}$-модуля, где $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел. В связи с тем, что алгебры любого многообразия образуют категорию с гомоморфизмами в качестве морфизмов, представляет интерес следующая проблема.

Проблема 3.25. *Охарактеризовать многообразия алгебр, в которых понятие инъективной алгебры совпадает с понятиями:* 1) *полной алгебры;* 2) *вербально полной алгебры.*

При постановке проблем в работе [59] мы упустили из виду несколько свойств абелевых групп. Чтобы приблизиться по этим свойствам к абелевым группам на предмет более эффективного использования обсуждаемых понятий естественно интересоваться многообразиями других алгебр с аналогичными свойствами. Это, во-первых, свойство многообразия всех абелевых групп быть не редуцированным, в то время как все его собственные подмногообразия являются редуцированными. Во-вторых, свойство наследственно чистых абелевых групп быть элементарными группами и поэтому редуцированными группами. В связи с этим добавим три проблемы по изучению соответствующих свойств для алгебр. Назовем нередуцированное многообразие алгебр *минимально нередуцированным*, если любое его собственное подмногообразие является редуцированным.

Проблема 3.26. *Охарактеризовать минимально нередуцированные подмногообразия данного многообразия алгебр.*

Проблема 3.27. *Охарактеризовать многообразия алгебр, в которых наследственно чистые алгебры являются редуцированными.*

Проблема 3.28. *Охарактеризовать многообразия алгебр, в которых наследственно чистые алгебры являются подпрямыми произведениями простейших алгебр этого многообразия.*

4. Универсальные алгебры

Как уже отмечалось, обсуждаемые здесь понятия оказываются тесно взаимосвязанными. Однако в этом разделе мы попытались систематизировать результаты, посвятив каждому из понятий полноты, редуцированности, примарности и чистоты отдельные подразделы. В последующих разделах, в которых будут приведены результаты для конкретных видов алгебр, мы этого делать не будем. Как правило, в этих разделах результаты будут излагаться в порядке появления проблем. Этот порядок будет иногда нарушаться, если некоторые результаты будут касаться взаимосвязанных понятий, которым адресованы разные и иногда далеко отстающие друг от друга проблемы.

4.1. Полные алгебры

Результаты этого подраздела содержатся в работах автора [59, 62, 64]. Первое утверждение очевидно.

Факт 4.1.1. *Любая конгруэнц-простая алгебра многообразия $\mathcal{V}$ алгебр, не принадлежащая атомам решетки $L(\mathcal{V})$, является полной алгеброй.*

Факт 4.1.2 ([59, Утверждение 1]). *Гомоморфный образ [вербально] полной алгебры является [вербально] полной алгеброй.*

Напомним, что в случае абелевых групп прямая сумма полных групп является полной группой и расширение полной с помощью полной также является полной. В общем случае это не так. Однако справедливы следующие два утверждения.

Факт 4.1.3 ([59, Утверждение 2]). *Если τ — конгруэнция на алгебре A такая, что τ порождается своим ядром $ker(\tau)$, компоненты которого являются полными алгебрами, и факторалгебра A/τ является полной, то A — полная алгебра.*

Факт 4.1.4 ([59, Утверждение 3]). *Если $C = A \times B$, где A, B суть полные алгебры, причем A, B изоморфно вкладываются в C и для их изоморфных образов A', B' имеет место $A' \vee B' = C$, то C есть полная алгебра.*

Факт 4.1.5 ([59, Утверждение 4]). *Если многообразия $\mathcal{V}$ и $\mathcal{P}$ обладают тем свойством, что гомоморфный образ конечно $\mathcal{V}$-разрешимой алгебры является конечно $\mathcal{V}$-разрешимой алгеброй, то любая квазимоногенная алгебра типа $\mathcal{P}^\infty$ является полной в $\mathcal{V}$.*

Замечание 4.1.6 ([59, Замечание 5]). В любой алгебре A многообразия $\mathcal{V}$ алгебр с единственным выделенным идемпотентом имеется наибольшая полная подалгебра. Она совпадает с подалгеброй алгебры A, порожденной всеми полными подалгебрами алгебры A. В общем случае это не так. В самом деле, любая неполная алгебра идемпотентов не имеет наибольшей полной подалгебры.

Ниже мы приведем достаточное условие существования $\mathcal{X}$-полных алгебр в многообразии $\mathcal{V}$. Сначала условимся относительно некоторых обозначений. Пусть $X := \{x_0, x_1, \dots\}$ — бесконечное счетное множество переменных. Для терма t над X, через $E(t)$ обозначим множество всех переменных из X, входящих в запись t. Если $E(t) \neq \emptyset$, то $h(t)$ и $f(t)$ обозначают соответственно минимальный и максимальный индекс переменных из $E(t)$.

Пусть $T = \{t_n\}$ — последовательность термов, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $E(t_n) \neq \emptyset$;
2) $E(t_k) \cap E(t_m) = \emptyset$ для любых $k \neq m$;
3) $h(t_0) = 1$ и $f(t_n) + 1 = h(t_{n+1})$;
4) Для любых k и n таких, что $h(t_n) \leq k \leq f(t_n)$, переменная x_k принадлежит множеству $E(t_n)$.

Определим последовательность $S = \{s_n\}$ термов над X:

$$s_0 := x_0,\ s_{n+1} := s_n(t_{h(s_n)}, t_{h(s_n)+1}, \dots, t_{f(s_n)}).$$

Ясно, что S обладает теми же свойствами, что и T, за исключением первого свойства из 3), поскольку $h(s_0) = 0$, но $h(t_0) = 1$.

Теорема 4.1.7 ([62, Теорема]; [61, Предложение 1.2]). *Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие алгебр с выделенным идемпотентом e, $\mathcal{K}$ — квазимногообразие алгебр из $\mathcal{V}$ и $\mathcal{X} \in L(\mathcal{V})$. Если существует последовательность T термов со свойствами 1)–4) такая, что $t_n = e$ есть тождество в $\mathcal{X}$ и $s_n = e$ не является тождеством в некоторой алгебре A_{n+1} из $\mathcal{K}$ для любого n, то в $\mathcal{K}$ существует $\mathcal{X}$-полная нетривиальная алгебра C, которая удовлетворяет следующим двум условиям:*

(1) $C = \cup_{n<\omega} C_n$, *где* C_n — *подалгебра, порожденная* $f(s_n) - h(s_n) + 1$ *элементами*;

(2) $C_n \preceq \mathcal{X}(C_{n+1})$ *для любого* n.

Если класс $\mathcal{X}^{(n)}$ *всех* n-$\mathcal{X}$-*разрешимых алгебр из* $\mathcal{V}$ *является многообразием для любого* n *и алгебра* A_{n+1} *является* $\mathcal{X}$-*разрешимой ступени* $n+1$, *то кроме того* C *удовлетворяет следующему условию*:

(3) $Step(\mathcal{X}, C_n) = n$.

Замечание 4.1.8 ([62, Замечание 1]). В случае, если тождество $u = v$ эквивалентно тождеству вида $t = e$ (это имеет место в случаях групп, модулей, колец и др.), то условия теоремы 4.1.7 являются и необходимыми.

Важную роль играет, в частности, последовательность T, в которой все термы получаются из некоторого терма t переименованием его переменных. В этом случае терм s_n мы называем n-*й степенью терма* t и обозначаем $t^{(n)}$. В описанной ситуации будем говорить, что *последовательность* T *порождается термом* t.

Например, в случае групп последовательность $T = \{[x_{2n+1}, x_{2n+2}]\}$ порождается коммутатором $t := [x_1, x_2]$ и мы имеем следующую последовательность $S = \{t^{(n)}\}$:

$$t^{(0)} := x_0,\ t^{(1)} := [x_1, x_2],\ t^{(2)} := [[x_3, x_4], [x_5, x_6]],\ \ldots.$$

По аналогии, в случаях полугрупп или колец последовательность

$$T = \{x_{2n+1}x_{2n+2}\}$$

порождается термом $t := x_1x_2$ и мы получаем следующую последовательность $S = \{t^{(n)}\}$:

$$t^{(0)} := x_0,\ t^{(1)} := x_1x_2,\ t^{(2)} := (x_3x_4)(x_5x_6), \ldots.$$

В случае R-модулей последовательность $T = \{rx_n\}$ порождается термом $t := rx_1$ и мы имеем следующую последовательность $S = \{t^{(n)}\}$:

$$t^{(0)} := x_0,\ t^{(1)} := rx_1,\ t^{(2)} := r^2x_2,\ \ldots\ t^{(n)} := r^nx_n\ \ldots.$$

В связи с этим мы приведем одно следствие теоремы 4.1.7.

Следствие 4.1.9 ([62, Следствие 1]). *Пусть* $\mathcal{V}$ — *многообразие алгебр с выделенным идемпотентом* e, $\mathcal{X} \in L(\mathcal{V})$, $\mathcal{K}$ — *класс всех* $\mathcal{X}$-*разрешимых алгебр из* $\mathcal{V}$. *Если среди тождеств многообразия* $\mathcal{X}$ *существует такое тождество* $t = e$, *что равенство* $t^{(n)} = e$ *не является тождеством в* $\mathcal{K}$ *для любого* n, *то класс* $\mathcal{K}$ *не является квазимногообразием.*

Замечание 4.1.10 ([62, Замечание 2]). Условие «равенство $t^{(n)} = e$ не является тождеством в $\mathcal{K}$ для любого n» следствия 4.1.9 будет выполняться, если для многообразия $\mathcal{X} = var\{t = e\}$ класс $\mathcal{X}^{(n)}$ является многообразием, определяемым в $\mathcal{V}$ одним тождеством $t^{(n)} = e$ и $\mathcal{X}^{(n)} \neq \mathcal{X}^{(n+1)}$ для любого n.

Следствие 4.1.11 ([62, Следствие 2]). *Если последовательность* T *в теореме* 4.1.7 *порождается термом* t *от одной переменной и все остальные условия теоремы* 4.1.7 *выполнены для* $\mathcal{K} = \mathcal{V}$ *и* $\mathcal{X} = \mathcal{P}$, *то в многообразии* $\mathcal{V}$ *существует квазимоногенная алгебра типа* $\mathcal{P}^\infty$.

Напомним, что алгебра A называется *трансвербальной* [55] *по многообразию* $\mathcal{X}$, если для любой конгруэнц-допустимой россыпи D алгебры A ее $\mathcal{X}$-вербал $\mathcal{X}(D)$ также является конгруэнц-допустимой россыпью алгебры A. Если любая алгебра из многообразия $\mathcal{V}$ трансвербальна по $\mathcal{X}$, то $\mathcal{V}$ будем называть трансвербальным по $\mathcal{X}$. Если многообразие $\mathcal{V}$ трансвербально по любому своему подмногообразию, то оно называется трансвербальным. Например, поскольку любой подмодуль произвольного (левого) модуля над ненулевым ассоциативным кольцом R с единицей является конгруэнц-допустимым, многообразие всех R-модулей является трансвербальным. Многообразие всех групп также трансвербально, так как для любого многообразия $\mathcal{V}$ групп вербальная подгруппа $\mathcal{V}(H)$ любой нормальной подгруппы H данной группы G является вполне характеристической подгруппой в H и потому нормальной подгруппой в G. Однако, уже в многообразии всех ассоциативных колец имеются подмногообразия, по которым оно не трансвербально [55].

Приведем теперь основной результат уже упоминавшейся работы автора [64] о полном радикале алгебр.

Теорема 4.1.12 ([64, Теорема]). 1) *Если* $\mathcal{V}$ *— произвольное многообразие алгебр, то в любой алгебре* A *из* $\mathcal{V}$ *существует наибольшая полная россыпь* $C(A)$.

2) *Если многообразие* $\mathcal{V}$ *трансвербально по своим минимальным подмногообразиям, то выполнено условие*:

а) *россыпь* $C(A)$ *является конгруэнц-допустимой*;

б) *факторалгебра алгебры* A *по конгруэнции* $\rho_{C(A)}$, *порожденной россыпью* $C(A)$, *является редуцированной.*

Замечание 4.1.13 ([64, Замечание 1]). Теорема 4.1.12 показывает, что любая алгебра многообразия $\mathcal{V}$, трансвербального по минимальным многообразиям, является расширением ее наибольшей полной россыпи при помощи редуцированной алгебры. Таким образом, многообразие $\mathcal{V}$ совпадает с $\mathcal{V}$-произведением $\mathcal{R} \circ_{\mathcal{V}} \mathcal{S}$, где класс $\mathcal{R}$ состоит из всех полных алгебр из $\mathcal{V}$, а класс $\mathcal{S}$ — из всех редуцированных алгебр из $\mathcal{V}$. Заметим, что, согласно утверждениям 1 и 2 работы [59], класс $\mathcal{R}$ является замкнутым относительно гомоморфных образов и расширений в $\mathcal{V}$, а, согласно утверждению 5 той же работы, класс $\mathcal{S}$ является предмногообразием, замкнутым относительно расширений в $\mathcal{V}$. Кроме того, отображение, ставящее в соответствие каждой алгебре A из $\mathcal{V}$ наибольшую полную конгруэнц-допустимую россыпь $C(A)$, удовлетворяет условиям аксиоматического определения радикала [53]. На самом деле этот радикал строгий в смысле [52], так как $C(A)$ содержит любую полную россыпь алгебры A. Таким образом, в многообразии $\mathcal{V}$ определен строгий радикал $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ (в смысле Куроша).

Условимся для любого многообразия $\mathcal{V}$ алгебр наибольшую конгруэнц-допустимую россыпь $C(A)$ алгебры A из $\mathcal{V}$, в случае ее существования, называть *полным радикалом алгебры* A, если факторалгебра $A/\rho_{C(A)}$ является редуцированной. Если все алгебры из $\mathcal{V}$ имеют полный радикал, то будем говорить, что *многообразие* $\mathcal{V}$ *обладает полным радикалом.*

Замечание 4.1.14 ([64, Замечание 2]). В любой алгебре A из многообразия $\mathcal{V}$ алгебр с единственным выделенным идемпотентом наибольшая полная россыпь состоит из одной компоненты — наибольшей полной подалгебры $C(A)$, — которая совпадает с подалгеброй алгебры A, порожденной всеми ее полными подалгебрами. Поскольку ввиду факта 4.1.2 гомоморрфный образ полной алгебры есть полная алгебра, $C(A)$ — эндоморфно допустимая подалгебра в A. Согласно теореме 4.1.12, в случае, если $\mathcal{V}$ — трансверсально по минимальным многообразиям, то подалгебра $C(A)$ является конгруэнц-допустимой. В общем случае, как уже отмечалось в замечании 4.1.6, наибольшей полной подалгебры в алгебре A может и не быть.

Замечание 4.1.15. Как отмечалось выше, любое многообразие модулей над ненулевым ассоциативным кольцом R с единицей и любое многообразие групп являются транвербальными. По теореме 4.1.12 указанные многообразия обладают полным радикалом. Согласно замечанию 4.1.14 полный радикал модуля [группы] — это подмодуль [подгруппа], порожденная всеми полными подмодулями [подгруппами]. Обратим внимание на то, что полный радикал группы есть нормальная подгруппа.

Замечание 4.1.16 ([64, Замечание 4]). Любое многообразие ассоциативных [альтернативных, лиевых алгебр] над произвольным ненулевым ассоциативным и коммутативным кольцом R с единицей является трансвербальным по минимальным подмногообразиям и поэтому по теореме 4.1.12 обладает полным радикалом (для йордановых алгебр вопрос о наличии полного радикала остается открытым). Полный радикал $C(A)$ любой алгебры A из указанных многообразий является ее идеалом, совпадающим с подалгеброй, порожденной всеми полными подалгебрами алгебры A.

4.2. Редуцированнные алгебры

В этом подразделе приводятся результаты работ автора [59, 63]. Первые три утверждения очевидны.

Факт 4.2.1. *Подалгебра редуцированной алгебры является редуцированной алгеброй.*

Факт 4.2.2. *Алгебра A является редуцированной тогда и только тогда, когда для любой ее нетривиальной подалгебры B существует такой атом $\mathcal{P}$ решетки $L(\mathcal{V})$, что $\mathcal{P}(B) \neq B$.*

Факт 4.2.3. *Многообразие $\mathcal{V}$ алгебр является редуцированным тогда и только тогда, когда для любой ее нетривиальной алгебры A существует такой атом $\mathcal{P}$ из $L(\mathcal{V})$, что $\mathcal{P}(A) \neq A$.*

Предложение 4.2.4 ([59, Утверждение 5]). *Класс всех редуцированных алгебр многообразия $\mathcal{V}$ является предмногообразием, замкнутым относительно расширений в $\mathcal{V}$.*

Прежде чем сформулировать следующее утверждение определим некоторые понятия. Россыпь D из $S(A)$ будем называть *нормальной* в A, если $\mathrm{D} = ker(\tau)$ для некоторой конгруэнции алгебры A. Пусть A, B — россыпи. Будем говорить, что B является нормальной в A и писать $\mathrm{B} \trianglelefteq \mathrm{A}$, если любой компоненты C из A множество всех ее подалгебр, принадлежащих B, образуют нормальную россыпь в C. Если $\mathrm{B} \trianglelefteq \mathrm{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ и $\{\rho_i \mid i \in I\}$ — соответствующее множество конгруэнций на алгебрах A_i $(i \in I)$, то россыпь $\{A_i/\rho_i \mid i \in I\}$ будем называть фактор россыпью A по B и обозначать посредством A/B.

Убывающий ряд россыпей из $S(A)$:

$$A = \mathrm{D}_0 \triangleright \mathrm{D}_1 \triangleright \cdots \mathrm{D}_\alpha \triangleright \mathrm{D}_{\alpha+1} \triangleright \cdots \triangleright \mathrm{D}_\beta = \mathrm{E}_A, \tag{4.2.1}$$

называется нормальным, если $\mathrm{D}_{\alpha+1} \triangleright \mathrm{D}_\alpha$ для $\alpha+1 \leq \beta$ и $\mathrm{D}_\alpha = \wedge_{\delta<\alpha}\mathrm{D}_\delta$ для любого предельного ординала α (здесь знак $\wedge$ обозначает пересечение в решетке $S(A)$). Если условие $\mathrm{D}_{\alpha+1} \triangleright \mathrm{D}_\alpha$ заменить на бoлеее сильное требование $\mathrm{D}_{\alpha+1} \triangleright A$ для любого ординала $\alpha \leq \beta$, то получим определение нормального ряда россыпей алгебры A. Если факторы $\mathrm{D}_\alpha/\mathrm{D}_{\alpha+1}$ ряда (4.2.1) принадлежат многообразию $\mathcal{X}$ для любого ординала $\alpha < \beta$, то мы называем его $\mathcal{X}$-разрешимым рядом. Очевидно, что любая $\mathcal{X}$-разрешимая алгебра ступени γ имеет $\mathcal{X}$-разрешимый субнормальный ряд:

$$A = \mathcal{X}^0(A) \triangleright \mathcal{X}^1(A) \triangleright \cdots \triangleright \mathcal{X}^\alpha(A) \triangleright \cdots \triangleright \mathcal{X}^\gamma(A) = \mathrm{E}_A. \tag{4.2.2}$$

Для любого ординала β через $W(\beta)$ обозначим множество всех ординалов, меньших β, а через $\overline{W}(\beta)$ — множество всех непредельных ординалов $\leq \beta$. Заметим, что $W(\beta)$ и $\overline{W}(\beta)$ суть вполне упорядоченные множества относительно естественного порядка ординалов.

Пусть β — ординал и каждому $\alpha \in \overline{W}(\beta)$ поставлено в соответствие многообразие $\mathcal{X}_\alpha \in L(\mathcal{V})$, т. е. задана последовательность (необязательно различных) многообразий решетки $L(\mathcal{V})$):

$$\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_\alpha, \ldots (\alpha < \beta) \tag{4.2.3}$$

Будем говорить, что ряд (4.2.1) является редуцированным последовательностью (4.2.3), если фактор $\mathrm{D}_\alpha/\mathrm{D}_{\alpha+1}$ принадлежит $\mathcal{X}_\alpha$ для любого $\alpha \in W(\beta)$. Если ряд (4.2.1) является редуцированным последовательностью (4.2.3) и для каждого $\alpha \in W(\beta)$ имеет место $\mathcal{X}(\mathrm{D}_\alpha) = \mathrm{D}_{\alpha+1}$, то будем называть ряд (4.2.1) в этом случае *вербальным рядом, индуцированным последовательностью* (4.2.3) и пользоваться обозначением:

$$A = \mathrm{X}_0 \triangleright \mathrm{X}_1 \triangleright \cdots \mathrm{X}_\alpha \triangleright \mathrm{X}_{\alpha+1} \triangleright \cdots \triangleright \mathrm{X}_\beta = \mathrm{E}_A. \tag{4.2.4}$$

Ясно, что если все члены последовательности (4.2.3) равны между собой и равны многообразию $\mathcal{X}$, то ряд (4.2.4) превращается в ряд (4.2.2). В частности, $\mathcal{X}$-разрешимая алгебра есть алгебра, редуцированная последовательностью, в которой все члены равны $\mathcal{X}$.

Предложение 4.2.5 ([63]). *Алгебра A является редуцированной тогда и только тогда, когда A обладает вербальным (эквивалентно, субнормальным) рядом, редуцированным некоторой последовательностью атомов из $L(\mathcal{V})$.*

Следствие 4.2.6. *Алгебра A является конечно редуцированной тогда и только тогда, когда A обладает конечным вербальным (эквивалентно, субнормальным) рядом, редуцированным некоторой конечной последовательностью атомов из $L(\mathcal{V})$.*

Замечание 4.2.7. Если $\mathcal{V}$ является $\mathcal{V}$-произведением конечного числа атомов решетки $L(\mathcal{V})$, то $\mathcal{V}$ — редуцированное многообразие.

Замечание 4.2.8 ([59, Замечание 4]) Если решетка $L(\mathcal{V})$ 1-атомного многообразия $\mathcal{V}$ содержит конечное число атомов и $\mathcal{V}$-произведение всех атомов является многообразием, то последнее обязано совпадать с $\mathcal{V}$. В самом деле, это произведение содержит каждый атом решетки $L(\mathcal{V})$, а поэтому и их объединение в этой решетке. Это означает, в частности, что в этом случае многообразие $\mathcal{V}$ является редуцированными.

4.3. Примарные алгебры

В этом подразделе приводятся результаты работы автора [59], касающиеся изучения примарных алгебр и проблемы 3.1 описания примарных многообразий алгебр.

Первые три утверждения очевидны.

Факт 4.3.1. *Многообразие $\mathcal{V}$ является примарным по атому $\mathcal{P}$ решетки $L(\mathcal{V})$ тогда и только тогда, когда все моногенные алгебры из $\mathcal{V}$ примарны по $\mathcal{P}$.*

Факт 4.3.2. *Подалгебра примарной алгебры является примарной алгеброй.*

Факт 4.3.3. *Многообразие $\mathcal{V}$ алгебр идемпотентов является примарным по любому атому решетки $L(\mathcal{V})$.*

В частности, любое многообразие решеток является примарным.

Предложение 4.3.4 ([59, Утверждение 6]). *Для любого атома $\mathcal{P}$ решетки $L(\mathcal{V})$ прямое произведение конечного множества $\mathcal{P}$-алгебр из $\mathcal{V}$ является $\mathcal{P}$-алгеброй.*

Предложение 4.3.5 ([59, Утверждение 7]). *Если решетка $L(\mathcal{V})$ содержит по меньшей мере два различных атома и свободные в них моногенные алгебры являются нетривиальными, то $\mathcal{V}$ не является примарным многообразием.*

Это утверждение показывает, что примарное многообразие алгебр является, как правило, предполным.

Предложение 4.3.6 ([59, Утверждение 8]). *Если $\mathcal{V}$ примарно по $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}$ состоит из алгебр идемпотентов, то $\mathcal{V}$ есть многообразие алгебр идемпотентов.*

Следствие 4.3.7. *Если $\mathcal{P}$ — единственный атом решетки $L(\mathcal{V})$, состоящий из идемпотентных алгебр, и многообразие $\mathcal{V}$ примарно по $\mathcal{P}$, то $\mathcal{V}$ является $\mathcal{P}$-предполным многообразием алгебр идемпотентов.*

Замечание 4.3.8 ([59, Замечание 2]). В общем случае гомоморфный образ $\mathcal{P}$-алгебры не является $\mathcal{P}$-алгеброй. В самом деле, очевидно, что свободный моногенный моноид является примарным по многообразию $\mathcal{S}^1$ полурешеток с единицей, так как он 1-$\mathcal{S}^1$-разрешим. Но среди его гомоморфных образов — все циклические группы, которые являются $\mathcal{S}^1$–полными.

Замечание 4.3.9 ([59, Замечание 3]). В общем случае расширение примарной по $\mathcal{P}$ россыпи при помощи $\mathcal{P}$-алгебры не является $\mathcal{P}$-алгеброй. Действительно, пусть $\mathcal{V}$— многообразие всех группоидов с нулем 0, $\mathcal{P} := \mathcal{Z} = var\{xy = 0\}$ и группоид $G = \{a, b, c, 0\}$ задан следующим умножением: $ab = a, ba = b, ac = b, c^2 = a$, а все остальные произведения считаем равными 0. Тогда, с одной стороны, для $T := G^2 = \{a, b, 0\}$ имеем $T^2 = T$ и, следовательно, $\mathcal{P}^2(G) = \mathcal{P}(G) = T$, т. е. G не является $\mathcal{P}$-разрешимым. Поскольку G — моногенный группоид, порожденный элементом c, G не является $\mathcal{P}$-примарным группоидом. С другой стороны, идеал T группоида G и рисовский фактор G/T (см., напр., [14, с. 40]) являются $\mathcal{P}$-группоидами.

4.4. Чистые подалгебры

Результаты этого подраздела принадлежат О. В. Князеву, в работах которого [20, 21, 22, 38] исследуются проблемы 3.17, 3.18 и 3.19 о наследственной чистоте и наследственной вербальной чистоте для алгебр.

Следующее утверждение утверждение хорошо известно и очевидно.

Факт 4.4.1 *Полная алгебра является всюду чистой.*

В самом деле, если C — полная алгебра, то для любого атома $\mathcal{P}$ решетки $L(\mathcal{V})$ имеет место $\mathcal{P}(C) = C$. Если $C \preceq A$, то очевидное соотношение $\mathcal{P}(C) \preceq \mathcal{P}(A)$ в решетке $S(A)$ россыпей алгебры A влечет $C \preceq \mathcal{P}(A)$, а следовательно, и равенство $\mathcal{P}(C) = C = C \wedge \mathcal{P}(A)$.

Факт 4.4.2 ([20, Утверждение 1]). *Пусть $C \preceq B \preceq A$. Тогда выполнены следующие условия:*

(1) *если C является $\mathcal{X}$-чистой в B, а B является $\mathcal{X}$-чистой в A, то C является $\mathcal{X}$-чистой в A;*

(2) *если C является $\mathcal{X}$-чистой в A, то C является $\mathcal{X}$-чистой в B.*

Следствие 4.4.3. *Любая подалгебра наследственно чистой [вербально чистой] алгебры является наследственно чистой [вербально чистой] алгеброй.*

Факт 4.4.4 ([20, Утверждение 2]). *Если B — подалгебра наследственно $\mathcal{X}$-чистой алгебры A, то любая подалгебра C алгебры $\mathcal{X}(B)$ является $\mathcal{X}$-полной.*

Факт 4.4.5 ([20, Утверждение 3]). *Любая алгебра из атома $\mathcal{P}$ решетки $L(\mathcal{V})$ является наследственно вербально чистой.*

Напомним, что подалгебра S алгебры A называется *ретрактом* алгебры A, если существует гомоморфизм $\theta : A \to S$ такой, что $\theta(s) = s$ для любого $s \in S$. В частности, если S — прямой множитель для A, то S — ретракт алгебры A.

Предложение 4.4.6 ([20, Предложение 1]). *Если S — ретракт алгебры A, то S является наследственно вербально чистой в A.*

Заметим, что в работе [23] построен пример полугруппы, содержащей собственную чистую подполугруппу, которая не является ретрактом.

Предложение 4.4.7 ([20, Предложение 2]). *Пусть замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и подалгебр класс алгебр $\mathcal{K}$ из $\mathcal{V}$ такой, что $\mathcal{X} \cap \mathcal{K} = \mathcal{E}$. Тогда все алгебры из $\mathcal{V}$-произведения $\mathcal{X} \circ_{\mathcal{V}} \mathcal{K}$ являются наследственно $\mathcal{K}$-чистыми.*

Предложение 4.4.8 ([20, Предложение 3]). *Пусть $\mathcal{C}_{\mathcal{X}}$ — класс всех наследственно $\mathcal{X}$-полных алгебр из $\mathcal{V}$. Тогда A является наследственно $\mathcal{X}$-чистой алгеброй тогда и только тогда, когда $A \in \mathcal{C}_{\mathcal{X}} \circ_{\mathcal{V}} \mathcal{X}$.*

Следствие 4.4.9 ([20, Следствие 2]). *Все алгебры из $\mathcal{V}$ являются наследственно чистыми [вербально чистыми] тогда и только тогда, когда для любого $\mathcal{X} \in At(L(\mathcal{V}))$ [$\mathcal{X} \in L(\mathcal{V})$] справедливо равенство $\mathcal{C}_{\mathcal{X}} \circ_{\mathcal{V}} \mathcal{X} = \mathcal{V}$.*

В нижеследующих утверждениях, если нет оговорок, $\mathcal{V}$ обозначает многообразие алгебр с выделенным идемпотентом, $\mathcal{X}$ — его подмногообразие. Элемент a алгебры A называется $\mathcal{X}$-полным, если $\mathcal{X}(\langle a \rangle) = \langle a \rangle$. Множество $\mathcal{X}$-полных элементов алгебры A обозначается через $\mathrm{C}_{\mathcal{X}}(A)$.

Предложение 4.4.10 ([21, Предложение]). *Алгебра A является наследственно $\mathcal{X}$-чистой тогда и только тогда, когда $\mathrm{C}_{\mathcal{X}}(A) = \mathcal{X}(A)$.*

Следствие 4.4.11 ([21, Следствие 1]). *Если A —наследственно $\mathcal{X}$-чистая алгебра, то множество $\mathrm{C}_{\mathcal{X}}(A))$ является подалгеброй алгебры A.*

Следствие 4.4.12 ([21, Следствие 2]). *Алгебры произведения $\mathcal{C}_{\mathcal{X}} \circ_{\mathcal{V}} \mathcal{X}$ и только они являются наследственно $\mathcal{X}$-чистыми алгебрами многообразия $\mathcal{V}$.*

Следствие 4.4.13 ([21, Следствие 3]). *Если многообразие $\mathcal{X}$ содержит все моногенные алгебры многообразия $\mathcal{V}$, то алгебры произведения $\mathcal{E} \circ_{\mathcal{V}} \mathcal{X}$ и только они являются наследственно $\mathcal{X}$-чистыми алгебрами многообразия $\mathcal{V}$.*

Теорема 4.4.14 ([22, Теорема]). *Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие алгебр с выделенным идемпотентом и каждая моногенная алгебра $\langle a\rangle$ из $\mathcal{V}$ является свободной в многообразии* $\mathrm{var}(\langle a\rangle)$. *Тогда для любой алгебры A из $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *A — наследственно вербально чистая алгебра;*

(2) *A — наследственно чистая алгебра;*

(3) *каждая моногенная подалгебра из A является вербально чистой подалгеброй в A;*

(4) *каждая моногенная подалгебра из A является чистой подалгеброй в A;*

(5) $A \in \bigcap_{\mathcal{X}\in L(\mathcal{V})}(\mathcal{C}_{\mathcal{X}} \circ_{\mathcal{V}} \mathcal{X})$;

(6) $A \in \bigcap_{\mathcal{P}\in At(L(\mathcal{V}))}(\mathcal{C}_{\mathcal{P}} \circ_{\mathcal{V}} \mathcal{P})$.

Замечание 4.4.15 ([22, Замечание]). Частным случаем теоремы 4.1.14 является совпадение классов наследственно чистых и наследственно вербально чистых алгебр в любом многообразии групп, моноидов и полугрупп с нулем. Этим самым для указанных многообразий решается проблема 3.18.

Прежде чем переходить к обзору результатов по исследованию обсуждаемых понятий для конкретных видов алгебр отметим, что мы будем интересоваться главным образом понятиями атомной полноты, редуцированности и чистоты. С другой стороны, примарные многообразия согласно предложению 4.3.4 часто содержатся среди предполных многообразий, решетка подмногообразий которых содержит единственный атом. К тому же периодические алгебры многообразия принадлежат конечным произведениям атомов решетки подмногообразий этого многообразия. Поэтому для облегчения восприятия и осознания приводимых результатов в соответствующих разделах их формулировкам будем зачастую предпосылать известные описания минимальных и предполных многообразий рассматриваемых там видов алгебр.

5. Группы

Понятия полноты, редуцированности и примарности для групп изучались в работах автора [62, 72, 74, 73], в работах Т. Ю. Финк [8, 9] и в совместной работе автора и Т. Ю. Финк [77]. Понятие чистоты — в работах О. В. Князева [24, 38] и в совместной работе автора и О.В.Князева [78].

Условимся относительно некоторых обозначений:

$\mathcal{G}$ — многообразие всех групп;

$\mathcal{A}^n$ — многообразие всех n-$\mathcal{A}$-разрешимых групп;

$\mathcal{B}_m$ — бернсайдовское многообразие групп экспоненты m;

$\mathcal{K}_p$ — кострикинское многообразие локально конечных групп простой экспоненты p.

Нижеследующие два утверждения хорошо известны и очевидны.

Факт 5.1. *Атомы решетки $L(\mathcal{G})$ исчерпываются многообразиями $\mathcal{A}_p$ по всем простым p.*

Факт 5.2. *Многообразие $\mathcal{V}$ групп является предполным тогда и только тогда, когда $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}_{p^k}$ для некоторых $k,\ p$.*

Следующее утверждение, решающее проблему 3.1 для групп, следует из легко проверяемого совпадения для групп наших и обычных понятий периодической и примарной группы.

Предложение 5.3 ([72, Теорема 1]. *Многообразие $\mathcal{V}$ групп является примарным [периодическим] тогда и только тогда, когда $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}_{p^n}$ [$\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}_m$] для некоторых m, n и p.*

Следствие 5.4. *Многообразие $\mathcal{V}$ абелевых групп является примарным [периодическим] тогда и только тогда, когда $\mathcal{V} = \mathcal{A}_{p^n}$ [$\mathcal{V} = \mathcal{A}_m$] для некоторых m, n и p.*

Следующее утверждение, использующее при доказательстве общую теорему 4.1.7, решает проблему 3.2 для групп.

Теорема 5.3 ([73, 74, Теорема 1]. *Многооообразие $\mathcal{V}$ групп является редуцированным тогда и только тогда, когда $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}^n \cap \mathcal{B}_m$ для некоторых m и n.*

Следствие 5.6. *Любое собственное многооообразие абелевых групп является редуцированным.*

Замечание 5.7. Теорема 5.5 показывает, как нетрудно понять, что нетривиальные редуцированные многообразия групп — это в точности многообразия групп, разложимые в $\mathcal{G}$-произведение атомов решетки $L(\mathcal{G})$. В частности, они образуют подполугруппу S полугруппы $(L(\mathcal{G}), \circ_{\mathcal{G}})$. Так как последняя является свободной полугруппой с нулем и единицей [83, 96], легко осознать, что S — свободная полугруппа с единицей.

Укажем на одно применение теоремы 4.1.7 к теории групп. Следующее утверждение интересно в связи с актуальным в свое время вопросом о существовании локально конечных p-групп, совпадающих со своим коммутантом. Используя результаты работы [90] о неразрешимости многооообразий $\mathcal{K}_p$ для $p > 3$, мы усиливаем результаты работ [54, 103, 40] о существовании таких групп требованием нетривиальности их центра.

Следствие 5.8 ([62, Следствие 3]). *Для любого простого $p > 3$ существует $\mathcal{A}$-полная локально конечная группа экспоненты p с нетривиальным центром:*

$$C = \langle c_0, c_1, \cdots \mid [c_{2n+1}, c_{2n+2}] = c_n, [c_0, c_n] = e \rangle_{\mathcal{K}_p}.$$

Некоторую информацию по проблеме 3.3 для псевдомногообразий конечных групп дает следующее утверждение.

Предложение 5.9 ([9]). *Псевдомногообразия конечных групп, порожденные любым множеством разрешимых конечных групп и минимальных простых конечных групп, являются расщепляемыми.*

Следующее утверждение решает проблему 3.3 для групп для понятия сильной расщепляемости многообразий.

Теорема 5.10 ([77, Теорема 1]. *Многообразие $\mathcal{A}$ всех абелевых групп является единственным сильно расщепляемым нередуцированным многообразием групп.*

Заметим, что теорема 5.10 показывает исключительность многообразия $\mathcal{A}$ среди групповых многообразий относительно свойства сильной расщепляемости.

Следующее утверждения решает одновременно проблемы 3.17, 3.27 и 3.28 для групп.

Предложение 5.11 ([38, Предложение 2]. *Группа является наследственно [вербально] чистой тогда и только тогда, когда она есть элементарная абелева группа.*

Заметим, что частным случаем этого утверждения является упоминавшиеся в разделе 2 результаты [12, 19], в которых описываются наследственно сервантные и слабо сервантные абелевы группы.

Нижеследующее утверждение несет информацию по исследованию проблемы 3.22 для периодических групп.

Теорема 5.12 ([24, Теорема]. *Периодическая группа G не имеет собственных чистых циклических подгрупп тогда и только тогда, когда G —- полная периодическая группа или G — циклическая p-группа.*

Наконец, следующее утверждение содержит информацию по исследованию проблемы 3.20 для групп.

Теорема 5.13 ([78, Теорема]. *Если в конечной группе G любая чистая подгруппа выделяется прямым множителем, то группа G есть прямое произведение конечных циклических p-групп и попарно не изоморфных минимально полных конечных групп.*

6. Модули

Систематическое изучение обсуждаемых здесь понятий примарности, полноты и редуцированности для модулей начато в статье автора [65]. Там же подмечена связь между многообразиями модулей и идеалами кольца, над которым эти модули рассматриваются. Это позволяет для модулей определить соответствующие понятия более привычными образом, что облегчает изложение и восприятие. В дальнейшем А. И. Корневым в работах [42]—[47] активно исследовалось для модулей понятие чистоты и сопутствующее ему понятие минимальной полноты, В. В. Овчинниковым в статьях [84, 85] — понятие полноты, А. А. Туганбаевым в работе [102] — модифицированные понятия полноты, редуцированности и чистоты. В указанных работах получен ряд новых интересных результатов в теории модулей, что оказалось неожиданным для автора этого обзора, так как аналоги понятий теории абелевых групп давно рассматривались в теории модулей. На наш взгляд, это следствие указанного во введении подхода к развитию структурной теории алгебр с точки зрения многообразий.

Пусть R — (ассоциативное) кольцо с $1 \neq 0$. Всюду ниже под *модулем* понимается левый унитарный модуль над R (R-модуль), под *идеалом* кольца R — его *двусторонний идеал.* Пусть $Mod(R)$ — многоообразие всех модулей, $L_I(R)$ — решетка идеалов кольца R. Напомним, что отображение $\mathcal{V} \mapsto V$, где $\mathcal{V}$ — многоообразие модулей, а $V := Ann(\mathcal{V}) = \{r \in R | (\forall A \in \mathcal{V}) rA = 0\}$ — аннулятор $\mathcal{V}$, есть антиизоморфизм решетки $L(Mod(R))$ на решетку $L_I(R)$. В частности, при этом соответствии атомам решетки $L(Mod(R))$ соответствуют максимальные идеалы кольца R. Очевидно, что $\mathcal{V}$ порождается как многоообразие модулем R/V (т. е. $\mathcal{V} = var(R/V)$) и определяется системой тождеств $Vx = O := \{vx = 0 \mid v \in V\}$ (т. е. $\mathcal{V} = var(Vx = O)$). Ясно, что решетка $L(\mathcal{V})$ изоморфна решетке $L_I(R/V)$.

Понятно, что для любого модуля A его $\mathcal{V}$-вербал есть подмодуль VA и для любого $n > 0$ имеет место $\mathcal{V}^n(A) = V^n A = \{\sum_{i=1}^n v_i a_i \mid v_i \in V^n,\ a_i \in A\}$. Таким образом обсуждаемые здесь понятия могут быть определены более привычным образом. А именно, модуль C называется полным, если $PC = C$ для любого максимального идеала P кольца R. Подмодуль S модуля A называется чистым, если $PS = PA \cap S$ для любого максимального идеала P из R.

Ввиду отмеченного выше соответствия между атомам решетки $L(Mod(R))$ и максимальными идеалами кольца R, а также понятного изоморфизма полугрупп $(L(Mod(R)); \circ_{Mod(R)})$ и $(L_I(R); \cdot)$, наши понятия периодического и примарного модуля можно определить более привычным образом. А именно, в соответствии с основными определениями раздела 2 модуль A называется *периодическим*, если для любого элемента a модуля A существует такой конечный набор (не обязательно различных) максимальных идеалов $P_1, P_2, ..., P_n$ кольца R, что $P_1P_2...P_na = 0$. Модуль A называется *примарным*, если найдется такой максимальный идеал P кольца R, что для любого элемента a из A существует натуральное n такое, что $P^na = 0$.

Радикал Джекобсона кольца R обозначается $J(R)$. Термин *полупростое кольцо* будет использоваться всюду в дальнейшем в смысле *полупростое по Джекобсону кольцо*, т. е. кольцо с нулевым радикалам Джекобсона. Напомним, что (двусторонний) идеал I кольца R называется (право) *T-нильпотентным*, если для любой последовательности $\{a_n\}$ элементов из I можно найти такое n, что $a_1a_2 \dots a_n = 0$. Кольцо R называется *совершенным слева*, если его радикал Джекобсона $J(R)$ является T-нильпотентным и $R/J(R)$ — классически полупростое кольцо, т. е. есть конечная прямая сумма колец матриц над подходящими телами. Кольцо R называется *локальным*, если R имеет единственный максимальный идеал. В частности, любое простое кольцо с единицей является локальным. Будем говорить, что R — *полулокальное кольцо*, если множество всех максимальных идеалов кольца R кончено. Кольцо R называется *регулярным* (в смысле Неймана), если для любого элемента $x \in R$ существует такой элемент $x' \in R$, что $xx'x = x$.

Следующие два утверждения очевидны.

Факт 6.1. *Многоообразие $\mathcal{P}$ модулей является атомом решетки $L(Mod(R))$ тогда и только тогда, когда P — максимальный идеал в R.*

Факт 6.2. *Многоообразие $\mathcal{V}$ модулей является предполным тогда и только тогда, когда R/V — локальное кольцо.*

Следующее утверждение решает проблему 3.1 для понятия примарности для модулей над произвольным кольцом.

Предложение 6.3 ([65, Предложение 1]). *Многоообразие $\mathcal{V}$ модулей является примарным тогда и только тогда, когда R/V есть локальный кольцо с нильпотентным максимальным идеалом.*

Нижеследующее утверждение содержит некоторую информацию по проблеме 3.2 для модулей над произвольным кольцом.

Предложение 6.4 ([65, Предложение 2]. *Пусть $\mathcal{V}$ — многоообразие модулей и R/V — полулокальное кольцо. Многоообразие $\mathcal{V}$ является редуцированным тогда и только тогда, когда произведение всех максимальных идеалов из R является T-нильпотентным идеалом.*

Следующее утверждение, получаемое с использованием теоремы 4.1.7, дает некоторую информацию по проблеме 3.11 для модулей.

Предложение 6.5 ([65, Предложение 3]). *Пусть $\mathcal{P}$ — атом решетки*

$$L(Mod(R)).$$

Тогда $Mod(R)$ содержит квазимоногенный модуль типа $\mathcal{P}^{\infty}$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{p_n\}$ элементов из P такая,что $p_1p_2\dots p_n \notin P^{n+1}$ для любого n.

Напомним, что коммутативное кольцо R называется *дедекиндовым кольцом* (дедекиндовой областью) [108, с. 309], если R является областью целостности и любой его ненулевой идеал является произведением простых идеалов. Обратим внимание на то, кольцо $\mathbb{Z}$ целых чисел и любое поле являются дедекиндовыми кольцами. Полезно иметь в виду хорошо известные факты о том, что в дедекиндовом кольце любой простой идеал является максимальным идеалом [108, Теорема 10, с. 312], разложение ненулевого идеала в произведение простых идеалов однозначно [108, Следствие, с. 313], любое дедекиндово кольцо является нетеровым [108, Теорема 13, с. 315].

Следующее утверждение решает проблему 3.2 для модулей над дедекиндовыми кольцами.

Следствие 6.6 ([65, Следствие 5]). *Пусть R — дедекиндово кольцо. Тогда любое собственное многоообразие модулей является конечно редуцированным. Многообразие $Mod(R)$ является редуцированным тогда и только тогда, когда R есть поле.*

Нижеследующее утверждение решает проблема 3.27 для модулей над произвольным кольцом.

Предложение 6.7 ([42, Предложение 1]). *Для произвольного кольца R следующее условия эквивалентны:*

(1) любой простой модуль редуцирован;

(2) аннулятор любого простого модуля является максимальным идеалом кольца R.

(3) любой наследственно чистый модуль является редуцированным.

Следствие 6.8 ([42, Следствие 1]). *Если R — коммутативное кольцо, то любой наследственно чистый модуль является редуцированным.*

Некоторую информацию по проблеме 3.19 содержит следующее утверждение.

Предложение 6.9 ([42, Предложение 2]). *Если R — регулярное кольцо, то любой модуль над ним является наследственно чистым.*

Следствие 6.10 ([42, Следствие 2]) *Если R — регулярное кольцо, над которым любой простой модуль аннулируется некоторым максимальным идеалом, то любой модуль над R является редуцированным.*

Следующее утверждение содержит информацию по проблеме 3.15 для модулей.

Предложение 6.11 ([42, Предложение 3]). *Любой периодический модуль над коммутативным кольцом R является прямой суммой примарных модулей.*

Напомним, что топологическое пространство называется *индуктивно-нульмерным*, если оно имеет базис, состоящий из открыто-замкнутых множеств. Через $SpecR$ обозначается множество всех простых идеалов коммутативного кольца R с топологией Зарисского. Нильрадикал коммутативного кольцо R обозначается $N(R)$.

Следующее утверждение дает алгебраическую и топологическую характеристику наследственно чистых модулей над коммутативным кольцом R тем самым решает для них проблему 3.17.

Теорема 6.12 ([42, Теорема 1]). *Пусть R — коммутативное кольцо. Тогда следующее условия эквивалентны*:

(1) *модуль R является наследственно чистым*;

(2) *R — регулярное кольцо*;

(3) *$SpecR$ является индуктивно нульмерным пространством и $N(R) = 0$.*

(4) *любой модуль является наследственно чистым.*

В следующем утверждении находятся необходимые и достаточные условия для коммутативного кольца, при которых любой наследственно чистый над ним модуль является полупростым, и тем самым оно содержит информацию по проблемам 3.27 и 3.28 для этого случая.

Теорема 6.13 ([42, Теорема 2]). *Пусть R — коммутативное кольцо. Тогда следующее условия эквивалентны*:

(1)*любой наследственно чистый модуль является полупростым*;

(2) *любое индуктивно-нульмерное подпространство пространства $SpecR$ является конечным*;

(3) *для любого идеала I из R, если R/I — регулярное кольцо, то R/I — полупростое артиново кольцо.*

Следствие 6.14 ([42, Следствие 4]) *Если R — коммутативное нетерово кольцо, то любой наследственно чистый модуль является полупростым.*

Упоминавшиеся результаты работ [12, 19] являются частными случаями следствия 6.14.

Следствие 6.15 ([42, Следствие 5]). *Если R — полулокальное коммутативное кольцо, то любой наследственно чистый модуль является полупростым.*

Следующее утверждение решает проблему 3.2 для модулей над любым коммутативным кольцом.

Теорема 6.16 ([43, Теорема 1]). *Пусть R — коммутативное кольцо. Тогда многоообразие $\mathcal{V}$ модулей является редуцированным, если и только если, кольцо R/V удовлетворяет следующему условию*:

(*) *для любого максимального идеала P факторкольца R/V и для любой последовательности $\{p_n\}$ элементов из P существует такой элемент $s \notin P$, что $p_1 p_2 \dots p_k s = 0$ для некоторого k.*

Следствие 6.17 ([43, Следствие]). *Если R — коммутативное кольцо, то многообразие $Mod(R)$ является редуцированным тогда и только тогда, когда R удовлетворяет условию $(*)$.*

В связи с теоремой 6.16 возникает вопрос о характеризации коммутативных колец со свойством $(*)$. Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Предложение 6.18 ([43, Предложение]). *Коммутативное кольцо R обладает свойством $(*)$ тогда и только тогда, когда его радикал Джекобсона $J(R)$ является t-нильпотентным, а факторкольцо $R/J(R)$ регулярно.*

В работе [43] отмечается, что в случае коммутативных колец, многообразие $Mod(R)$ является редуцированным тогда и только тогда, когда любой его ненулевой модуль имеет максимальный подмодуль. Кольцо R называется (левым) *кольцом Басса* [2] (по другой терминологии — *max* кольцом), если любой ненулевой модуль над ним имеет максимальный подмодуль. В статьях [16, 41] охарактеризованы коммутативные кольца Басса: это в точности кольца R с T-нильпотентным радикалом Джекобсона $J(R)$, для которых факторкольца $R/J(R)$ являются регулярными. В ввиду предложения 6.18 свойство (*) дает новую характеризацию коммутативных колец Басса. Созвучными с результатами [16, 41] является основной результат работы [101], характеризующий кольца Басса в некотором классе некоммутативных колец, и следующие два утверждения работы [84], в которых одновременно содержится информация по проблеме 3.2 для модулей над некоммутативными кольцами. В последней работе кольцо R называется *регулярным справа*, если для любого $x \in R$ существует $y \in R$ такой, что $xy^2 = y$.

Теорема 6.19 ([84, Теорема 2]). *Пусть R — кольцо, в котором максимальный левый идеал содержит некоторый максимальный идеал. Тогда многообразие $Mod(R)$ является редуцированным тогда и только тогда, когда $J(R)$ является T-нильпотентным идеалом, а $R/J(R)$ — регулярное справа кольцо.*

Следствие 6.20 ([84, Следствие 5]). *Пусть R — кольцо, в котором любой максимальный левый идеал является максимальным идеалом. Тогда следующие условия являются эквивалентными*:

(1) *R — кольцо Басса*;

(2) *$J(R)$ является T-нильпотентным идеалом и $R/J(R)$ — регулярное справа кольцо.*

Доказательство теоремы 6.19 использует следующее утверждение, представляющее самостоятельный интерес в связи с проблемой 3.2 для модулей.

Предложение 6.21 ([84, Предложение]). *Пусть любой максимальный левый идеал M кольца R содержит максимальный идеал кольца R, $J(R)$ есть T-нильпотентный идеал и любой максимальный идеал P факторкольца $R/J(R)$ удовлетворяет условию: для каждого элемента p существует такой элемент $p' \in P$, что $p'p = p$. Тогда многообразие $Mod(R)$ является редуцированным.*

Следующие два утверждения содержат информацию о наличии в многообразии $Mod(R)$ полных ненулевых конечно порожденных модулей и тем самым дают информацию по проблеме 3.7 для модулей.

Теорема 6.22 ([84, Теорема 1]). *Многообразие $Mod(R)$ не содержит ненулевых конечно порожденных полных модулей тогда и только тогда, когда любой максимальный левый идеал M кольца R содержит максимальный идеал P кольца R.*

Следствие 6.23 ([84, Следствие 1]). *Если R — коммутативное кольцо, то $Mod(R)$ не имеет полных ненулевых конечно порожденных модулей.*

Следующее утверждение решают проблему 3.22 для редуцированных многообразий модулей над коммутативным кольцом.

Теорема 6.24 ([43, Теорема 2]). *Пусть R — коммутативное кольцо и $\mathcal{V}$ — редуцированное многообразие модулей. Тогда модуль S из $\mathcal{V}$ является простым по чистоте тогда и только тогда, когда S — циклический модуль и $R/ann(S)$ — локальное совершенное кольцо.*

Следствие 6.25 ([43, Следствие]). *Для любого модуля из редуцированного многообразия модулей над коммутативным нетеровым кольцом R следующие условия эквивалентны:*

1) *модуль является простым по чистоте;*

2) *модуль есть примарный циклический модуль.*

Нижеследующие два утверждения указывают на связь понятий инъективного модуля и полного модуля, т. е. дают некоторую информацию по проблеме 3.25 для модулей.

Теорема 6.26 ([44, Предложение 2]). *Для кольца R следующие условия являются эквивалентными*:

(1) *любой инъективный модуль является полным модулем*;

(2) *любой модуль изоморфно вкладывается в полный модуль*;

(3) *модуль R изоморфно вложим в полный модуль.*

Минимальным простым идеалом коммутативного кольца называется, как обычно, минимальный элемент множества всех его простых идеалов, упорядоченного отношением включения.

Теорема 6.27 ([44, Теорема 3]). *Если над коммутативным кольцом R все инъективные модули являются полными, то выполнены следующие условия:*

1) *любой максимальный идеал не является минимальным простым;*

2) *цоколь модуля R является нулевым подмодулем модуля R.*

Некоторые вопросы взаимосвязи понятий инъективности и чистоты для модулей обсуждаются в работе [46].

Следующие четыре утверждения посвящены изучению проблемы 3.10 и, как оказалось, связанной с ней проблемы 3.26. Отметим сначала очевидный факт о том, что любой минимально полный модуль является простым по чистоте. Модуль C называется *делимым*, если либо $rC = O$, либо $RrC = C$ для всех $r \in R$. Следующее утверждение содержит информацию по проблеме 3.26.

Теорема 6.28 ([44, Теорема 1]). *Пусть R — коммутативное кольцо. Тогда следующие условия являются эквивалентными*:

(1) *$Mod(R)$ — минимально нередуцированное многообразие*;

(2) *R — область целостности и каждый полный модуль является делимым*;

(3) *R — область целостности и поле частных $Q(R)$ — минимально полный модуль.*

Следуя [44], назовем минимально полный модуль C *модулем первого типа*, если для любого ненулевого элемент c и любого $r \in R$ равенство $rc = 0$ влечет $rC = 0$. Минимально полный модуль, который не является модулем первого типа, будем называть *модулем второго типа.* Как показывает следующее утверждение, минимально полные модули первого типа являются аналогами аддитивной групп $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

Предложение 6.29 ([44, Предложение 1]). *Пусть R — коммутативное кольцо. Тогда минимально полный модуль C первого типа изоморфен полю частных области целостности $R/ann(C)$ как модулю.*

Следующее утверждение содержит свойства, аналогичные свойствам квазициклических абелевых групп (минимально полных $\mathbb{Z}$-модулей второго типа).

Теорема 6.30 ([44, Теорема 2]). *Пусть R — коммутативное кольцо. Минимально полный модуль C второго типа имеет следующие свойства*:

(1) *существует максимальный идеал M кольца R такой, что для каждого ненулевого $c \in C$ имеет место $ann(c) \subseteq M$*;

(2) *C является объединением любой бесконечной счетной возрастающей цепи циклических подмодулей*;

(3) *для любого $c \in C$ факторкольцо $R/ann(c)$ является локальным совершенным кольцом.*

Некоторая информация о минимально полных модулях содержится в следующем утверждении.

Теорема 6.31 ([85, Теорема]). *Если R — коммутативное локальное кольцо, $J(R)$ не является T-нильпотентным идеалом и $J(R)$ является конечно порожденным как идеал, то многообразие $Mod(R)$ содержит минимально полные модули.*

Следующее два утверждение работы [45] решают проблему 3.19 для модулей над произвольным кольцом.

Теорема 6.32 ([45, Теорема 1]). *Многообразие $Mod(R)$ является наследственно чистым тогда и только тогда, когда кольцо R удовлетворяет следующему условию:*
($*$) *для любого максимального идеала P из R и каждого $x \in P$ существует такой элемент $x' \in P$, что $x'x = x$.*

Следствие 6.35 ([45, Следствие 3]). *Если многообразие $Mod(R)$ является наследственно чистым, то для любого идеала I кольца R многообразие $Mod(R/I)$ является наследственно чистым.*

Кольцо R называется M-*кольцом*, если любой левый максимальный идеал кольца является идеалом в R. M-кольцо R называется *обобщенно дедекиндовым* или GD-кольцом, если для любого максимального идеала M из R выполнены следующие условия:
(1) M/M^2 является простым R-модулем;
(2) $M^n \neq M^{n+1}$ для всех натуральных чисел n;
(3)$\bigcap_{n=1}^{\infty} M^n = O$.
В работах Бицана [3, 4] и автора [66, 60] многие важные результаты теории примарных абелевых групп перенесены на модули над GD-кольцами. Следующее утверждение продолжает эту аналогию, решая при этом для этого случая проблему 3.10. Кроме того, оно содержит информацию по проблеме 3.11 для модулей.

Теорема 6.36 ([47, Теорема 3.3.11]). *Для каждого максимального идеала P коммутативного GD-кольца R существует в точности один минимально полный модуль второго типа, который является квазимоногенным модулем типа P^{∞}.*

Заметим, что до сих пор является открытым вопрос автора и И. В. Львова [67]: существует ли локальные коммутативные не нетеровы GD-кольца? Нетрудно понять, что локальное коммутативное нетерово GD-кольцо является кольцом дискретного нормирования.

Напомним, что понятия (атомной) полноты и чистоты для модулей определяются с помощью множества $\mathfrak{M}$ всех максимальных идеалов кольца R. Согласно общей схеме, указанной в конце раздела 2 перед таблицей 1, рассмотрев вместо множества $\mathfrak{K}$ многообразий алгебр любое множество $\mathfrak{T}$ идеалов кольца R, можно получить модификации указанных понятий. Таким образом, модуль C называется $\mathfrak{T}$-*полным*, если $TC = C$ для любого $T \in \mathfrak{T}$. Подмодуль S модуля A называется $\mathfrak{T}$-*чистым*, если $T = M \cap TS$ для любого $T \in \mathfrak{T}$.

В заключение этого подраздела приведем результаты статьи [102], в которой эта идея реализована. В ней наряду с множеством $\mathfrak{M}$ рассматривается множество $\mathfrak{P}$ всех примитивных идеалов кольца R. К тому же вместо коммутативных колец в этой работе рассматриваются кольца с полиномиальным тождеством. Тем самым обобщаются некоторые из приведенных выше результатов для коммутативных колец. При формулировке результатов упомянутой работы будем использовать принятую здесь терминологию и соглашения. В частности, по-прежнему, если нет оговорок, будем рассматривать левые модули (в [102] действие кольца на модуль предполагается справа). Напомним, что собственный идеал T кольца R называется (лево) *примитивным*, если T является аннулятором простого модуля (т. е., если существует максимальный левый идеал L кольца R такой, что T есть наибольший идеал кольца R, содержащийся в L). В частности, любой максимальный идеал кольца R является примитивным идеалом. Для определении примитивной полноты и чистоты достаточно вместо множества $\mathfrak{T}$ из предыдущего абзаца взять множества $\mathfrak{P}$ всех примитивных идеалов кольца R.

Кольцо R называется в работе [102] *PI-кольцом* (или *кольцом с полиномиальным тождеством*), если R удовлетворяет полиномиальному тождеству $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, где $f(x_1, \ldots, x_n)$ является полиномом от некоммутирующих переменных с коэффициентами из кольца $\mathbb{Z}$ целых чисел и $\mathbb{Z}$ совпадает с идеалом, порожденным коэффициентами полинома $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Теорема 6.36 ([102, Теорема 1]). *Пусть R является либо PI-кольцом, либо M-кольцом. Тогда следующее условия являются эквивалентными*:

(i) *R — регулярное кольцо*;
(ii) *все модули являются наследственно примитивно чистыми*;
(iii) *все модули являются наследственно чистыми*;
(iv) *все главные левые идеалы кольца R являются примитивно чистыми*;
(v) *все главные левые идеалы кольца R являются чистыми.*

Теорема 6.37 ([102, Теорема 2]). *Для PI-кольца R следующие условия эквивалентны*:

(i) *все простые идеалы кольца R являются максимальными идеалами и радикал Джекобсона $J(A)$ является право или лево T-нильпотентным идеалом*:
(ii) *не существует ненулевых примитивно полных левых R–модулей*;
(iii) *не существует ненулевых примитивно полных левых R–модулей*;
(iv) *не существует ненулевых полных правых R–модулей*;
(v) *не существует ненулевых полных левых R–модулей*;
(vi) *R — правое кольцо Басса*;
(vii) *R — левое кольцо Басса.*

В заключение этого раздела, заметим, что обсуждаемые здесь понятия более приспособлены для модулей над M-кольцами (в частности, над коммутативными кольцами). Напомним, что атому $\mathcal{P}$ решетки $L(Mod(R))$ соответствуют (двусторонний) максимальный идеал P кольца R. В случае некоммутативного кольца модуль R/P может быть устроен довольно сложно. В связи с этим для модулей возможна естественная модификация наших понятий, превращающаяся в известные понятия теории модулей, когда вместо множества $\mathfrak{M}$ всех максимальных идеалов кольца берется множество $\mathfrak{L}$ всех максимальных левых идеалов. Но при этом теряется связь с многообразиями модулей.

7. Моноассоциативные алгебры

Напомним, что алгебру называют моноассоциативной или алгеброй с ассоциативными степенями, если любая ее моногенная подалгебра ассоциативна. Условимся в этом разделе, если нет оговорок, под кольцом R понимать произвольное ненулевое ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, под модулем — левый унитарный R-модуль, а под алгеброй — моноассоциативную R-алгебру. Кольцо R будем называть кольцом операторов.

Автором изучались понятия примарности и редуцированности для моноассоциативных алгебр в работе [68], наследственной чистоты для ассоциативных колец в [69] и для алгебр над дедекиндовыми кольцами в статьях [70, 71]. Понятие полноты для конечных ассоциативных колец изучалось в совместной работе А. И. Корнева, Т. В. Павловой [48], понятие полноты и редуцированности для артиновых колец — в статьях Т. В. Павловой [86, 87], полного радикала групповых алгебр и колец в совместной работе А. И. Корнева, Т. В. Павловой [49] и в статье А. И. Корнева [50], матричных лиевых алгебр над любым кольцом — в работе И. В. Знаевой [107] и матричных ассоциативных колец — в статье Т. В. Павловой [88].

Ниже будем использовать следующие обозначения:

$Asd(R)$ — многообразие всех моноассоциативных алгебр;

$Ass(R)[Alt(R), Jord(R), Lie(R)]$ — многообразие всех ассоциативных [альтернативных, йордановых, лиевых] алгебр;

$\mathcal{Z} := var\{xy = 0\}$ — многообразие всех алгебр с нулевым умножением (абелевых алгебр);

$\mathcal{N}_k := var\{x^k = 0\}$ — многообразие всех нильалгебр индекса $\leq k$;

$\mathcal{V}$ — многообразие алгебр;

$\mathcal{P}$ — атом решетки $L(\mathcal{V})$;

$Ann(\mathcal{V}) := \{r \in R \mid (\forall A \in \mathcal{V}) rA = O\}$ — аннулятор многообразия $\mathcal{V}$ алгебр;

I — идеал кольца R;

P — максимальный идеал кольца R;

A^0 — алгебра, полученная из модуля заданием нулевого умножения или из алгебры A, заменой ее умножения на нулевое;

$\mathcal{S}_V^n$ — многообразием n-$\mathcal{Z}$-разрешимых алгебр, которые аннулируются идеалом V кольца R;

$F_P := R/P,\ \mathcal{F}_P := varF_P;\ Z_I := (R/I)^0,\ \mathcal{Z}_I := varZ_I = var\{Ix = 0,\ xy = 0\}$.

Простым R–полем будем называть поле над R, являющееся простым модулем над R. Понятно, что поля вида F_P являются простыми R–полями. Напомним, что ненулевая алгебра, не имеющая нетривиальных подалгебр, называется простейшей. Полезно иметь в виду описание таких алгебр, приведенное в работе автора [70, Лемма 8] для ассоциативных алгебр, но поскольку простейшая алгебра является моногенной, оно справедливо и для моноассоциативных алгебр: *алгебра является простейшей тогда и только тогда, когда она изоморфна либо простому R–полю F_P, либо алгебре Z_P для некоторого P*. Алгебру A, совпадающую со своим квадратом A^2, условимся называть *глобально идемпотентной*.

Приведем описание атомов решетки $L(Asd(R))$. Напомним, что для ассоциативных алгебр оно получено в работе [99], но справедливое, как отмечено в обзоре [1], и для моноассоциативных алгебр.

Факт 7.1 ([99]; [1, Теорема 12]). *Многообразиями* $\mathcal{Z_P} = var(R/P)^0 = var\{Px = 0,\ xy = 0\}$ *для всех максимальных идеалов* P *кольца* R *и* $\mathcal{F}_P = varF_P$ *для всех максимальных идеалов* P *конечного индекса в* R *исчерпываются атомы решетки* $L(Asd(R))$.

Условимся через $\mathbf{F}_P(R)$ обозначать множество всех многообразий вида $\mathcal{F}_P$ по всем максимальным идеалам P кольца R конечного индекса, а через $\mathbf{Z}_P(R)$ — множество всех многообразий вида $\mathcal{Z}_P$ по всем максимальным идеалам P кольца R. Понятно, что атомы решетки $L(\mathcal{V})$ произвольного многообразия $L(\mathcal{V})$ алгебр содержатся во множестве $\mathbf{F}_P(R) \cup \mathbf{Z}_P(R)$. Из факта 7.1 следует

Факт 7.2. *Множество всех атомов решеток* $L(Ass(R))$, $L(Alt(R))$, $L(Jord(R))$ *совпадает с множеством* $\mathbf{F}_P(R) \cup \mathbf{Z}_P(R)$, *а множество всех атомов решетки* $L(Lie(R))$ *совпадает с множеством* $\mathbf{Z}_P(R)$.

Очевидным следствием факта 7.1 является также нижеследующее утверждение для моноассоциативных колец.

Факт 7.3 ([100]). *Многообразиями* $\mathcal{F}_p = var\{px = 0, x^p = x, (xy)z = x(yz)\}$ *и* $\mathcal{Z}_p = var\{px = 0, xy = 0\}$ *по всем простым* p *исчерпываются атомы решетки* $L(Asd(\mathbb{Z}))$ *моноассоциативных колец.*

Перейдем теперь к формулировке результатов работы автора [68] по изучению понятий примарности и редуцированности для моноассоциативных алгебр. Следующее утверждение характеризует примарные многообразия моноассоциативных алгебр над произвольным кольцом R и тем самым решает для $Asd(R)$ проблему 3.1 для свойства примарности.

Теорема 7.4 ([68, Теорема 1]). *Многоообразие* $\mathcal{V}$ *моноассоциативных алгебр над произвольным кольцом является примарным тогда и только тогда, когда либо* $\mathcal{V} \subseteq var\{P^kx = 0, x^n = 0\}$ *для некоторых* k *и* n, *где* $V = Ann(\mathcal{V})$, P *— единственный максимальный идеал кольца* R, *содержащий* V, *либо* $\mathcal{V} \subseteq var\{Px = 0, x^{p^m} = x\}$, *где* P *— максимальный идеал конечного индекса,* p *является характеристикой конечного* R*-поля* R/P *и* p^m *есть порядок поля* R/P.

Заметим, что при доказательстве теоремы 7.4 используются результаты упоминавшихся работ [1], [99] по исследованию предполных многообразий алгебр.

Отметим одно следствие теоремы 7.4.

Следствие 7.5 ([68, Следствие 2]). *Многообразие алгебр над бесконечным полем является примарным тогда и только тогда, когда оно есть многообразие нильалгебр.*

Пересечение всех ненулевых идеалов алгебры называется ее *монолитом* (сердцевиной). Если монолит алгебры есть ненулевой идеал, то алгебру будем называть монолитной (подпрямо неразложимой). Обратим внимание на то, что обычная разрешимость алгебр — это конечная $\mathcal{Z}$-разрешимость в нашем смысле и поэтому условимся $\mathcal{Z}$-разрешимые алгебры называть просто разрешимыми.

Нижеследующее утверждение характеризует редуцированные подмногообразия многообразия $\mathcal{M}$ моноассоциативных алгебр специального вида над дедекиндовым кольцом и тем самым решает для него проблему 3.2.

Теорема 7.6 ([68, Теорема 2]). *Пусть* R *—дедекиндово кольцо,* $\mathcal{M}$ *— многообразие моноассоциативных алгебр со следующими свойствами*:

(1) *если монолит* M *алгебры* A *из* $\mathcal{M}$ *содержит ненулевой идемпотент* e, *то* $M^2 = M$;

(2) *если B — идеал в A, C — идеал в B и B/C — алгебра без нильпотентных элементов, то C — идеал в A;*

(3) *если монолит M алгебры A является простым R-полем, то $A = M$.*

Тогда многоообразие $\mathcal{V}$ алгебр из $\mathcal{M}$ является редуцированным, если и только если $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{S}_V^n \circ_{\mathcal{M}} \mathcal{F}$ для некоторого n, где $V = Ann(\mathcal{V})$, $\mathcal{S}_V^n$ — многообразие всех разрешимых (в обычном смысле) алгебр ступени $\leq n$, которые аннулируются идеалом V, $V = P_1^{i_1} P_2^{i_2} \dots P_k^{i_k}$ — каноническое разложение идеала V в произведение простых (максимальных) идеалов кольца R, $\mathcal{F}$ — многоообразие, порожденное множеством всех конечных R-полей из множества $\{R/P_1, R/P_2, \dots, R/P_k\}$.

Замечание 7.7. В конце работы [68] доказано, что условиям (1)–(3) теоремы 7.6 удовлетворяют многообразия $Ass(R)$, $Alt(R)$, $Jord(R)$ $(1/2 \neq R)$ и $Lie(R)$ над любым кольцом R операторов.

В работе [49], наряду с изучением понятий полноты и редуцированности для полугрупповых колец, вычисляется полный радикал группового кольца над конечными простыми полями (напомним, что в силу замечания 4.1.16 любое из многообразий $Ass(R)$, $Alt(R)$ и $Lie(R)$, где R — произвольное кольцо операторов, обладают полным радикалом), а также характеризуются редуцированные групповые кольца конечных групп над конечными простыми полями. Приведем соответствующие результаты.

Теорема 7.8 ([49, Теорема 1]). *Для ассоциативного кольца R с единицей и полугруппы S выполняются следующие условия:*

1) *если аддитивная группа $(R; +)$ кольца R полная, то полугрупповое кольцо RS является полным.*

2) *если $(R; +)$ не является полной группой, то RS — полное кольцо тогда и только тогда, когда R — полное кольцо, а S — глобально идемпотентная полугруппа, т. е. $S^2 = S$.*

В нижеследующих утверждениях G' обозначает коммутант группы G, а $G^{(n)}$ — подгруппу, порожденную n-ми степенями всех элементов группы G.

Теорема 7.9 ([49, Теорема 2]). *Пусть H — наибольшая $\mathcal{A}_p$-полная подгруппа группы $G'G^{(p-1)}$. Для группового кольца KG, где $K = GF(p)$, его полный радикал $C(K)$ совпадает с пополняющим идеалом ωH подгруппы H.*

Теорема 7.10 ([49, Теорема 3]). *Для группового кольца KG, где $K = GF(p)$, G — конечная группа, следующие условия эквивалентны:*

1) *KG — редуцированное кольцо;*

2) *$KG/J(KG) \cong \prod_{i \in I} K_i$ где $K_i \cong K$;*

3) *$G'G^{(p-1)}$ является p-группой.*

В работе [50] продолжается изучение полноты и редуцированности для ассоциативных колец. Нижеследующие три утверждения содержат основные результаты этой статьи.

Теорема 7.11 ([50, Теорема 1]). *Если ассоциативное кольцо R с единицей редуцировано, то группа $(R; +)$ редуцирована.*

Напомним, что согласно замечанию 4.1.15, любая группа G обладает полным радикалом $C(G)$.

Теорема 7.12 ([50, Теорема 2]). *Для произвольной группы G выполняется равенство $C(\mathbb{Z}G) = \omega(C(G))$.*

Теорема 7.13 ([50, Теорема 3]). *Для произвольных алгебры R над полем $GF(p)$ и группы G выполняется равенство $C(RG) = \omega H + C(R)G$, где H является наибольшей $\mathcal{A}_p$-полной подгруппой группы $G'G^{(p-1)}$.*

Обратим внимание на то, что теоремы 7.12 – 7.16 демонстрируют связь понятий редуцированности кольца и его аддитивной группы, полного радикала групповой алгебры и полного радикала соответствующей группы. Это ни что иное, как следствие единого подхода к определению понятий полноты и редуцированости для произвольных алгебр.

Уместно привести сейчас основной результат работы [88], характеризующий полный радикал матричных ассоциативных колец. Положим, для краткости, $\mathbf{F} := \mathbf{F}_P(\mathbb{Z})$ $\mathbf{Z} := \mathbf{Z}_P(\mathbb{Z})$. Кольцо в этой работе названо $\mathbf{F}$-полным [$\mathbf{Z}$-полным]), если оно является $\mathcal{F}_p$-полным [$\mathcal{Z}_p$-полным] кольцом по всем простым p. Кольцо, не имеющее ненулевых $\mathbf{F}$-полных [$\mathbf{Z}$-полных] подколец, называется $\mathbf{F}$-редуцированным [$\mathbf{Z}$-редуцированным]. Наибольшее $\mathbf{F}$-полное и $\mathbf{Z}$–полное подкольца произвольного кольца R в силу результатов работы [64] также являются строгими радикалами (в смысле Куроша) в классе всех ассоциативных колец; будем обозначать их через $C_{\mathbf{F}}(R)$ и $C_{\mathbf{Z}}(R)$ соответственно.

Теорема 7.14 ([88, Теорема]). *Полный радикал $C(M_n(R))$ кольца всех квадратных матриц $M_n(R)$ $(n \geq 2)$ над произвольным ассоциативным кольцом R совпадает с идеалом $M_n(C_{\mathbf{Z}}(R))$ кольца $M_n(R)$.*

Следствие 7.15 ([88, Следствие]). *Для ассоциативного конечного кольца R и любого $n \geq 2$ справедливо равенство $C(M_n(R)) = M_n(I)$, где I — наибольший глобально идемпотентный идеал в кольце R. В частности, конечное кольцо $M_n(R)$ $(n \geq 2)$ полно тогда и только тогда, когда $R^2 = R$.*

Заметим, что исторически первой аналогичная задача была решена в статье [107] для матричных алгебр Ли над любым кольцом операторов R (т. е. ненулевым ассоциативным коммутативным кольцом с единицей). Матричной алгеброй Ли называется любой аддитивный подмодуль множества $M_n(R)$ всех квадратных матриц порядка n, замкнутый относительно операции коммутирования $[x, y] = xy - yx$. Примером матричных алгебр Ли является алгебра $gl_n(R)$, состоящая из всех квадратных матриц размерности n над кольцом R. Напомним, что согласно замечаниям 4.1.15 и 4.1.16 соответственно, в любом модуле и в любой алгебре Ли определен полный радикал.

Теорема 7.16 ([107, Теорема 2]). *Полный радикал $C(L)$ матричной алгебры Ли $L = gl_n(R)$ имеет вид $C(L) = \{a \in L \mid tr(a) \in C(R)\}$, где $C(R)$ — полный радикал модуля R.*

Следствие 7.17 ([107, Следствие]). *Полный радикал матричной алгебры Ли $gl_n(R)$ над полем R равен $gl_n(R)$, кроме случая $char(R) = 2 = n$.*

Матричная алгебра Ли $gl_n(R)$ над полем R является редуцированной тогда и только тогда, когда $char(R) = 2 = n$.

Нижеследующие два утверждения характеризуют полные ассоциативные артиновы (слева) кольца и тем самым решают для них проблему 3.7. Напомним, что кольцо называется *артиновым*, если оно удовлетворяет условию минимальности для левых идеалов.

Теорема 7.18 ([86, Теорема 1]). *Ассоциативное артиново кольцо R является полным тогда и только тогда, когда R есть расширение полного ассоциативного артинового глобально идемпотентного кольца с помощью кольца с нулевым* *умножением, аддитивная группа которого есть конечная прямая сумма квазициклических групп.*

Теорема 7.19 ([86, Теорема 2]). *Для артинового ассоциативного глобально идемпотентного кольца R следующие условия эквивалентны:*
1) *R — полное кольцо;*
2) *$R/J(R)$ — полное кольцо;*
3) *$R/J(R) \cong \prod_{i=1}^{n} M_{n_i}(K_i)]$, где K_i — тело и $M_{n_i}(K_i)] \ncong GF(p)$ для всех i.*

В качестве следствия теорем 7.18 и 7.19 получается приведенное ранее в работе [48] описание полных ассоциативных конечных колец, решающее для них проблему 3.7.

Следствие 7.20 ([48, Теорема]). *Для конечного ассоциативного ненулевого кольца R следующие условия эквивалентны:*
1) *R — полное кольцо;*
2) *$R/J(R) \neq O$ и $R/J(R)$ — полное кольцо;*
3) *$R/J(R) \cong \prod_{i=1}^{n} M_{n_i}(GF(p^{k_i}))$, $k_i + n_i > 2$ для всех i.*

В работе [87] исследуется понятие редуцированности для артиновых ассоциативных колец.

Теорема 7.21 ([87, Теорема 1]). *Гомоморфный образ редуцированного артинового ассоциативного кольца является редуцированным кольцом.*

Следующее утверждение решает, в частности, проблему 3.8 для ассоциативных колец.

Теорема 7.22 ([87, Теорема 2]). *Любое ассоциативное артиново редуцированное кольцо R есть прямая сумма $\oplus_{i=1}^{n} R_i$ идеалов R_i этого кольца, обладающих свойством: $p^{k_i} R_i = O$ для некоторого простого числа p и натурального числа $k > 0$. Для каждого из этих идеалов R_i имеет место $C_{\mathbf{F}}(R_i) = \mathcal{F}_{p_i}(R_i) = J(R_i)$, а факторкольца $R_i/J(R_i)$ есть конечные прямые суммы колец, изоморфных простым полям $GF(p_i)$.*

Следствие 7.23 ([87, Следствие 2]). *Полупростое ассоциативное артиново редуцированное кольцо изоморфно прямой сумме простых конечных полей.*

Следствие 7.24 ([87, Следствие 3]). *Для ассоциативного артинового редуцированного кольца R со свойством $mR = O$ имеет место равенство $C_{\mathbf{F}}(R) = \cap_{p|m} \mathcal{F}_p(R)$.*

Остановимся теперь на исследовании понятия чистоты для лиевых и ассоциативных алгебр. Следующее утверждение сводит проблему 3.17 для лиевых алгебр к модулям.

Теорема 7.25 ([106, Теорема]). *Алгебра Ли L над любым кольцом R операторов является наследственно чистой тогда и только тогда, когда L абелева и является наследственно чистой как R-модуль.*

Исследованию проблемы 3.17 для ассоциативных алгебр над дедекиндовыми кольцами посвящены работы [69, 71, 70]. Формулировке результатов предпошлем несколько определений.

Зафиксируем кольцо R операторов и будем следовать соглашениям, сформулированным в начале этого раздела. Абелеву алгебру A назовем *элементарной*, если она либо нулевая, либо A является прямой суммой алгебр вида Z_P. Условимся называть поле F *специальным*, если оно является конечным расширением поля вида F_P, и всякий раз, когда максимальный идеал P имеет конечный индекс в кольце R, выполняется равенство $F = F_P$. Ассоциативную алгебру мы называем *специальной*, если любая ее ненулевая моногенная подалгебра является прямой суммой конечного числа специальных полей. Следуя [94], ассоциативную алгебру, в которой для любого элемента x существует такое зависящее от x натуральное число $n(x) > 1$, что $x^{n(x)} = x$, будем называть *джекобсоновской*. Напомним, что согласно [17, теорема 1, с 314] любая джекобсоновская алгебра коммутативна. Ассоциативную алгебру A назовем *элементарной джекобсоновской*, если каждая её ненулевая моногенная подалгебра является прямой суммой конечного числа конечных полей вида F_P.

Теорема 7.26 ([70, Теорема]). *Пусть R — дедекиндово кольцо, максимальные идеалы которого имеют конечные индексы. Ассоциативная R-алгебра является наследственно чистой алгеброй тогда и только тогда, когда она представима в виде прямой суммы элементарной абелевой алгебры и элементарной джекобсоновской алгебры.*

Заметим, что эта теорема решает проблему 3.17 и ввиду [70, замечание 4] любое многообразие ассоциативных алгебр над указанным в теореме 7.26 кольцом обладает свойством, указанным в проблеме 3.28.

Частным случаем теоремы 7.26 является аналогичный результат для ассоциативных колец, полученный автором несколько ранее в статье [69].

Следующее утверждение содержит информацию по исследованию проблемы 3.17 для ассоциативных алгебр над произвольным дедекиндовым кольцом.

Теорема 7.27 ([71, Теорема]). *Пусть R — произвольное дедекиндово кольцо. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *глобально идемпотентная ассоциативная алгебра A является наследственно чистой алгеброй тогда и только тогда, когда A — специальная алгебра*;

(2) *ассоциативная нильалгебра A является наследственно чистой алгеброй тогда и только тогда, когда A — элементарная абелева алгебра*;

(3) *в любой наследственно чистой ассоциативной алгебре A ее квадрат A^2 есть специальная алгебра, а радикал Джекобсона $J(A)$ является элементарной абелевой алгеброй; если все нильэлементы алгебры A содержатся в $J(A)$ (в частности, если A — коммутативная алгебра), то $A = A^2 \oplus J(A)$*;

(4) *прямая сумма элементарной абелевой алгебры и специальной алгебры есть наследственно чистая алгебра.*

Отметим важное следствие этой теоремы, вытекающее непосредственно из утверждений (3) и (4) теоремы 7.27, которое решает проблему 3.17 для ассоциативных коммутативных алгебр над произвольным дедекиндовым кольцом.

Следствие 7.28 ([71, Следствие I]). *Если R — произвольное дедекиндово кольцо, то ассоциативная коммутативная алгебра A является наследственно чистой алгеброй тогда и только тогда, когда A есть прямая сумма элементарной абелевой алгебры и коммутативной специальной алгебры.*

Отметим, что формально в качестве следствия теоремы 7.27 можно получить также теорему 7.26 — основной результат статьи [70]. В самом деле, в этом случае согласно лемме 30 из [70], которая справедлива и в случае произвольного дедекиндова кольца, любая наследственно чистая алгебра коммутативна. Остальное следует из утверждений (3) и (4) теоремы 7.27 и того факта, что в случае, когда R — дедекиндово кольцо, максимальные идеалы которого имеют конечные индексы, специальная алгебра является элементарной джекобсоновской алгеброй. Но ради справедливости следует отметить, что лемма 30 это далеко не единственное утверждение работы [70], которое используется при доказательстве основного результата работы [71].

Обратим внимание на то, что вопрос описания наследственно чистых ассоциативных алгебр над бесконечным полем теорема 7.27 оставляет открытым.

Приведем еще недавно анонсированные в [79] результаты по исследованию проблемы 3.10 для ассоциативных колец.

Теорема 7.29 [79]. *Справедливы следующие утверждения*:

(1) *минимально полные ассоциативные нильпотентные кольца исчерпываются кольцом* $\mathbb{Q}^0$ *и кольцами* $C(p^\infty)^0$ *по всем простым* p;

(2) *ассоциативное простое кольцо с единицей является минимально полным тогда и только тогда, когда оно изоморфно либо полю* $\mathbb{Q}$ *рациональных чисел, либо конечному полю* $GF(p^q)$, *либо кольцу матриц* $M_2(F_p)$ *для некоторых простых чисел* p *и* q;

(3) *конечное ассоциативное кольцо* R *является минимально полным тогда и только тогда, когда* $R^2 = R$, *аддитивная группа кольца* R *является* p*-группой, справедливо равенство* $J(R) = pR$ *и либо* $R/pR \cong GF(p^q)$, *либо* $R/pR \cong M_2(GF(p))$, *где* p, q *— простые числа.*

В заключение этого раздела сделаем два замечания.

Замечание 7.30. Полный радикал ассоциативного кольца в некотором смысле является антиподом радикалу Джекобсона, так как, например, ассоциативное нильпотентное кольцо с редуцированной аддитивной группой является редуцированным кольцом (т. е. полупростым в смысле полного радикала), но оно же является радикальным в смысле Джекобсона. С другой стороны, любое поле, не являющееся конечным простым полем, является полным (т. е. радикальным в смысле полного радикала), но в то же время оно является полупростым в смысле Джекобсона. Заслуживает внимания задача по дальнейшему изучению понятия полного радикала для обсуждаемых здесь моноассоциативных алгебр.

Замечание 7.31. В связи с результатом работы [104], характеризующим многообразия ассоциативных колец с отщепляемым радикалом Джекобсона, хотелось бы обратить внимание на проблему 3.3 описания расщепляемых многообразий для моноассоциативных алгебр. Для всех видов рассматриваемых здесь алгебр нет пока никаких исследований по проблеме 3.22 описания простых по чистоте алгебр и по проблеме 3.26 описания минимально нередуцированных многообразий.

8. Полугруппы

Исследования понятий полноты, редуцированности и примарности для произвольных полугрупп проводились в работах автора [72]– [75] и в совместных работах автора и Т. Ю. Финк [76, 77], для конечных полугрупп — в работах Т. Ю. Финк [6]– [11]. Понятие чистоты для любых полугрупп изучалось в работе О. В. Князева [25].

При изложении результатов этого и трех последующих разделов будем следовать соглашениям, указанным в начале раздела 2, относительно использования букв k, m, n для обозначения натуральных чисел, к которым, учитывая общепринятые в теории полугрупп обозначения, нам удобно еще добавить букву r. Буква p по-прежнему служит для обозначения простых чисел. Кроме того, будем использовать некоторые обозначения разделов 3, 4, 5 и следующие обозначения:

$\mathcal{S}$ — многоообразие всех полугрупп;

$\mathcal{B}_{r,m} := var\{x^{r+m} = x^r\}$ — многообразие полугрупп бернсайдовского типа;

$\mathcal{N}$ — класс всех нильполугрупп;

$\mathcal{CN}_k$ — — многообразие всех коммутативных нильполугрупп индекса $\leq k$;

$\mathcal{CZ}_k$ — многообразие всех коммутативных нильпотентных полугрупп ступени $\leq k$;

$\mathcal{I}_d := var\{x^2 = x\}$ — многоообразие всех полугрупп идемпотентов (связок);

$\mathcal{L}_0 := var\{xy = x\}$ — многоообразие полугрупп левых нулей (левосингулярных полугурупп);

$\mathcal{R}_0 := var\{xy = y\}$ — многоообразие полугрупп правых нулей (правосингулярных полугурупп);

$\mathcal{SL} := var\{x^2 = x, xy = yx\}$ — многоообразие полурешеток (коммутативных полугрупп идемпотентов).

Для удобства чтения приведем некоторые определения и факты теории полугрупп. Полугруппа S называется *прямоугольной*, если она удовлетворяет тождеству $xyx = x$. Любая прямоугольная полугруппа изоморфна прямому произведению полугруппы левых нулей на полугруппу правых нулей. Если полугруппа S является дизъюнктным объединением своих подполугрупп $\{S_i \mid i \in I\}$ и россыпь $\mathrm{D} = \{S_i \mid i \in I\}$ конгруэнц-допустима, то полугруппу S называют *связкой подполугрупп*. Понятно, что в этом случае фактор-полугруппа S/ρ_{D} есть полугруппа идемпотентов (связка). Если полугруппа разложима в связку своих подполугрупп и S/ρ_{D} является полгруппой специального вида (напр., является полурешеткой, прямоугольной полугруппой и др.) будем добавлять соответствующее слово в название связки. Будем говорить, что полугруппа неразложима в связку, если она не имеет гомоморфизмов на нетривиальные полугруппы идемпотентов (т. е. полугруппа является $\mathcal{I}_d$-полной). Хорошо известно, что любая связка полугрупп есть полурешетка прямоугольных связок полугрупп. В частности, любая полугруппа идемпотентов является полурешеткой прямоугольных полугрупп. Очевидно, что *любая полугруппа, разложимая в связку подполугрупп, не является полной*, поскольку у нее будут гомоморфизмы на нетривиальные полугруппы, по крайней мере, одного из многообразий $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{R}_0$ или $\mathcal{SL}$.

Идеал I полугруппы S называется *вполне изолированным*, если $S \setminus I$ — подполугруппа или $S = I$. Левый [правый] идеал L [R] полугруппы называется *дополняемым* левым [правым] идеалом в S, если $S \setminus L$ [$S \setminus R$] либо пусто, либо является левым [правым] идеалом полугруппы S. В виду сказанного в предыдущем абзаце, очевидно, что *полугруппа неразложима в связку своих подполугрупп тогда и только тогда, когда она не имеет собственных вполне изолированных, дополняемым левых и правых идеалов*. Этим фактом мы будем пользоваться при изложении некоторых результатов, упрощая их формулировку, заменяя отсутствие собственных идеалов указанного типа на условие неразложимости полугруппы в связку.

Полугруппа S называется *глобально идемпотентной*, если она совпадает со своим квадратом (т. е. $S^2 = S$); *унипотентной*, если S содержит единственный идемпотент; *комбинаторной*, если любая подгруппа из S тривиальна; *регулярной*, если для любого элемента a из S найдется элемент $x \in S$ такой, что $axa = a$. Два элемента a и b полугруппы S называются *инверсными*, если $aba = a$ и $bab = b$. *Инверсной полугруппой* называется полугруппа, в которой каждый элемент имеет единственный инверсный к нему элемент. Полугруппа, которая является объединением групп, называют *клиффордовой* (вполне регулярной). Полугруппа S называется *гомогруппой*, если она содержит подгруппу G, являющуюся идеалом в S.

Напомним, что полугруппа S называется *вполне простой*, если она (идеально) простая (т. е. не имеет собственных идеалов) и содержит *примитивный идемпотент* (т. е. минимальный элемент в множестве $E(S)$ идемпотентов полугруппы, частично упорядоченном отношением: $(\forall e, f \in E(S))(e \leq f \Leftrightarrow ef = fe = e)$. Хорошо известно, что *любая вполне простая полугруппа является прямоугольной связкой изоморфных между собой групп* (соответствующая группа называется *структурной группой* этой полугруппы). *Ядром полугруппы* называется пересечение всех ее идеалов. Ядро любой полугруппы является простой подполугруппой. Ясно, что ядро конечной полугруппы является вполне простой полугруппой. Полугруппа называется *периодической* (в обычном смысле), если любая ее моногенная подполугруппа конечна.

Полугруппа S называется *архимедовой*, если для любых $a, b \in S$ существует такое n, что b^n принадлежит главному двустороннему идеалу $J(a) = S^1aS^1$, порожденному элементом a. Хорошо известно описание конечных архимедовых полугрупп: *любая конечная архимедова полугруппа является идеальным нильрасширением вполне простой полугруппы.*

Особую роль в теории полугрупп и в исследовании обсуждаемых понятий для полугрупп играют полугруппы A_2 и B_2, которые могут быть заданы в классе всех полугрупп с нулем следующими копредставлениями (см., напр., [14, с. 70]): $A_2 = \langle a, b \mid aba = a, bab = b, a^2 = a, b^2 = 0\rangle$; $B_2 = \langle a, b \mid aba = a, bab = b, a^2 = 0, b^2 = 0\rangle$.

Перейдем теперь к обзору результатов по исследованию обсуждаемых понятий для полугрупп. Напомним сначала описание минимальных и предполных многообразий полугрупп.

Факт 8.1 ([18]). *Многообразия $\mathcal{A}_p$ для всех p, $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{R}_0$, $\mathcal{SL}$, $\mathcal{Z}_2$ и только они являются атомами решетки $L(\mathcal{S})$.*

Факт 8.2 ([98]). *Многоообразие $\mathcal{V}$ полугрупп является $\mathcal{P}$-предполным для $\mathcal{P} \in \{\mathcal{L}_0, \mathcal{R}_0, \mathcal{SL}\}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{V} = \mathcal{P}$; $\mathcal{V}$ является $\mathcal{A}_p$-предполным тогда и только тогда, когда $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}_{p^k}$ для некоторых k и p; $\mathcal{V}$ является $\mathcal{Z}_2$-предполным тогда и только тогда, когда $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{N}_m$ для некоторого m.*

Нижеследующие два утверждения характеризуют периодические, примарные и редуцированные многообразия полугрупп и тем самым решают проблемы 3.1 и 3.2 для многообразия $\mathcal{S}$ всех полугрупп.

Теорема 8.3 ([72, Теорема 1]). *Многоообразие $\mathcal{V}$ полугрупп является примарным [периодическим] тогда и только тогда, когда либо $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}_{r,1}$, либо $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}_{1,p^k}$ [$\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}_{r,m}$] для некоторых k, m, r и p.*

Заметим, что теорема 8.3 подтверждает уже отмечавшее в разделе 2 совпадение для полугрупп нашего и обычного понятия периодичности.

Теорема 8.4 ([73, 74, Теорема 4]. *Для многоообразия $\mathcal{V}$ полугрупп следующее условия эквивалентны:*

(1) $\mathcal{V}$ — редуцированное многообразие;

(2) $(\mathcal{V} \cap \mathcal{N}) \subseteq \mathcal{Z}_k$ и $(\mathcal{V} \cap \mathcal{G}) \subseteq \mathcal{A}^n \bigcap \mathcal{B}_m$ для некоторых $k,\ n,\ m$;

(3) $\mathcal{V}$ состоит из полурешеток нильпотентных расширений вполне простых полугрупп, структурные группы которых являются периодическими и конечно $\mathcal{A}$-разрешимыми.

Замечание 8.5. Поскольку редуцированные многообразия полугрупп являются периодическими, результаты работы [93] о периодических многообразиях полугрупп позволяют указать другие характеризации редуцированных многообразий полугрупп.

Будем говорить, что многообразие полугрупп является многообразием *конечной ступени нильпотентности*, если ступени нильпотентности его нильпотентных полугрупп ограничены в совокупности.

Следствие 8.6 ([73, Следствие 1]). *Многоообразие $\mathcal{V}$ коммутативных полугрупп является редуцированным тогда и только тогда, когда $\mathcal{V}$ есть многообразие конечной ступени нильпотентности.*

Следствие 8.7 ([73, Следствие 2]). *Любое многоообразие полугрупп идемпотентов является редуцированным.*

В работах [6, 8, 11] получены различные эквивалентные характеризации конечных полных полугрупп и тем самым решается проблема 3.7 для конечных полугрупп (по модулю конечных полных групп, т. е. совпадающих со своим коммутантом). Приведем сначала самую лаконичную характеризацию таких полугрупп.

Теорема 8.8 ([8, Теорема 3]). *Конечная полугруппа является полный тогда и только тогда, когда $S^2 = S$, S неразложима в связку и, если ядро K полугруппы S ненулевое, то K является вполне простой полугруппой с полной структурной группой.*

В качестве следствий теоремы 8.8 в силу хорошо известных результатов легко получаются следующие утверждения, отмечавшиеся в [6]: 1) любая конечная полная нильполугруппа одноэлементна; 2) любая конечная полная коммутативная полугруппа одноэлементна; 3) конечная полугруппа с единицей является полной тогда и только тогда, когда она является полной группой (следствие 1); 4) любая нетривиальная конечная 0-простая полугруппа с нулем является полный тогда и только тогда, когда она имеет делители нуля; 5) любая нетривиальная конечная клиффордова полугруппа с нулем является полный тогда и только тогда, когда она есть полная конечной группа (следствие 7).

Описание полных конечных полугрупп с нулем, которое мы приведем в соответствующем разделе, легче получить из первоначальной характеризации полных конечных полугрупп работы [6].

Напомним некоторые определения. Главным рядом полугруппы называется строго убывающая цепь

$$S = S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset ... \supset S_m \supset S_{m+1} = \emptyset \tag{8.1}$$

ее идеалов S_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) такая, что не существует идеала полугруппы S, лежащего строго между S_i и S_{i+1} ($i = 1, 2, \ldots, m$). Факторами главного ряда называются факторполугруппы Риса S_i/S_{i+1} (считается, что $S_m/\emptyset \cong S_m$). Хорошо известно, что если полугруппа S обладает главным рядом, то факторы главного ряда, взятые в некотором порядке, изоморфны главным факторам полугруппы S (см., напр., [14, с. 98]).

Теорема 8.9 ([6, Теорема]). *Конечная полугруппа является полной тогда и только тогда, когда либо S — полная группа, либо S — полугруппа, обладающая главным рядом* (8.1), *в котором фактор S_1/S_2 — вполне* 0*-простая полугруппа с делителями нуля, а любой другой фактор S_i/S_{i+1} ($i = 1, 2, \ldots, m$) ряда* (8.1) *либо является вполне* 0*-простой полугруппой с делителями нуля, либо полугруппой с нулевым умножением при условии, что $S^2 = S$, либо вполне простой полугруппой с полной структурной группой и в этом случае для любого левого идеала L из S и любого правого идеала R из S имеет место $L \cap (S(S \setminus L) \neq \varnothing$ и $R \cap ((S \setminus R)S) \neq \varnothing$.*

Замечание 8.10. Забегая вперед, отметим, что в работе [6] решается проблема 3.7 для конечных полугрупп с нулем, моноидов и клиффордовых полугрупп.

Нижеследующие два утверждения решают соответственно проблемы 3.9 и 3.8 для полугрупп.

Теорема 8.11 ([8, Теорема 1]). *Любая конечная полная полугруппа изоморфно вложима в конечную полную полугруппа с нулем.*

Теорема 8.12. ([8, Утверждение 1]). *Конечная полугруппа S является редуцированной тогда и только тогда, когда S не имеет нетривиальных полных подгрупп (эквивалентно, подгрупп, совпадающих со своим коммутантом) и любая глобально идемпотентная подполугруппа с одноэлементной структурной группой ее ядра разложима в связку своих подполугрупп.*

Следствие 8.13 ([8, Утверждение 2]). *Конечная полугруппа S, являющаяся связкой архимедовых полугрупп, есть редуцированная полугруппа тогда и только тогда, когда она является полурешеткой идеальных расширений вполне простых полугрупп со структурными разрешимыми группами.*

Следующее утверждение решает проблему 3.2 для псевдомногообразий полугрупп.

Следствие 8.14 ([8, Следствие 1]). *Псевдомногообразие конечных полугрупп является редуцированным тогда и только тогда, когда оно состоит из полурешеток нильрасширений вполне простых полугрупп со структурными разрешимыми группами.*

Нижеследующее утверждение характеризует минимально полные конечные полугруппы (по модулю групп) и тем самым решают проблему 3.10 для конечных полугрупп.

Теорема 8.15 ([8, Теорема 4]). *Конечная полугруппа S является минимальной полной тогда и только тогда, когда либо S — минимальная неразрешимая группа, либо S неразложима в связку своих подполугрупп, а каждая собственная глобально идемпотентная подполугруппа с одноэлементной структурной группой ее ядра, разложима в связку своих подполугрупп.*

Следующее утверждение еще раз подчеркивает исключительную роль полугрупп A_2 и B_2 в теории полугрупп.

Следствие 8.16 ([8, Следствие 3]). *Регулярная полугруппа с нулем является минимально полной тогда и только тогда, когда она является либо полугруппой A_2, либо полугруппой B_2.*

Представляет интерес следующее утверждение работы [7] и его следствия.

Теорема 8.17 ([7, Теорема]). *Конечная полугруппа S имеет наибольшую полную подполугруппу тогда и только тогда, когда она неразложима в связку своих подполугрупп и, если n — натуральное число, такое, что $S^n = S^{n+1}$, а $\varphi(S^n)$ — максимальный групповой гомоморфный образ подполугруппы S^n, то подполугруппа K полугруппы S^n, являющаяся полным прообразом коммутанта группы $\varphi(S^n)$ при гомоморфизме φ, также неразложима в связку.*

Следствие 8.18 ([7, Следствие 1]). *Конечная комбинаторная полугруппа имеет наибольшую полную подполугруппу тогда и только тогда, когда она неразложима в связку своих подполугрупп.*

Доказательство следующего интересного следствия весьма нетривиально.

Следствие 8.19 ([7, Следствие 3]). *Нильрасширения групп и только они составляют псевдомногообразия конечных полугрупп, в которых есть наибольшая полная подполугруппа.*

В работе [76] характеризуются примарные полугруппы.

Теорема 8.20 ([76, Теорема 1]). *Полугруппа S является примарной тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:*

1) *S — периодическая комбинаторная полугруппа;*

2) *S — периодическая полугруппа, типы элементов которой суть (r, p^k) для некоторых $r,\ k,\ p$ таких, что $r \le p^k$.*

Предложение 8.21 ([76, Предложение 1]). *Любая конечная $\mathcal{A}_p$-полугруппа является редуцированной.*

Предложение 8.22 ([76, Предложение 2]). *Конечная примарная полугруппа S является полной тогда и только тогда, когда S — комбинаторная глобально идемпотентная полугруппа, неразложимая в связку своих подполугрупп.*

Следующее утверждение детализирует теорему 8.12, решающую проблему 3.8, применительно к конечным примарным полугруппам.

Предложение 8.23 ([76, Предложение 3]). *Конечная примарная полугруппа S является редуцированной тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:*

1) *S — комбинаторная полугруппа, любая глобально идемпотентная подполугруппа которой разложима в связку;*

2) *S — полугруппа, типы элементов которой суть (r, p^k) для некоторых r, k, p таких, что $r \le p^k$.*

Следующее утверждение решает проблему 3.3 для свойства (слабой) расщепляемости применительно к псевдомногообразиям конечных полугрупп.

Теорема 8.24 ([9, Теорема 1]). *Псевдомногообразие $\mathcal{V}$ конечных полугрупп является расщепляемым тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1) *$\mathcal{V}$ — редуцированное псевдомногообразие конечных полугрупп;*

2) $\mathcal{V}$ – *псевдомногообразие конечных полугрупп, в котором любая группа расщепляемая, и любая полугруппа является рисовской полугруппой матричного типа* [14, с. 51] *с сэндвич-матрицей, составленной из элементов разрешимого прямого множителя структурной группы.*

Следствие 8.25 ([9, Следствие 1]). *Псевдомногообразие $\mathcal{V}$ конечных комбинаторных полугрупп является расщепляемым тогда и только тогда, когда $\mathcal{V}$ — редуцированное псевдомногообразие конечных комбинаторных полугрупп.*

Предложение 8.26 ([9, Предложение 1]). *Псевдомногообразия $\mathcal{V}$ конечных полугрупп, порожденные редуцированными конечными полугруппами и минимально простыми конечными группами, является расщепляемым.*

Нашей ближайшей целью является изложение весьма интересного и фундаментального результата работы [10], в которой описываются псевдомногообразия конечных полугрупп, обладающие полным радикалом. Предварительно приведем одно важное определение этой работы.

Пусть G — группа, H — ее собственная подгруппа и l — символ, не принадлежащий группе G. Положим $G_l(H) := G \cup \{(gH, l) \mid g \in G\}$ и определим на множестве $G_l(H)$ умножение $\circ$, сохраняя умножение на G и полагая $x \circ (gH, l) = (xgH, l)$ и $(gH, l) \circ u = (gH, l)$ для всех $g, x \in G$ и $u \in G_l(H)$. Очевидно, что множество $G_l(H)$ с операцией $\circ$ становится полугруппой. Назовем ее l-полугруппой над группой G с подгруппой H. Нетрудно проверить, что полугруппа $G_l(H)$ является цепью полугруппы левых нулей и группы G. Через $G_r(H)$ обозначим r-полугруппу, антиизоморфную полугруппе $G_l(H)$. Заметим, что различные варианты этой конструкции встречались в роли «запрещенных объектов» ранее в исследованиях по теории многообразий полугрупп (см., напр., [89]).

Теорема 8.27 ([10, Теорема]). *Следующие три условия эквивалентны:*

1) $\mathcal{V}$ — *псевдомногообразие конечных полугрупп, обладающее полным радикалом;*

2) $\mathcal{V}$ — *псевдомногообразие конечных полугрупп, являющихся полурешетками архимедовых полугрупп, удовлетворяющих условию: для любых полугруппы S из $\mathcal{X}$, ее полной подгруппы G и элементов a и b из G и c из S таких, что элементы ac, bc, ca, cb принадлежат множеству GrS групповых элементов полугруппы S , имеют место равенства $S^1ca = S^1cb$ и $acS^1 = bcS^1$;*

3) $\mathcal{V}$ — *псевдомногообразие конечных полугрупп, которому не принадлежат полугруппы A_2, B_2 и полугруппы $G_l(H)$, $G_r(H)$ для любой полной группы G из $\mathcal{V}$ и любой ее собственной подгруппы H.*

Ранее в разделе 3 уже отмечалось, что редуцированные многообразия алгебр являются всегда сильно расщепляемыми. Следующее утверждение, решающее проблему 3.3 для сильной расщепляемости, показывает, что для полугрупп верно и обратное утверждение.

Теорема 8.28 ([77, Теорема]). *Многообразие $\mathcal{V}$ полугрупп является сильно расщепляемым тогда и только тогда, когда $\mathcal{V}$ — редуцированное многообразие полугрупп.*

Напомним, что редуцированные многообразия полугрупп охарактеризованы в теореме 8.4.

Замечание 8.29. Теоремы 5.9 и 8.28 показывают, что сильная расщепляемость — это очень сильное условие, которому из всех нередуцированных многообразий групп и полугрупп удовлетворяет только многообразие $\mathcal{A}$ всех абелевых групп. Похоже, что свойство сильной расщепляемости подчеркивает исключительность многообразия $\mathcal{A}$. Ему подобное следует, по-видимому, искать только среди модулей.

В работе [25] решается проблема 3.17 для (атомной) чистоты и вербальной чистоты для произвольных полугрупп. Напомним, что полугруппа называется *прямоугольной группой*, если она является прямым произведением прямоугольной полугруппы и группы (эту группу будем называть структурной).

Теорема 8.30 ([25, Теорема 1]). *Следующие условия для полугруппы S эквиваленты:*

(1) *S — наследственно чистая полугруппа;*

(2) *S — наследственно вербальная чистая полугруппа;*

(3) *S является раздуванием (* [14, с. 113]*) жесткой полурешетки (* [14, с. 50]*) прямоугольных групп, структурные группы которых являются элементарными группами.*

Напомним, что *эпигруппой* называется полугруппа, в которой подходящая степень любого ее элемента является групповым элементом. Следующее утверждение работы [26] сводит проблему 3.10 для коммутативных эпигрупп к абелевым группам.

Теорема 8.31 ([26, Теорема 1]). *Среди нетривиальных коммутативных эпигрупп минимально полными являются только квазициклические группы и аддитивная группа рациональных чисел.*

В работе [75] исследуется вопрос о существовании полного радикала в полугруппах. В ней указаны некоторые классы произвольных полугрупп с указанным свойством и приведено описание многообразий коммутативных полугрупп, обладающих полным радикалом. Напомним, что многообразие полугрупп называется *многообразием конечной ступени нильпотентности*, если ступени нильпотентности входящих в него нильпотентных полугрупп ограничены в совокупности.

Теорема 8.32 ([75, Теорема]). *Многообразие $\mathcal{V}$ коммутативных полугрупп обладает полным радикалом тогда и только тогда, когда либо $\mathcal{V}$ — любое многообразие коммутативных полугрупп конечной ступени нильпотентности* (равносильно: полугруппы из $\mathcal{V}$ являются полурешетками идеальных расширений групп из многообразия $\mathcal{A}_n$ с помощью полугрупп из многообразия $\mathcal{CZ}_k$ для некоторых k и n), *либо $\mathcal{V}$ — периодическое многообразие бесконечного индекса нильпотентности, состоящее из коммутативных периодических унипотентных полугрупп* (равносильно: полугруппы из $\mathcal{V}$ являются идеальным расширениями групп из многообразия $\mathcal{A}_n$ с помощью полугрупп из многообразия $\mathcal{CN}_k$ для некоторых k и n).

9. Моноиды

Понятия полноты, редуцированности и примарности для моноидов, рассматриваемых как нульарные полугруппы, изучались автором в работах [72, 73, 74], Т. Ю. Финк в работе [6], а понятие чистоты — О. В. Князевым в работах [27, 28, 29].

Условимся относительно некоторых обозначений этого раздела:
$\mathcal{S}^1$ — многообразие всех моноидов, т. е. полугрупп с сигнатурной единицей;
$\mathcal{B}^1_{r,m} := var\{x^{r+m} = x^r\}$ — многообразие моноидов бернсайдовского типа;
$\mathcal{SL}^1 := var\{x^2 = x, xy = yx\}$ — многообразие полурешеток с единицей.
$\mathcal{EA}$ — класс всех элементарных абелевых групп;
$\mathcal{CP}$ — класс всех периодических (в обычном смысле) комбинаторных моноидов.

Для удобства чтения приведем хорошо известное описание минимальных и предполных многообразий моноидов.

Факт 9.1. *Атомами решетки $L(\mathcal{S}^1)$ являются в точности многообразия $\mathcal{A}_p$ для всех p и многообразие $\mathcal{SL}^1$.*

Факт 9.2 ([73, Теорема 5]. *Многообразие $\mathcal{V}$ моноидов является $\mathcal{A}_p$-предполным тогда и только тогда, когда $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}_{p^k}$ и $\mathcal{V}$ является $\mathcal{SL}^1$-предполным тогда и только тогда, когда $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}^1_{r,1}$ для некоторых $k,\ p,\ r$.*

Следующие два утверждения решают соответственно проблему 3.1 (для примарности) и проблему 3.2 для моноидов.

Теорема 9.3 ([72, Теорема 3]. *Многообразие $\mathcal{V}$ моноидов является примарным тогда и только тогда, когда либо $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}^1_{r,1}$, либо $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}_{p^k}$ для некоторых $k,\ p,\ r$.*

Теорема 9.4 ([73, 74, Теорема 5]). *Многообразие $\mathcal{V}$ моноидов является редуцированным тогда и только тогда, когда $\mathcal{V} \subseteq (\mathcal{A}^n \cap \mathcal{B}_m) \circ \mathcal{SL}^1$ для некоторых $m,\ n$.*

Следствие 9.5. *Любое комбинаторное многообразие $\mathcal{V}$ моноидов является редуцированным.*

Следующие два утверждения решают проблему 3.17 описания наследственно чистых алгебр соответственно для моноидов и коммутативных моноидов и одновременно указывают примеры многообразий со свойством совпадения понятий чистоты и вербальной чистоты, указанным в проблеме 3.18 для алгебр.

Теорема 9.6 ([27, Теорема 1]). *Следующее условия для моноида S являются эквивалентными*:
(1) *S — наследственно вербально чистый моноид;*
(2) *S — наследственно чистый моноид;*
(3) *$S \in \mathcal{CP} \circ_{\mathcal{S}^1} \mathcal{EA}$, т. е. S является расширением комбинаторного периодического моноида при помощи элементарной абелевой группы.*

Теорема 9.7 ([28, Теорема]). *Следующие условия для коммутативного моноида S эквивалентны:*
(1) *S — периодический моноид и полугруппа $Gr(S)$ групповых элементов из S является жесткой связкой элементарных групп;*
(2) *S — наследственно чистый моноид;*
(3) *S — наследственно вербально чистый моноид.*

В работе [29] проблема 3.22. описания простых по чистоте периодических моноидов сведена к группам.

Теорема 9.8 ([29, Теорема]). *Периодический моноид S является простым по чистоте тогда только тогда, когда S – минимально полная группа или циклическая p-группа.*

В заключение раздела отметим, что проблема 3.7 для моноидов сводится к группам.

Предложение 9.9 ([6, Следствие 1]). *Конечный моноид является полным тогда и только тогда, когда он есть полная группа.*

10. Полугруппы с нулем

Понятия полноты, редуцированности и примарности для полугрупп с нулем, рассматриваемых как нульарные полугруппы, изучались автором в работах [72, 73, 74], а понятие чистоты — О. В. Князевым в работах [30]–[34] и в совместных работах О. В. Князева и Т. Ю. Финк [35, 36] .

Прежде чем привести основные результаты этих работ, условимся относительно некоторых обозначений этого раздела:
$\mathcal{S}^0$ — многообразие всех полугрупп с нулем 0;
$\mathcal{B}^0_{r,m} := var\{x^{r+m} = x^r\}$ — многообразие полугрупп с нулем бернсайдовского типа;
$\mathcal{N}_k := var\{x^k = 0\}$ — многообразие нильполугрупп индекса k;
$Nil(S)$ — множество нильэлементов полугруппы S с нулем;
$\mathcal{SL}^0 := var\{x^2 = x, xy = yx\}$ — многообразие полурешеток с нулем.
$\mathcal{Z}_n := var\{x_1x_2\dots x_n = 0\}$ — многообразие нильпотентных полугрупп ступени n.

Для удобства чтения сформулируем следующие два хорошо известных и легко проверяемых утверждения.

Факт 10.1. *Многообразия $\mathcal{SL}^0$ и $\mathcal{Z}_2$ и только они являются атомами решетки $L(\mathcal{S}^0)$.*

Факт 10.2. *Многообразие $\mathcal{V}$ полугрупп с нулем является $\mathcal{SL}^0$-предполным тогда и только тогда, когда $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}^0_{1,m}$ для некоторых m и $\mathcal{V}$ является $\mathcal{Z}_2$-предполным тогда и только тогда, когда $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{N}_k$ для некоторого k.*

Следующие два утверждения решают соответственно проблему 3.1 для примарности и проблему 3.2 для полугрупп с нулем.

Теорема 10.3 ([72, Теорема 2]). *Многообразие $\mathcal{V}$ полугрупп с нулем является примарным тогда и только тогда, когда либо $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{N}_k$, либо $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}^0_{1,m}$ для некоторых k, m.*

Теорема 10.4 ([73, 74, Теорема 3]). *Многообразие $\mathcal{V}$ полугрупп с нулем является редуцированным тогда и только тогда, когда $\mathcal{V}$ имеет конечную ступень нильпотентности.*

Уместно привести здесь следствие теоремы 8.9, решающее проблему 3.7 для полугрупп с нулем.

Предложение 10.5 ([6, Следствие 3]). *Конечная нетривиальная S полугруппа с нулем является полной тогда и только тогда, когда $S^2 = S$ и S обладает главным рядом* (8.1), *факторы которого являются либо вполне* 0*-простыми полугруппами с делителями нуля, либо полугруппами с нулевым умножением* (исключая фактор S_1/S_2).

Следствие 10.6 ([6, Следствие 5]). *Конечная нетривиальная регулярная полугруппа с нулем является полной тогда и только тогда, когда каждый главный фактор этой полугруппы является* 0*-простой полугруппой с делителями нуля.*

Следствие 10.7 ([6, Следствие 6]). *Конечная инверсная полугруппа является полной тогда и только тогда, когда каждый её главный фактор является либо группой, совпадающей со своим коммутантом, либо полугруппой Брандта, не являющейся группой с нулем.*

Следующее утверждение решают проблему 3.17 для многообразия $\mathcal{S}^0$ полугрупп с нулем.

Теорема 10.8 ([21, Теорема 3]). *Полугруппа с нулем является наследственно чистой тогда и только тогда, когда она является идеальным расширением периодической клиффордовой полугруппы с нулем с помощью полугруппы с нулевым умножением.*

Нижеследующее утверждение показывает эквивалентность свойств чистоты и вербальной чистоты для многообразия $\mathcal{S}^0$ и тем самым дает пример многообразия для проблемы 3.18.

Теорема 10.9 ([30, Теорема]). *Следующие условия для полугруппы S с нулем эквивалентны:*

(1) *S — идеальное расширение периодической клиффордовой полугруппы с нулем с помощью полугруппы с нулевым умножением;*

(2) *S — наследственно вербально чистая полугруппа;*

(3) *S — наследственно чистая полугруппа.*

Следующие три утверждения исследуют проблему 3.22 для полугрупп с нулем.

Теорема 10.10 ([31, Теорема]). *Полугруппа S с нулем не имеет чистых моногенных подполугрупп тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*:

1) $Nil(S) \subseteq S^2$;

2) $Gr(S) \subseteq \mathcal{SL}^0(S)$;

3) $S \setminus (Gr(S) \cup Nil(S)) \subseteq (S^2 \cup \mathcal{SL}^0(S)$.

Теорема 10.11 ([32, Теорема]). *Периодическая редуцированная полугруппа S с нулем является простой по чистоте тогда и только тогда, когда S — циклическая нильполугруппа.*

Теорема 10.12 ([37, Теорема]). *Пусть S — простая по чистоте перидическая полугруппа с нулем и множество $Nil(S)$ не является подполугруппой. Тогда S является гомоморфным образом полугруппы, заданной в многообразии $\mathcal{S}^0$ следующим копредставлением*:

$$B_2(k,n) = \langle a, b \mid aba = a, bab = b, a^n = b^k = 0\rangle, (n, k \geq 2).$$

Наконец, пять заключительных утверждения этого раздела посвящены исследованию проблемы 3.10 для полугрупп с нулем. Уместно сначала привести утверждение, связанное с теоремой 10.12, подчеркивающее связь минимально полных и простых по чистоте полугрупп с нулем.

Теорема 10.13 ([35, Теорема]). *Свойство быть гомоморфным образом полугруппы $B_2(k,n)$ из теоремы 10.12 есть необходимое условие минимальной полноты для периодической полугруппы полугруппы с нулем, в которой множество нильэлементов не является подполугруппой.*

Следующее утверждение характеризует минимально полные конечные полугруппы с нулем и тем самым решают проблему 3.10 для конечных полугрупп с нулем.

Предложение 10.14 ([8, Следствие 2]). *Конечная полугруппа S с нулем является минимально полной тогда и только тогда, когда она является идеальным расширением нильполугруппы N с помощью либо полугруппы A_2, либо полугруппы B_2 и для любого элемента x из N множество $S \setminus J_x$, где J_x множество порождающих главного идеала S^1xS^1, не является подполугруппой.*

Предложение 10.15 ([33, Предложение]). *Среди нетривиальных конечно порожденных нильполугрупп нет полных полугрупп.*

Теорема 10.16 ([34, Теорема]). *Среди коммутативных нильполугрупп минимально полных полугрупп нет.*

Теорема 10.17 ([36, Теорема]). *Конечная полугруппа S с нулем, в которой множество $Nil(S)$ нильэлементов образует подполугруппу, является минимально полной тогда и только тогда, когда она является гомоморфным образом полугруппы, заданной в многообразии $\mathcal{S}^0$ следующим копредставлением:*

$$A_2(k) = \langle a, b \mid aba = a, bab = b, a^2 = a, b^k = 0\rangle, (k \geq 2).$$

11. Клиффордовы полугруппы

Понятия полноты, редуцированности и примарности для клиффордовых полугрупп, рассматриваемых как унарные полугруппы, изучались автором в работах [72, 73, 74] и Т. Ю. Финк в статье [6], а понятие чистоты исследовалось О. В. Князевым в работах [38, 39] и в совместных статьях О. В. Князеа и Т. Ю. Финк [35, 36] .

Напомним, что полугруппа называется клиффрдовой (по другой терминологии — вполне регулярной), если она является объединением групп. Хорошо известно, что класс $\mathcal{K}$ всех клиффордовых полугрупп, рассматриваемых как унарные полугруппы с операцией взятия обратного для данного элемента в соответствующей группе, является многообразием. Его подмногообразиями являются, в частности, класс $\mathcal{G}$ всех групп и класс $\mathcal{CS}$ всех вполне простых полугрупп.

Приведем описание минимальных и предполных многообразий клиффордовых полугрупп, легко вытекающее из фактов 8.1 и 8.2.

Факт 11.1. *Многобразия $\mathcal{A}_p$ для всех простых p, $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{R}_0$, $\mathcal{SL}$ и только они являются атомами решетки $L(\mathcal{S})$.*

Факт 11.2 ([98]). *Многоообразие $\mathcal{V}$ клиффордовых полугрупп является $\mathcal{P}$-предполным для $\mathcal{P} \in \{\mathcal{L}_0, \mathcal{R}_0, \mathcal{SL}\}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{V} = \mathcal{P}$; $\mathcal{V}$ является $\mathcal{A}_p$-предполным тогда и только тогда, когда $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}_{p^k}$ для некоторых k и p.*

Нижеследующие два утверждения решают проблемы 3.1 и 3.2 для клиффордовых полугрупп.

Теорема 11.3 ([72, Теорема 5]). *Многообразие $\mathcal{V}$ клиффордовых полугрупп является примарным [периодическим] тогда и только тогда, когда $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}_{1,p^k}$ $[\mathcal{V} \subseteq \mathcal{B}_{1,m}]$ для некоторых простого p и натуральных $k,\ m$.*

Теорема 11.3 ([73, 74, Теорема 6]). *Для многообразия $\mathcal{V}$ клиффордовых полугрупп следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathcal{V}$ – *редуцированное многообразие;*
(2) $\mathcal{V} \cap \mathcal{G} \subseteq \mathcal{A}^n \cap \mathcal{B}_m$ *для некоторых* n, m*;*
(3) $\mathcal{V} \subseteq (\mathcal{A}^n \cap \mathcal{B}_m) \circ_{\mathcal{K}} \mathcal{L}_0 \circ_{\mathcal{K}} \mathcal{R}_0 \circ_{\mathcal{K}} \mathcal{SL}$;

(4) *$\mathcal{V}$ состоит из полурешеток вполне простых полугрупп, структурные группы которых являются периодическими и $\mathcal{A}$-разрешимыми.*

Следующее утверждение решает проблему 3.17 для многообразия $\mathcal{K}$.

Теорема 11.4 ([38, Теорема]). *Клиффордова полугруппа является наследственно чистой тогда и только тогда, когда она есть жесткая полурешетка прямоугольных групп, структурные группы которых являются элементарными группами.*

Нижеследующие два утверждения решают соответственно проблему 3.22 (по «модулю групп») для клиффордовых полугрупп и исчерпывающим образом для периодических клиффордовых полугрупп.

Теорема 11.5 ([39, Теорема]). *Следующие условия для клиффордовой полугруппы S эквивалентны:*

(1) *S есть простая по чистоте полугруппа;*

(2) *S является либо простой по чистоте группой; либо двухэлементной полурешеткой; либо двухэлементной полугруппой левых или правых нулей.*

Для периодических клиффордовых полугрупп теорему 11.5 можно усилить.

Предложение 11.6 ([39, Предложение]). *Следующие условия для периодической клиффордовой полугруппы S эквивалентны:*

(1) S есть простая по чистоте полугруппа;

(2) S является либо циклической p-группой, либо двухэлементной полурешеткой, либо двухэлементной полугруппой левых нулей, либо двухэлементной полугруппой правых нулей.

В заключение раздела отметим, что проблема 3.7 для конечных клиффордовых полугрупп очевидным образом сводится к группам.

Предложение 11.7 ([6, Следствие 7]). *Конечная клиффордова полугруппа является полной тогда и только тогда, когда она есть полная группа.*

12. Решетки

Пусть $\mathcal{L}$ — многообразие всех решеток. Хорошо известно (см., напр., [15, с. 306]), что единственным атомом решетки $L(\mathcal{L})$ всех подмногообразий многообразия $\mathcal{L}$ является многообразие $\mathcal{D}$ дистрибутивных решеток. Таким образом, многообразие $\mathcal{L}$ является предполным. Поскольку в любой решетке все элементы являются идемпотентами, то она является примарной и периодической, а поэтому проблема 3.1 для решеток является тривиальной. Тем не менее большинство проблем раздела 3 для решеток остаются открытыми и, к сожалению, мало исследованными. Приведем результаты работы В. Н. Рудакова [92]) по исследованию атомной полноты для решеток.

Предложение 12.1 ([91, Предложение]). *Пентагон N_5 не является атомно полной решеткой.*

Теорема 12.2 ([91, Теорема 1]). *Диамант M_3 является единственной минимально атомно полной модулярной решеткой.*

В этой же работе указана бесконечная серия атомно полных решеток. Для этого вводится операцию удвоения (раздвоения) ребра для решетки L: если элемент b покрывает элемент a в решетке L, то удаляется ребро ab, добавляются элемент c, отличный от всех элементов решетки L и два ребра ac, cb. При этом считается, что c покрывает a, а b покрывает c.

Предложение 12.3 ([91, Теорема 2]). *Решетка, полученная из диаграммы диаманта M_3 с помощью применения конечного числа операции удвоения ребра к его внутренним ребрам, является атомно полной решеткой.*

13. Унары

Понятия полноты и редуцированности для унаров (моноунарных алгебр) изучались Т. А. Мартыновой в статьях [80, 81] и В. Н. Рудаковым в работе [92]. В первых двух работах получено исчерпывающее описание полных и минимально полных унаров. Это пока единственное «довольно большое» многообразие, для которого вслед за многообразием всех абелевых групп удалось это сделать. В работе [92] характеризуются редуцированные многообразия унаров.

Под унаром понимается алгебра с одной унарной операцией, которая будем обозначаться штрихом $'$. Для любого элемента a унара A и для любого натурального числа n положим: $a^0 = a$, $a^1 = a'$ и $a^{n+1} = (a^n)'$.

Пусть $\mathcal{U}$ — многообразие всех унаров. Для удобства чтения приведем хорошо известное описание подмногообразий многообразия $\mathcal{U}$.

Факт 13.1 ([56, с. 352]). *Многообразия решетки $L(\mathcal{U})$ исчерпываются многообразими унаров, заданных либо одним тождеством вида $x^k = x^m$, либо одним тождеством вида $x^n = y^n$ по всем натуральным k, m, n.*

В качестве следствия этого утверждения получаем описание атомов решетки $L(\mathcal{U})$.

Факт 13.2. *Многообразиями $\mathcal{P}_1 = var\{x = x'\}$ и $\mathcal{P}_2 = var\{x' = y'\}$ исчерпываются атомы решетки $L(\mathcal{U})$.*

Моногенный унар, заданный одним определяющим соотношением вида $x = x^n$ для некоторого $n > 0$, называется *циклическим унаром*, а соотношением вида $x^n = x^{n+1}$ — *моногенным нильунаром*. В первом случае число n называют длиной цикла, а во втором — нильиндексом. В соответствии с определением квазимоногенной алгебры $C(\mathcal{P}^\infty)$ из раздела 2, где $\mathcal{P}$ — минимальное многообразие алгебр, *квазимоногенный нильунар* $C(\mathcal{P}_2^\infty)$ есть объединение счетного числа вложенных друг в друга моногенных нильунаров с возрастающими нильидексами. Более точно, с помощью определяющих соотношений $C(\mathcal{P}_2^\infty)$ может быть задан следующим копредставлением в классе $\mathcal{U}$:

$$C(\mathcal{P}_2^\infty) = \langle c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, c_{n+1}, \dots \mid c_0 = c_0', c_n = c_{n+1}', n = 0, 1, 2, \dots \rangle.$$

Кроме того, нам понадобится унар $C(\mathcal{U}^\infty)$, являющийся объединением счетного числа вложенных друг в друга моногенных свободных унаров, который называется *свободным квазимоногенным унаром*. Более точно, с помощью определяющих соотношений $C(\mathcal{U}^\infty)$ может быть задан следующим образом:

$$C(\mathcal{U}^\infty) = \langle c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, c_{n+1}, \dots \mid c_n = c_{n+1}', n = 0, 1, 2, \dots \rangle.$$

Легко понять, что с точностью до изоморфизма существует единственный квазимоногенный нильунар и единственный свободный квазимоногенный унар.

Следующее утверждение характеризует минимально полные унары и тем самым решается проблема 3.10 для унаров.

Теорема 12.2 ([80, Теорема]). *Унар является минимально полным тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

1) *— циклический унар;*

2) *— квазимоногенный нильунар;*

3) *— свободный квазимоногенный унар.*

Далее нам понадобится унар $C(O_k^\infty)$, являющийся объединением счетного числа вложенных друг в друга конечных моногенных унаров с одинаковым нетривиальным циклом длины k и с возрастающей длиной предциклов, который называют *квазимоногенным унаром с нетривиальным циклом.* С помощью определяющих соотношений он может быть задан следующим образом:

$$C(O_k^\infty) = \langle c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}, ... \mid c_0 = c_0^k, c_n = c'_{n+1}, k > 1, n = 0, 1, 2, ...\rangle.$$

Легко понять, что с точностью до изоморфизма имеется счетная серия квазимоногенных унаров $C(O_k^\infty)$ $(k = 2, 3, ...$ с нетривиальным циклом.

В случае, если рассматриваемый унар C может быть либо квазимоногенным нильунаром, либо квазимоногенным унаром с нетривиальным циклом будем говорить, что C — квазимоногенный унар с циклом. Унар C, являющийся объединением некоторого семейства попарно пересекающихся унаров, называется *связным объединением унаров.*

Следующее утверждение характеризует полные унары и тем самым решает проблему 3.7 для унаров.

Теорема 12.3 ([81, Теорема]). *Унар C является полным тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

1) *C — циклический унар;*

2) *C — связное объединение квазимоногенных нильунаров с циклом;*

3) *C — связное объединение свободных квазимоногенных унаров.*

Заметим, что изложенные результаты этого раздела решают для многообразия $\mathcal{U}$ всех унаров проблему 3.11, касающуюся вопросов существования, изоморфизма и минимальной полноты квазимогогенных алгебр в данном многообразии алгебр.

В заключение этого раздела приведем описание редуцированных многообразий унаров, решающее проблему 3.2 для унаров.

Теорема 11.4 ([92, Теорема]). *Многообразия унаров, каждое из которых определяется одним из тождеств вида $x^{m+1} = x^m$ или $x^m = y^m$ $(m = 0, 1, ...)$, исчерпывают все редуцированные многообразия унаров.*

Обратим внимание на то, что в произвольном унаре U любая его непустая россыпь D конгруэнц-допустима, т. е. является ядром некоторой конгруэнции на U. В самом деле, наименьшей такой будет конгруэнция ρ_{D}, смежными классами которой являются компоненты россыпи D и одноэлементные подмножества из всех остальных элементов унара U. Это означает, в частности, что многообразие $\mathcal{U}$ является трансвербальным. Из теоремы 4.1.12 следует, что в многообразии $\mathcal{U}$ определен полный радикал.

14. Заключение

На наш взгляд, в алгебре еще не до конца осознана роль теории абелевых групп для развития структурных теорий других видов алгебр. Результаты исследований по изучению аналогов основных понятий теории абелевых групп для различных алгебр подтверждают их полезность для некоторых видов. Единый подход к их определению позволяет выражать свойства сложной алгебраической структуры через одноименные свойства другой структуры, являющейся обеднением первой, и наоборот. Мы уже обращали внимание на то, что при изучении обсуждаемых понятий для полугрупп используются результаты для групп, при изучении их для моноассоциативных алгебр используются результаты для модулей, при вычислении полного радикала группового кольца используется полный радикал соответствующей группы и др. С другой стороны, изучение некоторых проблем для полугрупп сводится к группам, для лиевых алгебр — к модулям и др.

Как и для абелевых групп, в случае произвольных алгебр понятие чистоты оказывается тесно связанным с понятиями полноты и редуцированности. Например, любая полная алгебра является всюду чистой; наследственно чистые алгебры зачастую являются редуцированными; простые по чистоте алгебры часто содержатся среди подалгебр минимально полных алгебр; любая минимально полная алгебра является простой по чистоте алгеброй; кроме того, понятие чистой подалгебры является обобщением понятия прямого множителя (и даже ретракта) алгебры. Обратим внимание на то, что понятия полной алгебры и чистой подалгебры связаны с разрешимостью уравнений, полученных из тождеств соответствующих минимальных многообразий.

Ясно, что наш подход, будучи универсальным, не может быть эффективно реализован для произвольных алгебр. Однако для некоторых видов алгебр, как показывают исследования, он оказывается плодотворным. Предпочтение здесь следует отдавать многообразиям алгебр, решетка подмногообразий которых имеет «хорошие» атомы. Этим качеством обладают все рассмотренные в этом обзоре многообразия конкретных алгебр. Для многообразий, решетка подмногообразий которых имеет «плохие», атомы, на наш взгляд, структурная теория в классическом понимании вообще не может быть развита. Не случайно, например, не предпринимается попыток по систематическому развитию структурной теории для многообразия всех группоидов. Напомним, что решетка подмногообразий этого многообразия имеет континуум атомов (см. [56, следствие 9, с. 381]), и не известно, какими тождествами они определяются и как устроены группоиды этих атомов. Понятно, что и по нашей проблематике результатов для группоидов нет, хотя иногда их используем для построения контрпримеров.

Тем не менее, по многим проблемам получены интересные результаты для многообразий произвольных алгебр по модулю «неизвестных атомов» (см. раздел 4), которые потом использовались для получения результатов для многообразий конкретных алгебр. К сожалению, обсуждаемые понятия не исследовались для многих видов многообразий алгебр, активно изучаемых в последние годы. Прежде всего, для многообразий абелевых (аффинных) алгебр (здесь, по-видимому, можно будет использовать результаты для модулей), а также для конгруэнц-перестановочных, конгруэнц-модулярных, конгруэнц-дистрибутивных и конгруэнц-регулярных многообразий (опр., см. напр., [97]).

Как показывает обзор, получены интересные исчерпывающие результаты для унаров по изучению полноты, сравнимые лишь с абелевыми группами. Но большинство проблем для них пока не исследованы. Можно предположить, что многие сформулированные в обзоре проблемы можно решить для унаров без особого труда за исключением, быть может, общей проблемы описания редуцированных унаров. Как показывают исследования работы [60], это задача, как и в случае абелевых групп, может оказаться весьма трудной. По всей видимости, необходимо будет проводить исследования по определяемости унаров ульмовскими факторами. Представляет интерес изучение обсуждаемых понятий и для уноидов (унарных алгебр), т. е. алгебр с произвольным набором унарных операций.

Следует отметить, что мы не отвергаем существующие подходы к развитию структурных теорий классических алгебр, а лишь указываем другой подход, хорошо зарекомендовавший себя в теории абелевых групп. Тем более, что некоторые известные проблемы для классических алгебр вписываются в этот подход. Например, проблемы описания простых групп, а также групп, совпадающих со своим коммутантом, и минимальных неразрешимых групп естественно вписываются в проблемы описания полных и минимально полных конечных групп.

С другой стороны, в структурных теориях некоторых многообразий конкретных алгебр (например, групп, полугрупп ассоциативных алгебр и др.), возможно не осознанно, многие понятия используют атомы решетки их подмногообразий: например, конечная разрешимая группа обладает субнормальным рядом, факторы которого суть циклические группы простых порядков, т. е. группы из атомов решетки подмногообразий многообразия всех групп; понятия полурешетки полугрупп, левосингулярной и правосингулярной связок полугрупп, нильпотентной полугруппы связаны с атомами решетки подмногообразий многообразия всех полугрупп; при определении разрешимой линейной алгебры над бесконечным полем используется убывающий ряд степеней алгебры, факторы которого принадлежащие многообразию алгебр с нулевым умножением, которое является атомом решетки подмногообразий многообразия всех алгебр над бесконечным полем и др.

Ввиду сложности проблемы описания полных и редуцированных алгебр для достаточно «больших» многообразий алгебр, хотелось бы обратить внимание на изучение нашей проблематики для конечных алгебр и псевдомногообразий конечных алгебр. Хороший пример здесь доставляют исследования для полугрупп и ассоциативных колец. Заслуживает внимания изучение конечно редуцированных алгебр. Последние принадлежат произведению конечного набора атомов решетки подмногообразий данного многообразий алгебр и зачастую являются локально конечными (это имеет место, например, в случаях групп, полугрупп и ассоциативных колец).

Еще раз подчеркнем, что наши проблемы — это программа для исследования обсуждаемых понятий. Поэтому решение какой-либо из них для конкретного вида алгебр не всегда является большим достижением, а иногда это решение вообще тривиально. Но многие из них, как показывают проведенные исследования, уже для конкретных видов алгебр являются довольно трудными. Не говоря уже о решении (разумеется, приемлемом, лучше всего сводящемуся к языку узкого исчисления предикатов) той или иной проблемы для произвольных многообразий алгебр, которым они адресованы. При этом мы не формулируем в виде отдельных проблем естественные общие задачи по исследованию обсуждаемых в обзоре понятий для произвольных алгебр.

Обзор результатов по изучению аналогов основных понятий теории абелевых групп, на наш взгляд, подтверждает жизненность предложенной автором в работе [59] проблематики по их исследованию. Получен ряд интересных и глубоких результатов для разных видов алгебр. Приведенная ниже таблица 2,

Таблица 2. СОСТОЯНИЕ ИЗУЧЕНИЯ ПРОБЛЕМ

No $\backslash\mathcal{V}$	$\mathcal{UA}$	$\mathcal{G}$	$\mathcal{M}$	$\mathcal{A}s$	$\mathcal{L}i$	$\mathcal{A}l$	$\mathcal{J}$	$\mathcal{S}$	$\mathcal{S}^1$	$\mathcal{S}^0$	$\mathcal{K}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{U}$
3.1	$\pm$	$+$	$+$	$+-$	$+-$	$+-$	$+-$	$+$	$+-$	$+-$	$+$	$\oplus$	$-$
3.2	$\pm$	$+$	$\pm$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$
3.3	$\pm$	$+-$	$\pm$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
3.4	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$-$	$-$
3.5	$-$	$\oplus$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\mp$	$\mp$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\oplus$	$\oplus$
3.6	$-$	$\oplus$	$\pm$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\oplus$	$\oplus$
3.7	$-$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\mp$	$\mp$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\pm$	$+$
3.8	$-$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$-$	$-$	$+$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$-$	$\pm$
3.9	$\mp$	$\oplus$	$\mp$	$\mp$	$\mp$	$\mp$	$\mp$	$+$	$\mp$	$+$	$\mp$	$\mp$	$\mp$
3.10	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$-$	$-$	$-$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$-$	$+$
3.11	$\pm$	$\oplus$	$\pm$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
3.12	$-$	$\mp$	$\pm$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
3.13	$-$	$\mp$	$\pm$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
3.14	$-$	$\mp$	$\pm$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
3.15	$-$	$\mp$	$\pm$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
3.16	$\pm$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$-$	$-$
3.17	$\pm$	$+$	$\pm$	$\pm$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$
3.18	$\pm$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$
3.19	$\pm$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
3.20	$-$	$\pm$	$\pm$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
3.21	$\pm$	$-$	$\pm$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
3.22	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\pm$	$+$	$\pm$	$+$	$-$	$-$
3.23	$\pm$	$-$	$\pm$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
3.24	$-$	$-$	$\pm$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
3.25	$-$	$-$	$\pm$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
3.26	$-$	$-$	$\pm$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
3.27	$\pm$	$+$	$+$	$\pm$	$+$	$-$	$-$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$-$	$-$
3.28	$-$	$+$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

отражающая степень изученности основной проблематики раздела 3 для рассмотренных в обзоре видов алгебр, открывает перед будущими исследователями широкое поле деятельности (смысл обозначений, используемых в таблице 2, дан в конце этой таблицы).

Сделаем некоторые пояснения к этой таблице. В левом крайнем столбце указаны номера проблем из раздела 3, а в первой строке — обозначения многообразий. Разъясним смысл только тех, которые либо не встречались в предыдущем тексте, либо встречались редко и давно: $\mathcal{UA}$ — многообразие произвольных универсальных алгебр; $\mathcal{M}$ — многообразие всех модулей над произвольным ненулевым ассоциативным кольцом с единицей; $\mathcal{A}s$ [$\mathcal{L}i$, $\mathcal{A}l$, $\mathcal{J}$] — многообразие всех ассоциативных [лиевых, альтернативных, йордановых] алгебр над произвольным дедекиндовом кольцом.

Для данного вида алгебр знаки, фигурирующие в таблице, имеют следующие значения: «$\oplus$» — решение соответствующей проблемы либо вытекает из результатов предшествующего появлению нашей проблематики периода, либо тривиально; «+» — проблема решена в указанный в статье период; «−» — проблема не исследовалась; «±» — проблема исследовалась в рассматриваемый в обзоре период, но не решена до конца; «+−» — проблема решена для свойства, указанного в проблеме первым, а для второго остается открытой; «∓» — вполне возможно, что по проблеме можно извлечь некоторую информацию из результатов предшествующего периода, но в обозначенный в обзоре период она не исследовалась (например, из результатов о вложении конечных алгебр в конечные конгруэнц-простые алгебры можно получить некоторую информацию о проблемах 3.6 и 3.9 для данного вида алгебр).

При использовании знаков не учитываются результаты исследования обсуждаемых понятий для абелевых групп для других видов алгебр (например, для групп, полугрупп, модулей, колец и др.). Аналогично, исследования для модулей не идут в зачет линейным алгебрам и др. Проблемы для одного вида алгебр, сводящиеся к проблемам для алгебр другого вида (т. е. решаемые по «модулю других алгебр») считаются решенными для первого вида алгебр. Поэтому не надо удивляться, что, например, проблема 3.7 описания конечных полных алгебр для полугрупп решена, а для групп нет.

В заключение подчеркнем особую роль структурных теорий алгебр (не умаляя при этом роль других теорий). В настоящее время в практических приложениях (в криптографии, в теории кодирования и др.) широко востребованы классические алгебры: группы, кольца, поля, полугруппы и др. И никто не может предвидеть, какие свойства этих или других алгебраических структур понадобятся в дальнейшем. Поэтому, на наш взгляд, необходимо развивать структурные теории классических алгебр, используя различные подходы.

Автор глубоко благодарен Юрию Леонидовичу Ершову и Льву Наумовичу Шеврину за поддержку исследований автора по «неземной» проблеме спектров разрешимости, без которых автор вряд ли смог бы *увидеть* вполне «земную» проблематику, обзор исследований по которой приведен в настоящей статье. Автор выражает особую благодарность Ю. Л. Ершову за содействие в получении финансирования исследований по изучению обсуждаемых здесь понятий.

References

[1] V. A. Artamonov, *Lattices of varieties of linear algebras* (in Russian), Uspekhi Mat. Nauk, **33**:2 (1978), 135–167. English version: Russian Mathematical Surveys **33**:2 (1978), 155–193. MR0495500

[2] H. Bass, *Finistic dimension and a homological generalization of semiprimary rings*, Trans. Amer. Math. Soc., **95**:3 (1960), 466–488. Zbl 0094.02201

[3] L. Bican, *Kulikov's criterian for modules*, J. reine and angew., **288** (1976), 154–159. Zbl 0333.16021

[4] L. Bican, *The structure of primary modules*, Acta Univ. Carol. Math. et. phys., **17**:2 (1977), 3–12.

[5] S. N. Chernikov, *Groups with systems of complemented subgroups* (in Russian), Mat. Sbornik., **35 (77)**:1 (1954), 93–128. Zbl 0131.25303

[6] T. Ju. Fink, *Finite complete semigroups* (in Russian), Estestv. Nauki i Èkologiya, Omsk: OmGPU, **4** (1999), 8–14.

[7] T. Ju. Fink, *Finite semigroups with greatest complete subsemigroups* (in Russian), Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie, Omsk: OmGPU, **2** (2002), 28–34.

[8] T. Ju. Fink, *Embeddability and minimal completeness of finite semigroups* (in Russian), Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie, Omsk: OmGPU, **1** (2002), 20–25.

[9] T. Ju. Fink, *Splitable pseudovarieties of finite semigroups* (in Russian), Vestn. Omsk. Univers., Omsк: OmGU, No. 4 (2005), 33–35.

[10] T. Ju. Fink, *Pseudovarieties of finite semigroups having the complete radical* (in Russian), Sib. Èlectron. Matem. Izv., **5** (2008), 673—684. MR2586666

[11] T. Ju. Fink, *Complete, reduced, and primary finite semigroups* (in Russian), Dissert., Омsк, 2006.

[12] L. Fuchs, A. Kertesz, T. Szele, *Abelian groups in which every serving subgroups is a direct summand*, Publ. Math., **3** (1953), 95–105.

[13] *General algebra*, Vol. 1., Under the general editorship of L. A. Skornyakov (in Russian), M.: Nauka, 1990. Zbl 0751.00002

[14] *General algebra*, Vol. 2., Under the general editorship of L. A. Skornyakov (in Russian), M.: Nauka, 1991. Zbl 0768.00004

[15] G. Grätzer *General theory of lattices*, Translation from English, Under the editorship of D. M Smirnov (in Russian), M.: Mir, 1981.

[16] R. Hamsher, *Commutative rings over which every module has a maximal submodule*, Proc. Amer. Math. Soc., **18** (1967), 1133–1137. Zbl 0156.04303

[17] N. Jacobson, *Structure of rings* (in Russian), M.: Izdat. Inostran. Liter., 1961. Zbl 0098.25901

[18] J. Kalicki , D. Scott, *Equational completness of abstract algebras*, Indag. Math., **17** (1955), 650–659 (Translation in Russian: Kibern. sb., **2** (1961), 41–52). Zbl 0156.24801

[19] K. Katô. *On abelians groups every subgroup in wich is neat subgroup*, Comment. Math. Univ. St. Pauli., **15** (1966/67), 117–118. Zbl 0154.02103

[20] O. V. Knyazev, *On pure algebras* (in Russian), Vestn. Omsk. Univers., No. 3 (2001), 18–20. Zbl 1024.08500

[21] O. V. Knyazev, *On pure algebras with distinguished idempotent* (in Russian), Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie, Omsk: OmGPU, **1** (2002), 17–19.

[22] O. V. Knyazev, *On absolutely pure algebras with distinguished idempotent* (in Russian), Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie, Omsk: OmGPU, **2** (2002), 23–25.

[23] O. V. Knyazev, *On pure algebras and retracts*, Actual problems of contemporary Science and Education: Collection of Scientific Works on Materials of the International Scientific-Practical Conference on 30 April 2015, In 5 Parts, Part I (in Russian), M.: «AR-Consalt», 2015, 32–34.

[24] O. V. Knyazev, *On pure cyclic subgroups of groups* (in Russian), Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie, Omsk: OmGPU, **5** (2006), 24–26.

[25] O. V. Knyazev, *Semigroups with hereditarly pure semigroups* (in Russian), Izvestiya Ural. Univers., Mathematika i Mekhanika, Ekaterinburg: UrGU, **8**:38 (2005), 69–79. MR2907155

[26] O. V. Knyazev, *On minimally complete commutative epigroups* (in Russian), Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie, Omsk: OmGPU, **10** (2011), 6–8.

[27] O. V. Knyazev, *Hereditarily pure monoids* (in Russian), Sib. Èlectron. Mat. Izv., **2** (2005), 83–87. MR2152926

[28] O. V. Knyazev, *Hereditarily pure commutative monoids* (in Russian), Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie, Omsk: OmGPU, **3** (2003), 16–19.

[29] O. V. Knyazev, *On simple under purity monoids* (in Russian), Èlectron. Nauch. Zhurn. «Vestn. OmGPU», 2007.

[30] O. V. Knyazev, *On hereditarily pure semigroups* (in Russian), Vestn. Omsk. Univers., Omsk: OmGU, No. 3 (2003), 13–15.

[31] O. V. Knyazev, *Semigroups with zero without pure cyclic subsemigroups* (in Russian), Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie, Omsk: OmGPU, **6** (2007), 15–17.

[32] O. V. Knyazev, *On simple under purity semigroups with zero* (in Russian), Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie, Omsk: OmGPU, **7** (2008), 19–21.

[33] O. V. Knyazev, *On complete nilsemigroups*, Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie, Omsk: OmGPU, **8** (2009), 10–12.

[34] O. V. Knyazev, *On minimally complete commutative nilsemigroups* (in Russian), Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie, Omsk: OmGPU, **9** (2010), 12–14.

[35] O. V. Knyazev, T. Ju. Fink, *Minimal complete periodic semigroups with zero which the set of nilelements is not subsemigroup* (in Russian), Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie, Omsk: OmGPU, **8** (2009), 12–15.

[36] O. V. Knyazev, T. Ju. Fink, *Minimal complete finite semigroups with zero which the set of nilelements is subsemigroup* (in Russian), Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie, Omsk: OmGPU, **9** (2010), 14–18.

[37] O. V. Knyazev, T. Ju. Fink, *On simple under purity periodic semigroups with zero*, International Conference MAL'TSEV MEETING dedicated to the 100th anniversary of Anatoliĭ Ivanovich Mal'tsev August 24–28, 2009, Collection of Abstracts, Novosibirsk, 2009, p. 58. (In Russian)

[38] O. V. Knyazev, *Clifford semigroups with pure subsemigroups* (in Russian), Rukopis' predstavlena Sib. Mat. Zh. Dep. VINITI 30 marta 2000 g., No. 861-B00.

[39] O. V. Knyazev, *Simple under purity completelly regular semigroups* (in Russian), Vestn. Omsk. Univers., Omsk: OmGU, No. 4 (2006), 9–11.

[40] Yu. A. Kolmakov, *Group varieties whose members satisfy some property close to solvability* (in Russian), Mat. Zametki, **35**:5 (1984), 735–738. MR750814

[41] L. A. Koifman, *Rings over which each module has a maximal submodule* (in Russian), Mat. Zametki, **7**:3 (1970), 359–367. MR262303

[42] A. I. Kornev, *On modules with pure submodules*, Universal algebra and its applications (Volgograd, September 6–11, 1999). Works of the international seminar. (in Russian) Volgograd: Peremena, 2000, 144–152.

[43] A. I. Kornev, *Purely simple modules of reduced varieties of modules over commutative rings* (in Russian), Vestn. Omsk. Univers., Omsk: OmGU, No. 4 (2000), 13–15. Zbl 1032.13501

[44] A. I. Kornev, *On complete modules*, In: Abelian Groups and Modules (in Russian), Tomsk: TGU, **15** (2000), 30–37.

[45] A. I. Kornev, *Rings over which all modules are absolutely pure* (in Russian), Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie, Omsk: OmGPU, **1** (2002), 29–31.

[46] A. I. Kornev, *Pure injective modules* (in Russian), Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie, Omsk: OmGPU, **2** (2002), 26–28 .

[47] A. I. Kornev, *Absolutely pure and purely simple modules* (in Russian), Dissert., Omsk, 2001.

[48] A. I. Kornev, T. V. Pavlova, *Finite complete associative rings* (in Russian), Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie, Omsk: OmGPU, **1** (2002), 43–45.

[49] A. I. Kornev, T. V. Pavlova, *Characterization of a radical of group rings over finite simple fields* (in Russian), Sib. Mat. Zh. **45** (2004), 613–623. English version: Siberian Math. J., **45** (2004), 504–512. MR2078720

[50] A. I. Kornev, *Complete radicals of some group rings* (in Russian), Sib. Mat. Zh., **48** (2007), 1065–1072. English version: Siberian Math. J. **48** (2007), 857–862. MR2364626

[51] A. G. Kurosh, *The theory of groups* (in Russian), M.: Nauka, 1967. Zbl 0189.30801

[52] A. G. Kurosh, *Radicals in the group theory* (in Russian), Sib. Mat. Zh., **3** (1962), 912–931. MR0177038

[53] A. G. Kurosh, *Radicals of rings and algebras* (in Russian), Mat. Sbornik, 1953. **33**, 13–26. Zbl 0050.26101

[54] I. V. L'vov, E. I. Khukhro, *Comments to Question 5.56* (in Russian), Kourovskaya tetrad' (nereshen. zadachi teorii grupp), Novosibirsk, 1978, s. 73.

[55] A. I. Mal'cev, *On the multiplication of classes of algebraic systems* (in Russian), Sib. Mat. Zh., **8** (1967), 346–365.

[56] A. I. Mal'cev, *Algebraic systems* (in Russian), M.: Nauka, 1970. Zbl 0223.08001

[57] L. M. Martynov, *Pirmary and reduced varieties of semigrops*, International conference «Semigroups and their appendices, including semigroup rings» in honour E. L. Lyapin (St. Petersburg, June 19–30, 1995), Abstracts of reports. Ekaterinburg, 1995, p. 38. (In Russian)

[58] L. M. Martynov, *On notions of completeness, solvability, primarity, reducibility and purity for arbitrary algebras*, International conference on Modern Algebra and Its Applications. Vanderbilt Univ., Nashville, Tennessee, May 14–18, 1996, Schudule and Abstracts, 79–80.

[59] L. M. Martynov, *On concepts of completeness, reducibility, primarity, and purity for arbitrary algebras*, Universal algebra and its applications (Volgograd, September 6–11, 1999). Works of the International seminar (in Russian), Volgograd: Peremena, 2000, 179–190.

[60] L. M. Martynov, *The problem of spectra solvability for varieties of algebras* (in Russian), Algebra i Logika, **29**:2 (1990), 162–178. English version: Algebra and Logic, **29**:2 (1990), 113–124. MR1131148

[61] L. M. Martynov, *On varieties of solvable algebras* (in Russian), Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat., **33**:6 (1989), 85–87. English version: Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika), **33**:6 (1989), 87–89. MR1017782

[62] L. M. Martynov, *On relatively complete algebras* (in Russian), Vestn. Omsk. Univers., Omsk: OmGU, No. 3 (2000), 9–11.

[63] L. M. Martynov, *On complete and reduced algebras* (in Russian), Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie, Omsk: OmGPU, **3** (2003), 3–8.

[64] L. M. Martynov, *One radical algebras with a property of transversality by minimal varieties* (Russian), Vestn. Omsk. Univers., Omsk: OmGU, No. 2 (2004), 19–21.

[65] L. M. Martynov, *On primary and reduce varieties of modules* (in Russian), Vestn. Omsk. Univers., Omsk: OmGU, No. 4 (1999), 29–31.

[66] L. M. Martynov, *On attainability and solvability for varietis of modules* (in Russian), Issledov. algebraic. system, Sverdlovsk: UrGU, 1984, 56–74.

[67] L. M. Martynov, *Solvability spectra for varieties of Lie algebras and Lie rings* (in Russian), Matem. Zametki, **45**:1 (1989), 66–71. English version: Mathematical Notes, **45**:1 (1989), 45–48. MR987357

[68] L. M. Martynov *On primary and reduced varieties of monoassociative algebras* (in Russian), Sib. Mat. Zh., **42** (2001), 103–112. English version: Siberian Math. J., **42** (2001), 91–98. MR1830796

[69] L. M. Martynov, *Hereditarily pure associative rings* (in Russian), Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie, Omsk: OmGPU, **9** (2010), 25–36.

[70] L. M. Martynov, *Hereditarily pure associative algebras over a Dedekind ring whose maximal ideals have finite indices* (in Russian), Algebra i Logika **50** (2011), 781–801. English version: Algebra Logic **50** (2012), 526–538. MR2953278

[71] L. M. Martynov, *On hereditary pure associative algebras over a Dedekind ring* (in Russian), Sib. Èlectron. Matem. Izv., **10** (2013), 475—490.

[72] L. M. Martynov, *Primary varieties of semigroups* (in Russian), Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie, Omsk: OmGPU, **1** (2002), 3–9.

[73] L. M. Martynov, *Reduced semigroup varieties* (in Russian), Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Matem., **48**:2 (2004), 76–79. English version: Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika), **48**:2 (2004), 73–76. MR2070006

[74] L. M. Martynov, *Varieties in which each semigroup is reduced* (in Russian), Matematika i informatika: nauka i obrazovanie, Omsk: OmGPU, **4** (2004), 13–21.

[75] L. M. Martynov, *Varieties of commutative semigroups having the complete radical* (in Russian), Vestn. Omsk. Univers., Omsk: OmGU, No. 4 (2014), 14–18.

[76] L. M. Martynov, T. Ju. Fink, *On primary semigrops* (in Russian), Vestn. Omsk. Univers., Omsk: OmGU, No. 3 (2002), 18–20.

[77] L. M. Martynov, T. Ju. Fink *Splittable varieties of groups and semigroups* (in Russian), Vestn. Omsk. Univers., Omsk: OmGU, No. 2 (2013), 32–36.

[78] L. M. Martynov, O. V. Knyazev, *On finite groups in which every pure subgroup is a direct factor*, Vestn. Omsk. Univers., Omsk: OmGU, No. 2 (2014), 25–26.

[79] L. M. Martynov, T. V. Pavlova, *On minimally complete associative rings*, International Conference MAL'TSEV MEETING dedicated to 75th anniversary of Yuriĭ L. Ershov, May 3–7, 2015, Collection of Abstracts, Novosibirsk: NGU, p. 166. (In Russian)

[80] T. A. Martynova, *Minimally complete unars* (in Russian), Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie, Omsk: OmGPU, **9** (2010), 36–39.

[81] T. A. Martynova, *Complete unars* (in Russian), Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie, Omsk: OmGPU, **10** (2011), 11–16.

[82] A. P. Mishina, L. A. Skornyakov, *Abelian groups and moduls* (in Russian), M.: Nauka, 1969.

[83] B. H. Neumann, H. Neumann, P. M. Neumann, *Wreath products and varieties of groups*, Math. Z., **80**, No. 1 (1962), 44—62.

[84] V. V. Ovchinnikov *On rings over which each module is reduced* (in Russian), In: Abelian Groups and Modules, Tomsk: TGU, **15** (2000), 46–54.

[85] V. V. Ovchinnikov *On minimally complete modules over commutative local rings* (in Russian), Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie, Omsk: OmGPU, **2** (2002), 54–56.

[86] T. V. Pavlova, *Complete associative Artin rings* (in Russian), Vestn. Omsk. Univers., Omsk: OmGU, No. 1 (2005), 17–19.

[87] T. V. Pavlova, On reduced associative Artinian rings, In: Problems and Prospects of Phys.-Math. and Techn. Education (in Russian), Ishim: Filial TyumGU in Ishim, 2014, 40–46.

[88] T. V. Pavlova, *Complete radical of full ring of matrices over an arbitrary ring* (in Russian), Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie, Omsk: OmGPU, **10** (2011), 16–19.

[89] F. Pastijn, M. Volkov, *Minimal Nonnryptin e-Varieties of regular semigroups*, J. Algebra, 184: 3 (1996), 881–896.

[90] Yu. P. Razmyslov, *An example of unsolvable just non-cross varieties of groups* (in Russian), Algebra i Logika, **11**:2 (1972), 186–205. MR311770

[91] B. N. Rudakov, *On atomically complete lattices* (in Russian), Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie, Omsk: OmGPU, **10** (2011), 19–22 .

[92] B. N. Rudakov, *Reduced varieties of unary* (in Russian), Vestn. Omsk. Univers., Omsk: OmGU, No. 2 (2013), 45–47.

[93] M. V. Sapir, E. V. Suhanov *On varieties of periodic semigroups* (in Russian), Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Matem., **4** (1981), 48–55. MR624862

[94] L. N. Shevrin, L. M. Martynov, *On attainable classes of algebras* (in Russian), Sib. Mat. Zh., **12** (1971), 1363–1381. English version: Siberian Mathematical Journal, 1971, **12** (1971), 986-998. MR0291059

[95] L. N. Ševrin, L. M. Martynov, *Attainability and solvability for classes of algebras*, Semigroups (Coll. Math. Soc. J. Bolyai. 39), Eds. G. Poliak, St. Schwarz, O. Steinfeld. Amsterdam; Oxford; New York, 1985, 397–459.

[96] A. L. Shmel'kin , *The semigroup of group varieties* (in Russian), Dokl. Akadem. Nauk SSSR **149**:3 (1963), 543—545.

[97] D. M. Smirnov *Varieties of algebras* (in Russian), Novosibirsk: VO «Nauka», 1992.

[98] S. N. Subramanian, T. R. Sundararaman *Precomplete varieties of semigroups*, Semigroup Forum, **8**:3 (1974), 278–281.

[99] T. R. Sundararaman, *Precomplete varieties of R-algebras*, Alg. Univers., **5**:1 (1975), 397–405.

[100] A. Tarski, *Equationally complete rings and relation algebras*, Indag. Math., **18** (1956), 39–46. MR008296

[101] A. A. Tuganbaev, *Maximal submodules and locally perfect rings* (in Russian), Matem. Zametki, 64:1 (1998), 136–142. MR1694049

[102] A. A. Tuganbaev, *Primitively pure submodules and primitively divisible modules*, J. Math. Sci., **110**:3 (2002), 2746–2754. MR1922413

[103] M. R. Vaughan-Lee and James Wiegold, *Countable locally nilpotent groups of finite exponent without maximal subgroups*, Bull. Math. Soc., **13**:1 (1981), 45–46. Zbl 0418.20027

[104] M. V. Volkov, *Separation of the radical in ring varieties*, Acta Sci. Math. **46** (1983), 73–75. Zbl 0534.16016

[105] K. A. Zhevlakov, A. M. Slin'ko, I. P. Shestakov, A. I. Shirsnov, *Rings close to associative rings* (in Russian), M.: Nauka, 1978. Zbl 0445.17001

[106] I. V. Znaeva, *Hereditarly pure Lie algebras* (in Russian), Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie, Omsk: OmGPU, **6** (2007), 12–15.

[107] I. V. Znaeva *On the complete radical matrix Lie algebras* (in Russian), Matematika i Informatika: Nauka i Obrazovanie, Omsk: OmGPU, **7** (2008), 13–18.

[108] O. Zariski, P. Samuel, *Commutative algebra* (in Russian), Vol. 1, M.: Izdat. Inostran. Liter., 1963. Zbl 0112.02902

Leonid Martynov
Omsk State Pedagogical University,
Tukhachevsky Enbankment, 14
644099, Omsk, Russia
E-mail address: mart@omsk.edu; l.m.martynov@yandex.ru