S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 26–37 (2016) УДК 539.3

DOI 10.17377/semi.2016.13.003 MSC 74J65

ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ УПРУГИХ БАЛОК БЕРНУЛЛИ-ЭЙЛЕРА И ТИМОШЕНКО

Н.В. НЕУСТРОЕВА, Н.П. ЛАЗАРЕВ

Abstract. In this paper, we consider a junction problem for the system Euler-Bernoulli and Timoshenko elastic beams and a contact problem for the two connecting beams. Unique solvability of these problems is proved. Under the assumption that solutions are smooth we find the corresponding differential formulations of the initial variational problems. In particular junction conditions on the border of bonding interface obtained. The analytical solution for a beams with a cut is given.

Keywords: junction conditions, variational problems, Timoshenko beam, Euler-Bernoulli beam, crack.

1. Введение

Современные конструкции и изделия, применяемые в различных областях техники, технологии и строительства состоят из сопряжения упругих тел, балок, пластин и оболочек. В настоящее время при создании конструкций и изделий различного назначения широкое применение находят композитные материалы. Различие коэффициентов и модулей упругости, при использовании неоднородных материалов, может привести к образованию трещин (отслоений) и разрывов на границе стыка разных материалов. Подобные проблемы приводят к необходимости исследования математических моделей, описывающих деформирование композитных конструкций. Научный интерес вызывает обоснование и исследование математических моделей, описывающих напряженно-деформированное состояние сопряженных конструкций, а также тел с неоднородностями в виде включений и трещин.

Neustroeva, N.V., Lasarev, N.P., Junction problem for Euler-Bernoulli and Timoshenko elastic beams.

Работа поддержана РНФ (грант 15-11-10000).

Поступила 5 октября 2015 г., опубликована 5 февраля 2016 г.

Исходным толчком для исследования задач сопряжения математических моделей теории упругости стала работа [1], где рассмотрены дифференциальные уравнения четвертого порядка, встречающиеся в теории изгиба тонких упругих пластин и стержней. В [1] на примере бигармонического уравнения сформулированы условия сопряжения для стержней и пластин, а также всевозможные граничные условия. Задачи сопряжения между трехмерной линейно упругой структурой и линейно упругой пластиной исследованы в работах [2]–[3], где решение трехмерной задачи сходится к решению двумерной задачи. Сопряжение системы двух балок (стержней) можно найти в [4]–[6]. Также отметим работы [7]–[8], где исследуются задачи сопряжения для упругих пластин и балок.

В данной работе рассматриваются механические системы, состоящие из двух упругих однородных балок. Балки сопряжены между собой. При этом одна из балок подчиняется гипотезе Бернулли-Эйлера, согласно которой деформации поперечного сдвига отсутствуют, другая – гипотезе Тимошенко, учитывающая данную деформацию. Исследуется также случай с разрезом на границе стыка двух балок (контактная задача). Доказана однозначная разрешимость задач, выведены полные системы краевых условий. Исследована эквивалентность двух постановок: вариационной и дифференциальной. Для балок с разрезом приведено аналитическое решение.

Задачу равновесия упругого тела с упругим объемным включением, а также контактную задачу упругих тел с нелинейными краевыми условиями можно отнести к задачам сопряжения. Например, рассматриваются ограниченные области, в каждой из которых будут выполняться уравнения равновесия. На границе раздела упругих тел ставятся условия сопряжения (условия идеального контакта) для компонент вектора перемещений [9]–[12]. В [12] исследована задача равновесия упругой пластины Тимошенко, содержащей трещину на границе упругого включения Кирхгофа-Лява. Отметим также работу [13], где исследуется задача оптимального управления формой тонких включений в упругих телах. В работе предполагается, что тонкое включение разбивается точкой излома на два взаимодействующих тонких жестких включения. В данном случае точку излома можно считать точкой сопряжения тонких жестких включений.

С широким классом задач математической теории трещин с краевыми условиями взаимного непроникания берегов и контактными задачами для упругих тел разных размерностей можно ознакомиться в [14]–[18], а также задачами с жестким, упругим включением при наличии трещины отслоения – [19]–[21]. В [15] для балки Эйлера - Бернулли с разрезом приведено аналитическое решение и исследованы его качественные свойства.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему двух балок, срединная линия одной из которых расположена на $\gamma^t = (-l, 0)$, а другой – $\gamma^b = (0, l)$ оси x_1, $\gamma = \gamma^t \cup \gamma^b$ (рис.). Балки имеют одинаковую толщину $2h$ ($h > 0$). Пусть изгиб левой балки γ^t описывается в рамках модели Тимошенко, изгиб правой балки γ^b – в рамках модели Бернулли-Эйлера.

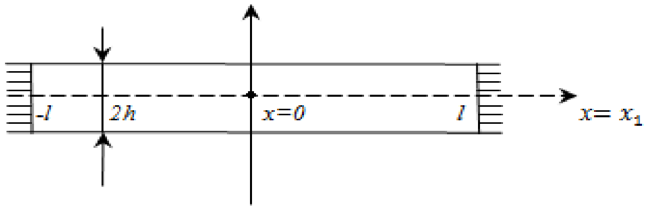

Рис. Схема сопряжения двух балок

Обозначим через $\theta = (u, w, \psi)$ обобщенный вектор перемещений балки γ^t, $\chi = (u, w)$ – обобщенный вектор перемещений балки γ^b. Функции u, w описывают горизонтальные и вертикальные перемещения точек срединной линии балок, ψ – угол поворота волокон, перпендикулярных срединной линии балки γ^t. Будем считать, что величина ψ является бесконечно малой. На внешних границах ставятся условия жесткого закрепления

$$u = w = \psi = 0 \text{ на } x = -l; \;\; u = w = w_x = 0 \text{ на } x = l. \tag{1}$$

Сначала приведем вариационную постановку задачи. Введем пространство

$$V(\gamma) = \{(\theta, \chi) \in H(\gamma^t) \times H(\gamma^b) \mid w_x(+0) + \psi(-0) = 0, \; w^-(-0) = w^+(+0),$$
$$u^-(-0) = u^+(+0)\}$$

с нормой

$$\|(\theta, \chi)\|^2_{V(\gamma)} = \|u\|^2_{H^1(\gamma^t)} + \|\psi\|^2_{H^1(\gamma^t)} + \|w\|^2_{H^1(\gamma^t)} + \|u\|^2_{H^1(\gamma^b)} + \|w\|^2_{H^2(\gamma^b)},$$

где

$$H(\gamma^t) = \{\theta = (u, w, \psi) \in H^1(\gamma^t)^3 \mid u = w = \psi = 0 \text{ при } x = -l\},$$
$$H(\gamma^b) = \{\chi = (u, w) \in H^1(\gamma^b) \times H^2(\gamma^b) \mid u = w = w_x = 0 \text{ при } x = l\}.$$

Рассмотрим функционал энергии на заданном пространстве $V(\gamma)$

$$\bar{\Pi}(\theta, \chi) = \frac{1}{2} \int\limits_{\gamma^t} \{\tilde{E}\tilde{A}_0 u_x^2 + \tilde{E}\tilde{J}\psi_x^2 + Gk\tilde{A}_0(w_x + \psi)^2\} +$$
$$\frac{1}{2} \int\limits_{\gamma^b} \{\hat{E}\hat{J}w_{xx}^2 + \hat{E}\hat{A}_0 u_x^2\} - \int\limits_{\gamma^t} g\theta - \int\limits_{\gamma^b} f\chi,$$

где $\tilde{A}_0$ и $\hat{A}_0$ – площади поперечного сечения, $\tilde{J}$ и $\hat{J}$ – моменты инерции сечения $\tilde{E}$, G и $\hat{E}$ – модули упругости, k – коэффициент сдвига [22]. Функции внешних нагрузок $g = (g_1, g_2, g_3) \in L^2(\gamma^t)^3$, $f = (f_1, f_2) \in L^2(\gamma^b)^2$ считаем заданными. В местах, где это не вызывает недоразумений, используем обозначения $L^2(\gamma^t)$, $L^2(\gamma^b)$ вместо $L^2(\gamma^t)^3$, $L^2(\gamma^b)^2$. Далее, для удобства, пусть физические параметры балок равны единице. Функционал энергии $\bar{\Pi}(\theta, \chi)$ на пространстве $V(\gamma)$ запишем в виде

$$\Pi(\theta, \chi) = \frac{1}{2} \int\limits_{\gamma^t} \{u_x^2 + \psi_x^2 + (w_x + \psi)^2\} + \frac{1}{2} \int\limits_{\gamma^b} \{w_{xx}^2 + u_x^2\} - \int\limits_{\gamma^t} g\theta - \int\limits_{\gamma^b} f\chi.$$

Решаем задачу минимизации

$$\inf_{(\theta, \chi) \in V(\gamma)} \Pi(\theta, \chi). \tag{2}$$

Теорема 1. *Вариационная задача (2) имеет единственное решение (θ, χ), принадлежащее пространству $V(\gamma)$.*

Доказательство. Пусть $(\theta, \chi) \in V(\gamma)$. Используя неравенства Фридрихса и Коши, заключаем, что функционал энергии $\Pi(\theta, \chi)$ коэрцитивен на $V(\gamma)$.

Действительно, для любого положительного ε имеем

$$\int_{\gamma^t} \{u_x^2 + \psi_x^2 + (w_x + \psi)^2\} \geq$$

$$C_1\|u\|^2_{H^1(\gamma^t)} + C_2\|\psi\|^2_{H^1(\gamma^t)} + (1-\varepsilon)\|\psi\|^2_{L^2(\gamma^t)} + (1 - \frac{1}{\varepsilon})\|w_x\|^2_{L^2(\gamma^t)}. \tag{3}$$

Возьмем в неравенстве (3) следующее значение $\varepsilon = 1 + \frac{C_2}{2}$, применяя неравенство Фридрихса для четвертого слагаемого в правой части, получим

$$\int_{\gamma^t} \{u_x^2 + \psi_x^2 + (w_x + \psi)^2\} \geq$$

$$C_1\|u\|^2_{H^1(\gamma^t)} + \frac{C_2}{2}\|\psi\|^2_{H^1(\gamma^t)} + \frac{C_3 C_2}{2 + C_2}\|w\|^2_{H^1(\gamma^t)}. \tag{4}$$

Также запишем оценку

$$\int_{\gamma^b} (w_{xx}^2 + u_x^2) \geq C_4\|w\|^2_{H^2(\gamma^b)} + C_5\|u\|^2_{H^1(\gamma^b)}. \tag{5}$$

Полученные неравенства (4)–(5), вместе со следующей оценкой

$$|\int_{\gamma^t} g\theta| + |\int_{\gamma^b} f\chi| \leq \|g\|_{L^2(\gamma^t)}\|\theta\|_{H(\gamma^t)} + \|f\|_{L^2(\gamma^b)}\|\chi\|_{H(\gamma^b)}.$$

позволяют утверждать, что

$$\Pi(\theta, \chi) \to +\infty \ \text{ при } \ \|(\theta, \chi)\|_{V(\gamma)} \to \infty.$$

Функционал является также слабополунепрерывным снизу в силу выпуклости и непрерывности. Функционал дифференцируем, то есть для него определена производная $\Pi'_{(\theta,\chi)}(\bar{\theta}, \bar{\chi})$ для всех $(\theta, \chi) \in V(\gamma)$, где $\bar{\theta} = (\bar{u}, \bar{w}, \bar{\psi})$, $\bar{\chi} = (\bar{u}, \bar{w})$. Следовательно, по теореме Вейерштрасса, задача минимизации (1) имеет решение $(\theta, \chi) \in V(\gamma)$ удовлетворяющее уравнению Эйлера

$$\Pi'_{(\theta,\chi)}(\bar{\theta}, \bar{\chi}) = 0 \ \ \forall(\bar{\theta}, \bar{\chi}) \in V(\gamma),$$

которое для всех $(\theta, \chi) \in V(\gamma)$ имеет вид

$$\int_{\gamma^t} \{u_x\bar{u}_x + \psi_x\bar{\psi}_x + (w_x + \psi)(\bar{w}_x + \bar{\psi})\} +$$

$$\int_{\gamma^b} w_{xx}\bar{w}_{xx} + u_x\bar{u}_x\} - \int_{\gamma^t} g\bar{\theta} - \int_{\gamma^b} f\bar{\chi} = 0 \ \ \forall(\bar{\theta}, \bar{\chi}) \in V(\gamma). \tag{6}$$

При этом решение (θ, χ) будет единственным. $\square$

Из соотношения (6) следует, что (θ, χ) удовлетворяет в смысле распределения следующим уравнениям равновесия

$$u_{xx} = g_1, \ \ -w_{xx} - \psi_x = g_3 \ \text{ на } \ \gamma^t,$$
$$(w_x + \psi) - \psi_{xx} = g_2 \ \text{ на } \ \gamma^t,$$
$$w_{xxxx} = f_1, \ \ -u_{xx} = f_2 \ \text{ на } \ \gamma^b.$$

Выясним, каким условиям сопряжения должны удовлетворять функции θ и χ в точке $x_1 = 0$. Пусть решение $(\theta, \chi) \in V(\gamma)$ достаточно гладкое. Интегрируя по частям уравнение (6), получим

$$\int\limits_{\gamma^t} \{w_x\bar{\psi} + \psi\bar{\psi} - u_{xx}\bar{u} - \psi_{xx}\bar{\psi} - w_{xx}\bar{w} - \psi_{xx}\bar{w}\} + \int\limits_{\gamma^b} \{w_{xxxx}\bar{w} - u_{xx}\bar{u}\} +$$

$$(u_x\bar{u} + \psi_x\bar{\psi} + w_x\bar{w} + \psi\bar{w})|_{-l}^{0} + (w_{xx}\bar{w}_x - w_{xxx}\bar{w} + u_x\bar{u})|_0^l - \int\limits_{\gamma^t} g\bar{\theta} - \int\limits_{\gamma^b} f\bar{\chi} = 0.$$

Воспользовавшись полученными уравнениями равновесия балок на γ^t и γ^b, имеем

$$(u_x\bar{u} + \psi_x\bar{\psi} + w_x\bar{w} + \psi\bar{w})|_{x_1=-0} -$$
$$(w_{xx}\bar{w}_x - w_{xxx}\bar{w} + u_x\bar{u})|_{x_1=+0} = 0. \tag{7}$$

Условия сопряжения при $x_1 = 0$ зависят от способа соединения взаимодействующих балок в этой точке. В нашем случае, балки соединены так, что их вертикальные и горизонтальные перемещения в точке $x_1 = 0$ одинаковы, то есть $w^-(-0) = w^+(+0)$, $u^-(-0) = u^+(+0)$ и $w_x(+0) + \psi(-0) = 0$.

Возьмем пробную функцию $(\bar{\theta}, \bar{\chi}) \in V(\gamma)$: $\bar{w}^-(-0) = \bar{w}^+(+0)$, $\bar{u}^-(-0) = \bar{u}^+(+0)$ и $\bar{w}_x(+0) = -\bar{\psi}(-0)$. Уравнение (7) примет вид

$$(u_x|_{x_1=-0} - u_x|_{x_1=+0})\bar{u}(0) + ((w_x + \psi)|_{x_1=-0} + w_{xxx}|_{x_1=+0})\bar{w}(0) +$$
$$(\psi_x|_{x_1=-0} + w_{xx}|_{x_1=+0})\bar{\psi}(0) = 0. \tag{8}$$

Используя произвольность функций $\bar{u}(0), \bar{w}(0), \bar{\psi}(0)$ и приравнивая последовательно нулю $\bar{w}(0)$ и $\bar{\psi}(0)$, $\bar{u}(0)$ и $\bar{w}(0)$, $\bar{u}(0)$ и $\bar{w}(0)$ в (8), получим следующие условия сопряжения

$$\begin{gathered} u_x|_{x_1=-0} - u_x|_{x_1=+0} = 0, \\ \psi_x|_{x_1=-0} + w_{xx}|_{x_1=+0} = 0, \\ (w_x + \psi)|_{x_1=-0} = -w_{xxx}|_{x_1=+0}. \end{gathered} \tag{9}$$

Первое условие (9) в точке соединения двух балок (при $x_1 = 0$) запишем в виде $[u_x] = 0$, где $[v]$ – скачок функции v в точке $x_1 = \pm 0$, то есть $[v] = v^+(x_1{+}0) - v^-(x_1{-}0)$. Таким образом, получили следующую постановку задачи. Требуется найти функции $(\theta, \chi) \in V(\gamma)$:

$$-u_{xx} = g_1, \ \ -w_{xx} - \psi_x = g_3 \text{ на } \ \gamma^t, \tag{10}$$

$$(w_x + \psi) - \psi_{xx} = g_2 \ \text{ на } \ \gamma^t, \tag{11}$$

$$w_{xxxx} = f_1, \ \ -u_{xx} = f_2 \ \text{ на } \ \gamma^b, \tag{12}$$

с граничными условиями:

$$u = w = \psi = 0 \ \text{ на } \ x = -l, \ \ u = w = w_x = 0 \ \text{ на } \ x = l, \tag{13}$$

и условиями сопряжения:

$$[u] = [u_x] = [w] = 0,$$

$$\begin{gathered}\psi(-0)+w_x(+0)=0,\\ \psi_x(-0)+w_{xx}(+0)=0,\\ (w_x+\psi)(-0)+w_{xxx}(+0)=0,\end{gathered}\tag{14}$$

где w_x – угол поворота, w_{xx} – изгибающий момент, w_{xxx} – перерезывающая сила. Соотношения (10)–(11) соответствуют уравнениям Тимошенко для упругой балки γ^t, соотношения (12) – уравнениям Эйлера-Бернулли для упругой балки γ^b. Соотношения (14) есть условия сопряжения в точке $x_1 = 0$.

Теперь докажем обратное. Пусть выполнены уравнения (10)–(12) с условиями (13)–(14). Мы должны получить уравнение (6). Возьмем функцию $(\bar{\theta}, \bar{\chi}) \in V(\gamma)$. Умножим сначала (10)–(11) поочередно на функции $\bar{u}, \bar{w}, \bar{\psi}$ соответственно, а затем проинтегрируем по γ^t, далее умножим (12) также на $\bar{w}$ и $\bar{u}$, проинтегрируем по γ^b. Суммируя полученные соотношения, имеем

$$\int\limits_{\gamma^t}\{u_x\bar{u}_x+\psi_x\bar{\psi}_x+(w_x+\psi)(\bar{w}_x+\bar{\psi})\}+\int\limits_{\gamma^b}[w_{xx}\bar{w}_{xx}+u_x\bar{u}_x]-\int\limits_{\gamma^t}g\bar{\theta}-\int\limits_{\gamma^b}f\bar{\chi}=$$

$$(-u_x\bar{u}-\psi_x\bar{\psi}-(w_x+\psi)\bar{w})|_{-l}^{0}+(w_{xx}\bar{w}_x-w_{xxx}\bar{w}+u_x\bar{u})|_0^l.\tag{15}$$

Для доказательства легко показать, что правая часть соотношения (15) равна нулю в силу условий (10)–(12). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Вариационная формулировка задачи (6), при условии достаточной гладкости решения $(\theta, \chi) \in V(\gamma)$, эквивалентна дифференциальной постановке (13)–(14).*

3. Постановка задачи с разрезом

Рассмотрим систему двух балок, срединная линия одной из которых расположена на отрезке γ^t, а другой γ^b оси x_1. Так же, как и в предыдущем п.1, изгиб левой балки γ^t описывается в рамках модели Тимошенко, изгиб правой балки γ^b – в рамках модели Бернулли–Эйлера. Предположим, что в точке $x_1 = 0$ имеется вертикальный разрез, на внешней границе ставятся условия жесткого закрепления (1).

В соответствии с гипотезами Кирхгофа-Лява и Тимошенко, поля перемещения балок γ^b и γ^t вдоль толщины z задаются формулами

$$u(x,z)^+=u(x)^+-zw_x^+,\quad w(x,z)^+=w(x)^+,$$
$$u(x,z)^-=u(x)^-+z\psi^-,\quad w(x,z)^-=w(x)^-.$$

Условие непроникания берегов разреза запишем в виде

$$u(x+0,z)-u(x-0,z)\geq 0\ \ \forall z,\ \ |z|\leq h.$$

Таким образом, получим

$$[u]\geq h|(w_x(+0)+\psi(-0))|.$$

Гипотеза прямых нормалей Кирхгофа-Лява эквивалентна допущению, что жесткость на сдвиг в нормальных к срединной поверхности плоскости равен бесконечности. Считая параметр жесткости поперечного сдвига равным бесконечности на γ^b, задаем отсутствие сдвигов в нормальных к срединной линии балки. Это означает выполнение гипотезы прямых нормалей Кирхгофа-Лява [23]. Следовательно, на γ^b выполнено равенство

$$w_x(+0)+\psi(+0)=0.$$

Для простоты рассмотрим случай $h=1$, то есть условие непроникания берегов разреза в точке $x_1=0$ будет иметь вид

$$[u] \geq |[\psi]|.$$

Введем множество K допустимых перемещений:

$$K = \{(\theta,\chi) \in H(\gamma^t) \times H(\gamma^b) \mid [u] \geq |[\psi]| \text{ в точке } x_1=0,\ w_x(+0)+\psi(+0)=0\}.$$

Множество K замкнутое выпуклое, следовательно слабо замкнуто в пространстве $H(\gamma^t) \times H(\gamma^b)$.

Решаем задачу минимизации

$$\inf_{(\theta,\chi)\in K} \Pi(\theta,\chi) \tag{16}$$

функционала энергии $\Pi(\theta,\chi)$, определенного в п.1, которая эквивалентна вариационному неравенству $(\theta,\chi)\in K$,

$$\int\limits_{\gamma^t} \{u_x(\bar u_x - u_x) + \psi_x(\bar\psi_x - \psi_x) + (w_x+\psi)(\bar w_x + \bar\psi - w_x - \psi)\} +$$

$$\int\limits_{\gamma^b} \{w_{xx}(\bar w_{xx} - w_{xx}) + u_x(\bar u_x - u_x)\} - \int\limits_{\gamma^t} g(\bar\theta - \theta) - \int\limits_{\gamma^b} f(\bar\chi - \chi) \geq 0 \ \ \forall (\bar\theta,\bar\chi)\in K. \tag{17}$$

Функционал $\Pi(\theta,\chi)$ коэрцитивен и слабополунепрерывен снизу, поэтому задача (16) имеет решение. Решение вариационного неравенства (17), соответственно (16) будет единственным.

Далее, докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Вариационное неравенство (17) при условии, что решение достаточно гладкое эквивалентно краевой задаче*

$$-u_{xx} = g_1, \ \ -w_{xx} - \psi_x = g_3 \ \textit{на} \ \gamma^t, \tag{18}$$

$$(w_x+\psi) - \psi_{xx} = g_2 \ \ \textit{на} \ \gamma^t, \tag{19}$$

$$w_{xxxx} = f_1, \ \ -u_{xx} = f_2 \ \ \textit{на} \ \gamma^b, \tag{20}$$

$$u = w = \psi = 0 \ \ \textit{на} \ x=-l, \ \ u = w = w_x = 0 \ \ \textit{на} \ x = l, \tag{21}$$

$$[u] \geq |[\psi]| \ \ \textit{в} \ x_1 = 0, \ \ w_x(+0) + \psi(+0) = 0 \ \ \textit{на} \ \gamma^b \tag{22}$$

$$[u_x] = 0, \ \ \psi_x(-0) + w_{xx}(+0) = 0, \tag{23}$$

$$(w_x+\psi)(-0) = 0, \tag{24}$$

$$w_{xxx}(+0) = 0, \ \ -u_x(+0) \geq |\psi_x(-0)|, \tag{25}$$

$$u_x(+0)[u] + \psi_x(-0)[\psi] = 0. \tag{26}$$

Доказательство. Уравнения равновесия (18)–(20) получим из (17), выполняются в смысле распределения. Справедливость краевых условий (21)–(22) вытекает из определения множества K.

Проинтегрируя по частям вариационное неравенство (17), учитывая уравнения (18)–(20), получим

$$(u_x(\bar u - u) + \psi_x(\bar\psi - \psi) + w_x(\bar w - w) + \psi(\bar w - w))|_{x_1=-0} -$$

$$(w_{xx}(\bar w_x - w_x) - w_{xxx}(\bar w - w) + u_x(\bar u - u))|_{x_1=+0} \geq 0. \tag{27}$$

Подставляя в неравенство (27) пробные функции вида $(\bar{\theta}, \bar{\chi}) = (\theta, \chi) + (\tilde{\theta}, \tilde{\chi})$, где $\tilde{\theta} = (\xi, \eta, \phi)$, $\tilde{\chi} = (\xi, \eta)$, $(\tilde{\theta}, \tilde{\chi}) \in H(\gamma^t) \cup H(\gamma^b)$, имеем

$$(u_x\xi + \psi_x\phi + w_x\eta + \psi\eta)|_{x_1=-0} - (w_{xx}\eta_x - w_{xxx}\eta + u_x\xi)|_{x_1=+0} \geq 0. \qquad (28)$$

Установим справедливость (23)–(24). Возьмем в (28) $[\xi] = 0$, $[\eta] = 0$ и $[\phi] = 0$, где $\eta_x(+0) = -\phi(+0)$. Выбирая поочередно нулевые значения для произвольных ξ, ϕ, η запишем условия

$$[u_x] = 0,\ \psi_x(-0) + w_{xx}(+0) = 0,$$

$$(w_x + \psi)(-0) + w_{xxx}(+0) = 0.$$

Далее, установим справедливость условий (25)–(26). Определим вспомогательные функции

$$\varphi^+(\xi, \eta, \phi) = [\xi] + (\eta_x(+0) + \phi(-0)) \geq 0, \qquad (29)$$

$$\varphi^-(\xi, \eta, \phi) = [\xi] - (\eta_x(+0) + \phi(-0)) \geq 0. \qquad (30)$$

Очевидно, что построенные функции линейны по своим аргументам. Учитывая функции (29)–(30), соотношения (22)–(24) и $\eta_x(+0) = -\phi(+0)$, неравенство (28) представим в виде

$$\begin{gathered}((w_x + \psi)\eta(-0) + w_{xxx}\eta(+0)) - u_x(+0)[\xi] + (\psi_x\phi(-0) - w_{xx}\eta_x(+0)) = \\ w_{xxx}(+0)[\eta] - u_x(+0)[\xi] - \psi_x(-0)[\phi] = \\ w_{xxx}(+0)[\eta] + \varphi^+(\xi, \eta, \phi)(-\frac{1}{2}u_x(+0) - \frac{1}{2}\psi_x(-0)) + \\ \varphi^-(\xi, \eta, \phi)(-\frac{1}{2}u_x(+0) - \frac{1}{2}w_{xx}(+0)) \geq 0. \qquad (31)\end{gathered}$$

Выберем в (31) ξ, η, и ϕ так, чтобы $\varphi^+(\xi, \eta, \phi) = 0$, $\varphi^-(\xi, \eta, \phi) = 0$ при произвольном $[\eta] = C$, получим

$$w_{xxx}(+0) = 0.$$

Далее, выберем ξ, η и ϕ так, чтобы $\varphi^-(\xi, \eta, \phi) = 0$. Тогда для произвольного $\varphi^+(\xi, \eta, \phi) = C \geq 0$, имеем

$$C(-\frac{1}{2}u_x(+0) - \frac{1}{2}\psi_x(-0)) \geq 0,$$

откуда

$$-u_x(+0) - \psi_x(-0) \geq 0. \qquad (32)$$

Затем выберем ξ, η, ϕ так, чтобы $\varphi^+(\xi, \eta, \phi) = 0$. Тогда для произвольного $\varphi^-(\xi, \eta, \phi) = C \geq 0$, получим

$$C(-\frac{1}{2}u_x(+0) - \frac{1}{2}w_{xx}(+0)) \geq 0,$$

откуда

$$-u_x(+0) - w_{xx}(+0) \geq 0. \qquad (33)$$

Из условий (32)–(33) следует второе условие (25).

Подставим в (27) в качестве пробных функций $(\bar{\theta}, \bar{\chi}) = (0, 0)$, $(\bar{\theta}, \bar{\chi}) = (2\theta, 2\chi)$. В силу первого условия (25), получим

$$\varphi^+(u, w, \psi)(-\frac{1}{2}u_x(+0) - \frac{1}{2}\psi_x(-0)) + \varphi^-(u, w, \psi)(-\frac{1}{2}u_x(+0) - \frac{1}{2}w_{xx}(+0)) \geq 0,$$

$$\varphi^+(u, w, \psi)(-\frac{1}{2}u_x(+0) - \frac{1}{2}\psi_x(-0)) + \varphi^-(u, w, \psi)(-\frac{1}{2}u_x(+0) - \frac{1}{2}w_{xx}(+0)) \leq 0.$$

Из знакоопределенности неравенств следует соотношение

$$\varphi^+(u,w,\psi)(-\frac{1}{2}u_x(+0)-\frac{1}{h}\psi_x(-0))+\varphi^-(u,w,\psi)(-\frac{1}{2}u_x(+0)-\frac{1}{2}w_{xx}(+0))=0.$$

Отсюда следует,

$$u_x(+0)[u]+\psi_x(-0)[\psi]=0.$$

Докажем обратное. Пусть выполнены уравнения (18)–(20) с условиями (21)–(26). Возьмем функцию $(\bar\theta,\bar\chi)\in K$. Умножим (18)–(19) поочередно на функции $(\bar u-u)$, $(\bar w-w)$, $(\bar\psi-\psi)$ соответственно, а затем проинтегрируем по γ^t, далее умножим (20) на $(\bar w-w)$ и $(\bar u-u)$, проинтегрируем по γ^b. Суммируя полученные соотношения, имеем

$$\int\limits_{\gamma^t}[u_x(\bar u_x-u_x)+\psi_x(\bar\psi_x-\psi_x)+(w_x+\psi)(\bar w_x+\bar\psi-w_x-\psi)]+$$

$$+\int\limits_{\gamma^b}[w_{xx}(\bar w_{xx}-w_{xx})+u_x(\bar u_x-u_x)]-\int\limits_{\gamma^t}g_i(\bar\theta-\theta)-\int\limits_{\gamma^b}f_j(\bar\chi-\chi)=$$

$$(u_x(\bar u-u)+\psi_x(\bar\psi-\psi)+(w_x+\psi)(\bar w-w))|_{-l}^0-$$
$$(w_{xx}(\bar w_x-w_x)-w_{xxx}(\bar w-w)+u_x(\bar u-u))|_0^l. \qquad (34)$$

Обозначим правую часть (34) через Φ и запишем его в виде $\Phi=\Phi_1+\Phi_2$, где

$$\Phi_1=(u_x\bar u+\psi_x\bar\psi+w_x\bar w+\psi\bar w)|_{-l}^0-(w_{xx}\bar w_x-w_{xxx}\bar w+u_x\bar u)|_0^l,$$

$$\Phi_2=(-u_xu-\psi_x\psi-w_xw-\psi w)|_{-l}^0+(w_{xx}w_x-w_{xxx}w+u_xu)|_0^l.$$

Докажем, что $\Phi\geq0$. В силу условий типа равенств (22)–(24) Φ_1 представим в виде

$$\Phi_1=w_{xxx}[\bar w]-(\frac{1}{2}u_x(+0)+\frac{1}{2}\psi_x(-0))([\bar u]+[\bar\psi])-(\frac{1}{2}u_x(+0)+\frac{1}{2}w_{xx}(+0))([\bar u]-[\bar\psi]).$$

В силу первого условия (25) первое слагаемое в Φ_1 обращается в нуль; оставшаяся часть в сумме положительна согласно второго условия (26) и неравенства $[\bar u]\geq|[\bar\psi]|$. Далее, запишем Φ_2 в виде

$$\Phi_2=-w_{xxx}[w]+(\frac{1}{2}u_x(+0)+\psi_x(-0))([u]+[\psi])+(\frac{1}{2}u_x(+0)+\frac{1}{2}w_{xx}(-0))([u]-[\psi]).$$

В силу первого условия (25) первая слагаемое в Φ_2 также обращается в нуль; оставшиеся слагаемые в сумме дают нуль согласно условия (26). Таким образом, $\Phi=\Phi_1+\Phi_2\geq0$. □

4. Аналитическое решение задачи с разрезом

Построим решение задачи (18)–(26). Решение будем искать в виде суммы $(\theta,\chi)=(\theta^0,\chi^0)+(\theta^1,\chi^1)$, где (θ^0,χ^0) – решение неоднородной задачи с нулевыми краевыми условиями, (θ^1,χ^1) – решение однородной задачи с ненулевыми краевыми условиями на разрезе $x_1=0$.

Рассмотрим неоднородную задачу

$$-u^0_{xx}=g_1,\ \ -w^0_{xx}-\psi^0_x=g_3 \text{ на } \gamma^t,$$
$$(w^0_x+\psi^0)-\psi^0_{xx}=g_2 \text{ на } \gamma^t,$$
$$w^0_{xxxx}=f_1,\ \ -u^0_{xx}=f_2 \text{ на } \gamma^b,$$
$$u^0=w^0=\psi^0=0 \text{ на } x=-l,\ \ u^0=w^0=w^0_x=0 \text{ на } x=l, \qquad (35)$$

$$[u_x^0] = 0, \quad \psi(-0)^0 + w_x^0(+0) = 0,$$
$$\psi_x^0(-0) + w_{xx}^0(+0) = 0,$$
$$(w_x^0 + \psi^0)(-0) = 0, \quad w_{xxx}^0(+0) = 0.$$

Решение $(\theta^0, \chi^0) \in (H^2(\gamma^t)^3 \times H^2(\gamma^b) \times H^4(\gamma^b)) \cap (H(\gamma^t) \times H(\gamma^b)))$ задачи (35) существует и единственно, поскольку задача распадается на две независимые задачи на $(-l, 0)$ и $(0, l)$:

$$-u_{xx}^0 = g_1, \quad -w_{xx}^0 - \psi_x^0 = g_3 \text{ на } \gamma^t,$$
$$(w_x^0 + \psi^0) - \psi_{xx}^0 = g_2 \text{ на } \gamma^t,$$
$$u^0 = w^0 = \psi^0 = 0 \text{ в точке } x = -l,$$
$$u_x^0 = \psi^0 = w_x^0 + \psi^0 = 0 \text{ в точке } x = 0,$$

и

$$w_{xxxx}^0 = f_1, \quad -u_{xx}^0 = f_2 \text{ на } \gamma^b,$$
$$u^0 = w^0 = w_x^0 = 0 \text{ в точке } x = l,$$
$$u_x^0 = w_{xx}^0 = w_{xxx}^0 = 0 \text{ в точке } x = 0.$$

Заметим, что (θ^0, χ^0) есть решение задачи (35), на котором не ставятся условия непроникания, а края предполагаются свободными.

Решив задачу (35), можно вычислить величины $\tau^{\pm} = [u^0] \pm [\psi^0]$. Введем вспомогательную функцию

$$\zeta(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (-1, 0), \\ (x-1)^2, & x \in (0, 1), \end{cases}$$

Свойства данной функции

$$\zeta_x(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (-1, 0), \\ 2(x-1), & x \in (0, 1), \end{cases}$$

$$\zeta_{xx}(x) \equiv 2, \ \zeta_{xxx}(x) \equiv 0, \ [\zeta] = 0, \ [\zeta_x] = -2.$$

Функции $\zeta(x)$, $\zeta_x(x)$ принадлежат пространству $C^\infty(\gamma)$ и при $x = 0$, $x = 1$ равны нулю.

Возьмем функции $u = u^0 + \frac{A}{2}\zeta_x(x)$, $w = w^0 - \frac{B}{2}\zeta(x)$, $\psi = \psi^0 + \frac{B}{2}\zeta_x(x)$ на $(-l, 0)$, а также $u = u^0 + \frac{A}{2}\zeta_x(x)$, $w = w^0 - \frac{B}{2}\zeta(x)$ на $(0, l)$. Проверим справедливость выполнения условий (18)–(26). В силу отмеченных свойств функции ζ имеем

$$-u_{xx} = -u_{xx}^0 - \frac{A}{2}\zeta_{xxx} = g_1,$$
$$-w_{xx} - \psi_x = -w_{xx}^0 + \frac{B}{2}\zeta_{xx} - \psi_x^0 - \frac{B}{2}\zeta_{xx} = g_3,$$
$$(w_x + \psi) - \psi_{xx} = w_x^0 - \frac{B}{2}\zeta_x + \psi^0 + \frac{B}{2}\zeta_x - \psi_{xx}^0 + \frac{B}{2}\zeta_{xxx} = g_2,$$
$$w_{xxx} = w_{xxx}^0 - \frac{B}{2}\zeta_{xxx} = f_1,$$
$$-u_{xx} = -u_{xx}^0 - \frac{A}{2}\zeta_{xxx} = f_2,$$

Проверим условия

$$[u_x] = [u_x^0] + \frac{A}{2}[\zeta_{xx}] = 0,$$
$$\psi(-0) + w_x(+0) = \psi^0 + \frac{B}{2}\zeta_x + w_x^0 - \frac{B}{2}\zeta_x = \psi^0 + w_x^0 + \frac{B}{2}[\zeta_x] = 0. \qquad (36)$$

Из вышеуказанного условия (36) следует, что коэффициент $B = 0$. Далее, проверим условия

$$\psi_x(-0) + w_{xx}(+0) = \psi_x^0 + w_{xx}^0 + \frac{B}{2}[\zeta_{xx}] = \psi_x^0 + w_{xx}^0 = 0,$$

$$(w_x + \psi)(-0) = w_x^0 - \frac{B}{2}\zeta_x + \psi^0 + \frac{B}{2}\zeta_x = 0,$$

$$w_{xxx}(+0) = w_{xxx}^0 - \frac{B}{2}\zeta_{xxx} = 0.$$

Вычислим

$$u_x(+0) = u_x^0 + \frac{A}{2}\zeta_{xx} = A, \;\; \psi_x(-0) = \psi_x^0 + \frac{B}{2}\zeta_{xx} = B,$$

Тогда

$$u_x(+0) \pm \psi_x(-0) = A \pm B = A \pm 0 = A.$$

Далее, $[u] \pm [\psi] = [u^0] - A \pm [\psi^0] = \tau^{\pm} - A \geq 0$. Осталось проверить, что

$$A(\tau^+ - A) = 0, \;\; A(\tau^- - A) = 0,$$

$$\tau^{\pm} \geq A.$$

Возможны следующие варианты

$$A = 0, \;\; \tau^+ - A \geq 0, \;\; \tau^- - A \geq 0,$$

$$A < 0, \;\; \tau^+ - A = 0, \;\; \tau^- - A = 0.$$

Таким образом, доказали следующую теорему

Теорема 4. *Функции $u = u^0 + \frac{A}{2}\zeta_x(x)$, $w = w^0$, $\psi = \psi^0$ на γ^t и $u = u^0 + \frac{A}{2}\zeta_x(x)$, $w = w^0$ на γ^b являются решением вариационного неравенства (17), где $A = 0$ если $\tau^{\pm} \geq 0$ и $A = \tau^{\pm}$ если $\tau^{\pm} < 0$.*

References

[1] A.A. Samarskii, V.B. Andreev, *Difference methods for elliptic equations*, Nauka, Moscow (1976). Zbl 1310.35004

[2] P.G. Ciarlet, H.Le Dret, R. Nzengwa, *Junctions between three dimensional and two dimensional linearly elastic structures*, J. Math. Pures Appl, **68**:3 (1989), 261–295. Zbl 0661.73013

[3] H.Le Dret, *Modeling of a folded plate*, Computational mechanics, **5**:6 (1990), 401–416. Zbl 0741.73026

[4] A. Gaudiello, E. Zappale, *A model of joined beams as limit of a 2D plate*, J. Elasticity, **103**:2 (2011), 205–233. Zbl 1273.74183

[5] Yu.A. Bogan, *Junction conditions A. Samarsky and V. Andreev in the theory of elastic beams*, Mathematical notes, **39**:5 (2012), 662–669. Zbl 06153791

[6] H. Le Dret, *Modeling of the junction between two rods*, J. Math. Pures Appl, **68**:3 (1989), 365–397. Zbl 0743.73020

[7] A. Gaudiello, R. Monneau, J. Mossino et. al. *Junctions of elastic plates and beams*, J. Control, Optimisation and Calculus of Variations, **13**:3 (2007), 419–457. Zbl 1133.35322

[8] T. Durante, G. Cardone, S.A. Nasarov, *Modeling junction of plates and beams by means of self-adjoint extensions*, J. Control, Vestnik St. Peterburg University. Mathematics, **42**:2 (2009), 67–75. Zbl 1243.74117

[9] A.M. Khludnev, K. Hoffmann, N.D. Botkin, *The variational contact problem for elastic objects of different dimensions*, Sibirsk. Mat. Zh., **47**:3 (2006), 707—717. Zbl 1115.74038

[10] A.M. Khludnev, G. Leugering, *Unilateral contact problems for two perpendicular elastic structures*, Journal for Analysis and its Applications, **27**:2 (2008), 157–177 Zbl 1147.35047

[11] N.V. Neustroeva *Contact problem for elastic bodies of different dimensions*, Vestnik of Novosibirsk State University (math., mech., informatics, **8**:4 (2008), 60–75. Zbl 1249.74079

[12] N.P. Lasarev, *Problem of equilibrium of the Timoshenko plate containing a crack on the boundary of an elastic inclusion with an infinite shear rigidity*, Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, **54**:2 (2013), 322–330.

[13] V.V. Shcherbakov, *On an optimal control problem for the shape of thin inclusions in elastic bodies*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **16**:1 (2013), 138—147. Zbl 06472796

[14] V.A. Kovtunenko, *Solution of the problem of a beam with a cut*, Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, **37**:4 (1996), 595—600. Zbl 1064.74614

[15] V.A. Kovtunenko, A.N. Leontyev, A.M. Khludnev, *On equilibrium problem for a plate with an inclined cut*, Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, **39**:2 (1998), 164—174. Zbl 0920.73108

[16] N.P. Lazarev, *Equilibrium problem for a Timoshenko plate with an oblique crack*, Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, **54**:4 (2013), 662—671. Zbl 1298.74148

[17] A.M. Khludnev, V.A. Kovtunenko, *Analysis of cracks in solids*, Southampton-Boston, WIT Press, (2000).

[18] A.M. Khludnev, *Elasticity problems in nonsmooth domains*, Fizmatlit, Moscow, (2010).

[19] A.M. Khludnev, *On Timoshenko thin elastic inclusion inside elastic bodies*, Mathematics and Mechanics of Solids, **20**:5 (2015), 495–511. Zbl 1327.74100

[20] A.M. Khludnev, G.R. Leugering, *Delaminated thin elastic inclusion inside elastic bodies*, Mathematics and mechanics of complex systems, **2**:1 (2014), 1–21. Zbl 06433023

[21] H. Itou, G. Leugering, A.M. Khludnev, *Timoshenko thin inclusion in an elastic body with possible delamination*, Doklady Physics, **59**:9 (2014), 401–404.

[22] K. Vasidzu, *Variational Methods in the Theory of Elasticity and Plasticity*, Mir, Moscow (1987).

[23] B.L. Pelekh, *Theory of Shells with Finite Shear Stiffness*, Nauk. Dumka, Kiev (1973). Zbl 0273.73055

Natalia Valerianovna Neustroeva
North-Eastern Federal University[1], Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Russian Academy of Sciences[2],
[1]Kulakovskogo, 48,
677000, Yakutsk, Russia
[2] 15 Lavrentyev pr.,
630090, Novosibirsk, Russia,
E-mail address: nnataliav@mail.ru

Lazarev Nyurgun Petrovich
North-Eastern Federal University,
Kulakovskogo, 48,
677000, Yakutsk, Russia
E-mail address: nyurgun@ngs.ru