S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 252–259 (2016) УДК 519.644
DOI 10.17377/semi.2016.13.018 MSC 65D32

КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ НА СФЕРЕ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ ДИЭДРА $\mathbf{D_{2h}}$

А.С. ПОПОВ

Abstract. An algorithm of searching for the best (in a sense) cubature formulas on a sphere that are invariant under the transformations of dihedral group of rotations with inversion D2h is described. This algorithm is applied to find parameters of all the best cubature formulas of this symmetry group up to the 35th order of accuracy.

Keywords: numerical integration, invariant cubature formulas, invariant polynomials, dihedral group of rotations.

1. Введение

С момента создания С.Л. Соболевым общей теории кубатурных формул на сфере, инвариантных относительно преобразований конечных групп вращений, прошло уже более полувека (см. [1, 2]). За это время наибольшее распространение получили кубатурные формулы, инвариантные относительно групп симметрии правильных многогранников (см. [3–18] и имеющуюся там литературу). Среди этих кубатурных формул особый интерес представляют кубатуры, инвариантные относительно групп вращений тетраэдра, октаэдра и икосаэдра с инверсией. Эти формулы обладают центральной симметрией и поэтому автоматически точны для всех одночленов нечётной степени.

Кубатурные формулы, инвариантные относительно различных диэдральных групп симметрии, рассматривались в работах [19–23]. В частности, в [21] был предложен алгоритм построения наилучших (в некотором смысле) кубатур на сфере, инвариантных относительно группы вращений диэдра с инверсией D_{6h}, а в [22] – относительно группы D_{4h}.

Popov, A.S., Cubature formulas on a sphere invariant under the dihedral group D2h .

Поступила 17 февраля 2016 г., опубликована 25 марта 2016 г.

В данной работе будет описан аналогичный алгоритм построения наилучших кубатур, инвариантных относительно группы D_{2h}. Будут проведены расчёты по этому алгоритму с целью определить параметры всех наилучших кубатур данной группы симметрии до 35-го порядка точности n. При этом для $n \le 11$ будут найдены точные значения параметров соответствующих кубатур, а для остальных n — приближенные, полученные путём численного решения систем нелинейных алгебраических уравнений методом ньютоновского типа. Даются с 16 значащими цифрами параметры новой кубатуры для $n = 13$.

2. Алгоритм поиска наилучших кубатур группы D_{2h}

Пусть S – единичная сфера с центром в начале координат, т. е. множество точек $(x, y, z) \in R_3$, для которых $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Рассмотрим на S интеграл

$$U(f) = \frac{1}{4\pi} \int_S f(s)\, ds, \tag{1}$$

где $s \in S$, ds – элемент поверхности сферы, $U(1) = 1$.

Для численного нахождения интеграла (1) построим кубатурную формулу, инвариантную относительно преобразований группы D_{2h}, в виде

$$\begin{aligned} V(f) = & A_0 \sum_{j=1}^{2} f(a_{0j}) + B_0 \sum_{j=1}^{2} f(b_{0j}) + C_0 \sum_{j=1}^{2} f(c_{0j}) + \sum_{i=1}^{J} A_i \sum_{j=1}^{4} f(a_{ij}) + \\ & \sum_{i=1}^{K} B_i \sum_{j=1}^{4} f(b_{ij}) + \sum_{i=1}^{L} C_i \sum_{j=1}^{4} f(c_{ij}) + \sum_{i=1}^{M} D_i \sum_{j=1}^{8} f(d_{ij}), \end{aligned} \tag{2}$$

где 2 точки a_{0j} лежат на оси z и имеют координаты $(0, 0, \pm 1)$; 2 точки b_{0j} лежат на оси x при координатах $(\pm 1, 0, 0)$; 2 точки c_{0j} лежат на оси y при координатах $(0, \pm 1, 0)$; 4 точки a_{ij} лежат в плоскости $z = 0$ при координатах $(\pm a_i, \pm b_i, 0)$; 4 точки b_{ij} лежат в плоскости $y = 0$ при координатах $(\pm c_i, 0, \pm d_i)$; 4 точки c_{ij} лежат в плоскости $x = 0$ при координатах $(0, \pm g_i, \pm h_i)$; 8 точек d_{ij} являются точками общего положения при координатах $(\pm p_i, \pm q_i, \pm r_i)$.

Преобразования группы D_{2h} исчерпываются операциями отражения относительно координатных плоскостей $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$. При этом узлы d_{ij} кубатурной формулы (2) образуют невырожденную параллелепипедальную решетку узлов, а остальные узлы – вырожденную, когда параллелепипед вырождается в прямоугольник или отрезок.

Общее число узлов в кубатурной формуле (2) обозначим через N.

Будем говорить, что данная кубатурная формула имеет алгебраический порядок точности n (или просто порядок n), если она точна для всех многочленов степени не выше n и не точна хотя бы для одного многочлена степени $n + 1$.

Применительно к нашему случаю теорема 1 из [2] будет звучать так.

Теорема 1. *Для того чтобы кубатура (2) имела порядок n, необходимо и достаточно, чтобы она была точна для всех инвариантных относительно группы D_{2h} многочленов степени не выше n.*

Поскольку кубатура (2) инвариантна относительно отражений в плоскостях $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$, она автоматически точна для всех нечётных степеней x, y и z. Так как на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, то любой инвариантный относительно группы D_{2h} многочлен можно представить на единичной сфере в виде многочлена от базисных инвариантных форм второй степени $u = x^2$ и $v = y^2$.

Выпишем все многочлены, образующие базис в пространстве инвариантных относительно группы D_{2h} многочленов до восьмой степени включительно:

$$1, u, v, u^2, uv, v^2, u^3, u^2v, uv^2, v^3, u^4, u^3v, u^2v^2, uv^3, v^4.$$

Заметим, что в узлах a_{0j} $u = v = 0$; в узлах b_{0j} $u = 1$, $v = 0$; в узлах c_{0j} $u = 0$, $v = 1$; в узлах a_{ij} $u + v = 1$; в узлах b_{ij} $v = 0$; в узлах c_{ij} $u = 0$.

Параметрами кубатуры (2) являются веса A_0, B_0, C_0, A_i, B_i, C_i, D_i и координаты узлов a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}. С учетом уравнений связи

$$a_i^2 + b_i^2 = 1, \quad c_i^2 + d_i^2 = 1, \quad g_i^2 + h_i^2 = 1, \quad p_i^2 + q_i^2 + r_i^2 = 1$$

легко видеть, что узлы a_{0j}, b_{0j} и c_{0j} имеют по одному свободному параметру (это их вес A_0, B_0 и C_0), узлы a_{ij}, b_{ij} и c_{ij} – по два свободных параметра, а узлы d_{ij} – по три свободных параметра. В итоге на один свободный параметр приходится: 2 узла a_{0j}, b_{0j}, c_{0j}, a_{ij}, b_{ij} или c_{ij}, 8/3 узлов d_{ij}.

Обозначим общее число базисных многочленов степени не выше n через m. Поскольку общее число свободных параметров в кубатуре порядка n должно быть равно m, то для получения формулы с минимальным для данного n числом узлов N выгоднее всего использовать в первую очередь узлы a_{0j}, b_{0j}, c_{0j}, a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} и лишь в последнюю очередь — узлы d_{ij}.

Однако здесь имеется одно существенное ограничение. Дело в том, что среди базисных многочленов степени $n \geq 6$ содержатся многочлены вида $u^k v^l w$, где $k, l = 0, 1, \ldots$; $w = x^2 y^2 z^2 = uv(1 - u - v)$. Эти многочлены обращаются в нуль в узлах a_{0j}, b_{0j}, c_{0j}, a_{ij}, b_{ij} и c_{ij}. В то же время интеграл $U(u^k v^l w) > 0$. Поэтому правильное интегрирование этих многочленов возможно лишь с привлечением узлов d_{ij}. Для кубатуры порядка n число базисных функций, требующих привлечения узлов d_{ij}, есть величина m_0, которая равна полному числу базисных функций m для кубатуры степени $n-6$ (в самом деле, умножая произвольную базисную функцию любой степени n вида $u^k v^l$ на w, мы получим базисную функцию степени $n + 6$, требующую привлечения узлов d_{ij}). Таким образом, величина M в (2) должна быть такой, чтобы выполнялось условие $3M \geq m_0$.

Далее задаем величины J, K, L в (2) так, чтобы общее число свободных параметров кубатуры было равно m. При этом, если нужно, можно положить $A_0 = 0$, $B_0 = 0$ или $C_0 = 0$.

Затем подставляем m базисных функций на место f в формулу (2) и решаем систему m нелинейных алгебраических уравнений с m неизвестными параметрами кубатуры. В отличие, например, от случая группы вращений октаэдра [15], здесь мы не можем заранее быть уверены, что возникающая система нелинейных уравнений будет разрешима. Тем более мы не можем заранее гарантировать, что все веса кубатуры будут положительны. Поэтому, как правило, нужно выполнить несколько попыток с разным набором параметров кубатуры, чтобы получить для данного n формулу с минимальным N и с положительными весами. В случае наличия нескольких таких формул с одинаковым N наилучшей среди них считается та, которая имеет наименьшую величину главного члена погрешности E_{n+1} (см. [15, 22]). Если же случится так, что какие-то конкурирующие формулы имеют одинаковую величину E_{n+1}, то будем учитывать величину E_{n+2} и т. д.

Заметим, что группа D_{2h} является подгруппой групп D_{4h} и D_{6h}, для которых наилучшие кубатурные формулы строились в работах [22] и [21] соответственно. Кроме того, группа D_{2h} является подгруппой групп симметрии тетраэдра T_h, октаэдра O_h и икосаэдра Y_h (см., например, [24, 25]). Поэтому не исключена возможность, что для некоторых n наилучшие кубатуры группы D_{2h} могут совпадать с наилучшими кубатурами указанных групп более высокой симметрии.

3. Построение конкретных кубатур группы D_{2h}

С целью полноты изложения, приведём параметры всех наилучших кубатур группы D_{2h} для $n \leq 15$.

Кубатура $n = 1$, $N = 2$, $J = K = L = M = 0$, $A_0 = 1/2$, $B_0 = C_0 = 0$.

Эта формула тривиальна и имеет симметрию группы $D_{\propto h}$ (в этой группе ось z служит осью симметрии бесконечного порядка [25]). Разумеется, можно положить $B_0 = 1/2$, $A_0 = C_0 = 0$ или $C_0 = 1/2$, $A_0 = B_0 = 0$. Это будут идентичные формулы, отличающиеся лишь выбором осей декартовой системы координат.

Кубатура $n = 3$, $N = 6$, $J = K = L = M = 0$, $A_0 = B_0 = C_0 = 1/6$.

Эта формула также тривиальна и имеет симметрию группы вращений октаэдра с инверсией O_h [26].

Кубатура $n = 5$, $N = 12$, $J = K = L = 1$, $M = 0$, $A_0 = B_0 = C_0 = 0$, $A_1 = B_1 = C_1 = 1/12$, $a_1^2 = d_1^2 = g_1^2 = (5 + \sqrt{5})/10$, $b_1^2 = c_1^2 = h_1^2 = (5 - \sqrt{5})/10$.

Эта формула также хорошо известна и имеет симметрию группы вращений икосаэдра с инверсией Y_h [26].

Кубатура $n = 7$, $N = 22$, $J = 2$, $K = 1$, $L = 0$, $M = 1$, $B_0 = C_0 = 0$.

Поочерёдно подставляя в (2) десять базисных функций, получим следующую систему:

$$
\begin{aligned}
V(1) &= 2A_0 + 4A_1 + 4A_2 + 4B_1 + 8D_1 = 1,\\
V(u) &= 4A_1u_1 + 4A_2u_2 + 4B_1u_3 + 8D_1u_4 = 1/3,\\
V(v) &= 4A_1(1-u_1) + 4A_2(1-u_2) + 8D_1v_4 = 1/3,\\
V(u^2) &= 4A_1u_1^2 + 4A_2u_2^2 + 4B_1u_3^2 + 8D_1u_4^2 = 1/5,\\
V(uv) &= 4A_1u_1(1-u_1) + 4A_2u_2(1-u_2) + 8D_1u_4v_4 = 1/15,\\
V(v^2) &= 4A_1(1-u_1)^2 + 4A_2(1-u_2)^2 + 8D_1v_4^2 = 1/5,\\
V(u^3) &= 4A_1u_1^3 + 4A_2u_2^3 + 4B_1u_3^3 + 8D_1u_4^3 = 1/7,\\
V(u^2v) &= 4A_1u_1^2(1-u_1) + 4A_2u_2^2(1-u_2) + 8D_1u_4^2v_4 = 1/35,\\
V(uv^2) &= 4A_1u_1(1-u_1)^2 + 4A_2u_2(1-u_2)^2 + 8D_1u_4v_4^2 = 1/35,\\
V(v^3) &= 4A_1(1-u_1)^3 + 4A_2(1-u_2)^3 + 8D_1v_4^3 = 1/7,
\end{aligned}
$$

где $u_1 = a_1^2$, $u_2 = a_2^2$, $u_3 = c_1^2$, $u_4 = p_1^2$, $v_4 = q_1^2$.

Решая эту систему аналитически, находим:

$$
\begin{aligned}
&A_0 = 1/20,\\
&A_1 = 2(33-\sqrt{11})/1485, \qquad a_1^2 = (13-3\sqrt{11})/28, \quad b_1^2 = (15+3\sqrt{11})/28,\\
&A_2 = 2(33+\sqrt{11})/1485, \qquad a_2^2 = (13+3\sqrt{11})/28, \quad b_2^2 = (15-3\sqrt{11})/28,\\
&B_1 = D_1 = 49/1080, \qquad c_1^2 = 4/7, \quad d_1^2 = q_1^2 = r_1^2 = 3/7, \quad p_1^2 = 1/7.
\end{aligned}
$$

Узлы b_{1j} и d_{1j} этой кубатуры имеют равные веса и лежат в вершинах двух правильных шестиугольников. Веса и координаты этих узлов совпадают с весами и координатами 12 узлов b_{1j} двух кубатур $n = 7$, $N = 26$ группы D_{6h}, полученных в [21]. Кроме того, веса и координаты узлов a_{0j} данной кубатуры совпадают с таковыми из обеих указанных кубатур группы D_{6h}. Эти три формулы различаются лишь узлами, лежащими в плоскости $z = 0$: кубатура группы D_{2h} содержит в этой плоскости 8 свободных узлов a_{ij}, первая кубатура группы D_{6h} содержит 12 свободных узлов, а вторая – 12 фиксированных узлов (см. [21]). Однако в нашем случае группы D_{2h} мы также можем, по аналогии с группой D_{6h}, взять в плоскости $z = 0$ вместо восьми свободных узлов a_{1j} и a_{2j} четыре свободных узла a_{1j} и две пары фиксированных узлов b_{0j} и c_{0j}. Оказывается, что построенная таким образом кубатура совпадет (с точностью до обозначения осей координат) с построенной в [19, 22] кубатурой $n = 7$, $N = 22$ группы D_{4h}. Как и в случае двух кубатур $n = 7$, $N = 26$ группы D_{6h}, обе кубатуры $n = 7$, $N = 22$ имеют положительные веса, а также равные величины $E_{n+1} = E_8$, $E_{n+2} = E_9$, $E_{n+3} = E_{10}$ и $E_{n+4} = E_{11}$. Лишь величина E_{12} нашей кубатуры группы D_{2h} оказывается несколько меньше, чем соответствующая величина в кубатуре группы D_{4h} (0.6966 и 0.7256 соответственно).

Кубатура $n = 9$, $N = 32$, $J = K = L = 2$, $M = 1$, $A_0 = B_0 = C_0 = 0$, $A_1 = B_1 = C_1 = 5/168$, $A_2 = B_2 = C_2 = D_1 = 9/280$, $a_1^2 = d_1^2 = g_1^2 = (5+\sqrt{5})/10$, $b_1^2 = c_1^2 = h_1^2 = (5-\sqrt{5})/10$, $a_2^2 = d_2^2 = g_2^2 = (3-\sqrt{5})/6$, $b_2^2 = c_2^2 = h_2^2 = (3+\sqrt{5})/6$, $p_1^2 = q_1^2 = r_1^2 = 1/3$.

Эта формула хорошо известна и имеет, как и формула для $n = 5$, симметрию группы Y_h [27].

Кубатура $n = 11$, $N = 48$, $J = K = L = 2$, $M = 3$, $A_0 = B_0 = C_0 = 0$.

Точные значения параметров этой кубатуры, имеющей симметрию группы вращений тетраэдра с инверсией T_h, даны в [18].

Расчёт параметров наилучших кубатур группы D_{2h} для $n \geq 13$ проводился с использованием арифметики повышенной точности (более 30 десятичных знаков в мантиссе) на вычислительной технике Сибирского суперкомпьютерного центра. Системы нелинейных алгебраических уравнений решались численным методом ньютоновского типа, аналогичным работе [18].

Кубатура $n = 13$, $N = 64$, $J = K = 3$, $L = 2$, $M = 4$, $A_0 = B_0 = C_0 = 0$,

$$
\begin{aligned}
A_1 &= 0.1450750382390611E-1, & A_2 &= 0.1627102786010263E-1,\\
A_3 &= 0.1691127876515066E-1, & B_1 &= 0.1486169462844806E-1,\\
B_2 &= 0.1579316731553445E-1, & B_3 &= 0.1630080191932954E-1,\\
C_1 &= 0.1622038102076066E-1, & C_2 &= 0.1649929947528505E-1,\\
D_1 &= 0.1340227339445312E-1, & D_2 &= 0.1511526093970621E-1,\\
D_3 &= 0.1625727391691443E-1, & D_4 &= 0.1654261434466766E-1,\\
a_1 &= 0.9331020856119243E+0, & b_1 &= 0.3596115930092872E+0,\\
a_2 &= 0.6879097724901391E+0, & b_2 &= 0.7257962144518013E+0,\\
a_3 &= 0.2583933163367083E+0, & b_3 &= 0.9660397994247016E+0,\\
c_1 &= 0.3463429543287413E+0, & d_1 &= 0.9381079671268331E+0,\\
c_2 &= 0.9650457411251985E+0, & d_2 &= 0.2620815093365352E+0,\\
c_3 &= 0.7510260997252514E+0, & d_3 &= 0.6602725176254702E+0,\\
g_1 &= 0.9184769977281506E+0, & h_1 &= 0.3954744045374906E+0,\\
g_2 &= 0.2813870726040809E+0, & h_2 &= 0.9595943493848355E+0,\\
p_1 &= 0.1990705697111409E+0, & p_2 &= 0.4960363593371889E+0,\\
p_3 &= 0.4692464892506839E+0, & p_4 &= 0.7876854598651994E+0,\\
q_1 &= 0.6494305710211830E+0, & q_2 &= 0.3843967615230394E+0,\\
q_3 &= 0.7824460866878276E+0, & q_4 &= 0.4410463260087159E+0,\\
r_1 &= 0.7339011116614976E+0, & r_2 &= 0.7785801564040191E+0,\\
r_3 &= 0.4093725122096162E+0, & r_4 &= 0.4301508510175970E+0.
\end{aligned}
$$

Кубатура $n = 15$, $N = 84$, $J = K = L = 3$, $M = 6$, $A_0 = B_0 = C_0 = 0$.

Числовые значения параметров этой кубатуры, имеющей, как и формула $n = 11$, симметрию группы T_h, даны с 16 знаками в [12].

Приведём теперь сводную таблицу, содержащую основные характеристики всех наилучших на сегодняшний день кубатур группы D_{2h} до 35-го порядка точности.

n	N	E_{n+1}	n	N	E_{n+1}	n	N	E_{n+1}	n	N	E_{n+1}
1	2	2.2361	11	48	1.9700	21	160	1.6564	31	336	1.4782
3	6	2.2913	13	64	1.9977	23	190	1.6144	33	380	1.4662
5	12	2.3917	15	84	2.0117	25	222	1.7239	35	424	1.6075
7	22	2.1197	17	108	1.7681	27	258	1.5390			
9	32	2.2441	19	132	1.8019	29	296	1.4910			

Как говорилось выше, для $n = 1$ наилучшая кубатура группы D_{2h} имеет симметрию группы $D_{\infty h}$, для $n = 3$ – симметрию группы O_h, для $n = 5$, 9 – симметрию группы Y_h, а для $n = 11$, 15 – симметрию группы T_h. Все остальные наилучшие на сегодняшний день кубатуры группы D_{2h} не являются представителями каких-либо групп более высокой симметрии.

Заметим, что указанные в этой таблице кубатуры $n = 1$, 3, 5, 9, 13, 15, 21 – 35 являются наилучшими на сегодняшний день не только для группы D_{2h}, но и вообще среди всех групп симметрии.

4. Заключение

Был представлен алгоритм поиска наилучших кубатурных формул группы D_{2h} для сферы. Проведены расчёты по этому алгоритму с целью определить параметры всех наилучших кубатур данного вида симметрии до 35-го порядка точности n. При этом для $n \leq 11$ были найдены точные значения параметров соответствующих кубатур, а для остальных n — приближенные, полученные путём численного решения систем нелинейных алгебраических уравнений методом ньютоновского типа. Использованный в работе численный метод не гарантирует, что были найдены все возможные решения системы нелинейных уравнений, из которой определяются параметры кубатуры. Поэтому не исключена возможность, что для некоторых n полученные в работе результаты могут быть улучшены.

Список литературы

[1] S.L. Sobolev, *Cubature formulas on a sphere which are invariant under transformation of finite rotational groups*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **146**:2 (1962), 310–313 (in Russian). Zbl 0119.28701

[2] S.L. Sobolev, *On mechanical cubature formulas for the surface of a sphere*, Sibirskii Mat. Zh., **3**:5 (1962), 769–796 (in Russian). Zbl 0202.44501

[3] A.D. McLaren, *Optimal numerical integration on a sphere*, Math. Comput., **17**:83 (1963), 361–383. Zbl 0233.65016

[4] V.I. Lebedev, *Nodes and weights of Gauss-Markov type quadrature formulas from 9th to 17th accuracy orders for a sphere which are invariant under the octahedral group with inversion*, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., **15**:1 (1975), 48–54 (in Russian). Zbl 0341.65016

[5] V.I. Lebedev, *On quadratures for a sphere*, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., **16**:2 (1976), 293–306 (in Russian). Zbl 0348.65023, Zbl 0338.65014

[6] V.I. Lebedev, *Quadrature formulas for a sphere of the 25th to the 29th orders of accuracy*, Sibirskii Mat. Zh., **18**:1 (1977), 132–142 (in Russian). Zbl 0355.65017

[7] V.I. Lebedev, D.N. Laikov, *Quadrature formula of 131st algebraic order of accuracy for a sphere*, Dokl. RAN, **366**:6 (1999), 741–745 (in Russian). Zbl 0960.65029

[8] S.I. Konyaev, *Gauss type quadratures for a sphere invariant under icosahedral group with inversion*, Mat. Zametki, **25**:4 (1979), 629–634 (in Russian). Zbl 0435.65015

[9] S.I. Konyaev, *Formulas for numerical integration on a sphere*, Embedding Theorems and Their Applications / Trudy Seminara Akad. S.L. Soboleva, Novosibirsk, **1** (1982), 75–82 (in Russian). Zbl 0538.41044

[10] S.I. Konyaev, *On invariant quadrature formulae for a sphere*, Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, **10**:1 (1995), 41–47. Zbl 0833.41025

[11] I.P. Mysovskikh, *Interpolation Cubature Formulas*, Nauka, Moscow, 1981 (in Russian). Zbl 0537.65019

[12] A.S. Popov, *Cubature formulae for a sphere which are invariant with respect to the tetrahedral group*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **35**:3 (1995), 369–374. Zbl 0849.65013

[13] A.S. Popov, *Cubature formulae of high orders of accuracy for a sphere which are invariant with respect to the tetrahedral group*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **36**:4 (1996), 417–421. Zbl 1161.65322

[14] A.S. Popov, *Cubature formulas on a sphere that are invariant with respect to octahedron rotation groups*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **38**:1 (1998), 30–37. Zbl 0965.41016

[15] A.S. Popov, *The search for the sphere of the best cubature formulae invariant under octahedral group of rotations*, Siberian J. of Numer. Mathematics, **5**:4 (2002), 367–372 (in Russian).

[16] A.S. Popov, *The search for the best cubature formulae invariant under the octahedral group of rotations with inversion for a sphere*, Siberian J. of Numer. Mathematics, **8**:2 (2005), 143–148 (in Russian). Zbl 1112.65310

[17] A.S. Popov, *Cubature formulas on a sphere invariant under the icosahedral rotation group*, Numerical Analysis and Applications, **1**:4 (2008), 355–361.

[18] A.S. Popov, *Cubature formulas on a sphere invariant under the tetrahedral group with inversion*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **11** (2014), 372–379 (in Russian). Zbl 1327.65047

[19] A.S. Popov, *Cubature formulae of the fourth and seventh accuracy orders for a sphere invariant under the group of rotations of a square about the polar axis*, Numerical Methods and Techniques of Solving Problems in Mathematical Physics, Comp. Cent., Sib. Branch, Russian Acad. Sci., Novosibirsk, 1993, 47–53 (in Russian).

[20] A.S. Popov, *Cubature formulae for a sphere invariant under cyclic rotation groups*, Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, **9**:6 (1994), 535–546. Zbl 0818.41025

[21] A.S. Popov, *Cubature formulas on a sphere that are invariant with respect to a group of dihedron rotations with inversion D6h*, Numerical Analysis and Applications, **6**:1 (2013), 49–53. Zbl 1299.65037

[22] A.S. Popov, *Cubature formulas on a sphere invariant under the dihedral group of rotations with inversion D4h*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **12** (2015), 457–464 (in Russian).

[23] A.N. Kazakov, V.I. Lebedev, *Gauss type quadrature formulas for a sphere that are invariant with respect to the group of dihedron*, Trudy Math. Inst. RAN, Nauka, Moscow, **203** (1994), 100–112 (in Russian). Zbl 1126.41302

[24] F. Klein, *Lectures on the Icosahedron and the Solution of Equations of the Fifth Degree*, New York: Dover, 1956.

[25] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*, Nauka, Moscow, 1989 (in Russian). Zbl 0714.70004

[26] V.A. Ditkin, *On some approximate formulas for calculating triple integrals*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **62**:4 (1948), 445–447 (in Russian). Zbl 0032.36202

[27] V.A. Ditkin, L.A. Lyusternik, *On a method of practical harmonic analysis on a sphere*, Vychisl. Matematika i Vychisl. Tekhnika, Mashgiz, Moscow, **1** (1953), 3–13 (in Russian). Zbl 0052.35601

Anatolii Stepanovich Popov
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS,
pr. Akad. Lavrent'eva, 6,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: popov@labchem.sscc.ru