S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 260–268 (2016) УДК 517.521.1
DOI 10.17377/semi.2016.13.019 MSC 33A45,26D15

МОНОТОННОСТЬ ОТНОШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

С.М. СИТНИК, Х. МЕХРЕЗ

Abstract. In the preprint [1] one of the authors formulated some conjectures on monotonicity of ratios for exponential series sections. They lead to more general conjecture on monotonicity of ratios of Kummer hypergeometric functions and were not proved from 1993. In this paper we prove some conjectures from [1] for Kummer hypergeometric functions and its further generalizations for Gauss and generalized hypergeometric functions. The results are also closely connected with Turán–type inequalities for special functions.

Keywords: hypergeometric functions, exponential, series sections, Turán–type inequalities.

1. Введение и формулировки основных задач

В работе доказаны результаты о монотонности отношений некоторых функций гипергеометрического типа, в том числе функций Куммера, Гаусса и обобщённых гипергеометрических функций. В частности, из полученных результатов как следствия получаются доказательства сформулированных в [1] гипотез о монотонности отношений остатков ряда Тэйлора для экспоненциальной функции.

Будем рассматривать ряд Тэйлора для экспоненциальной функции

$$\exp(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

Sitnik, S.M., Mehrez, Kh., On monotonicity of ratios of some hypergeometric functions.

© 2016 Ситник С.М., Мехрез Х.

Поступила 16 ноября 2015 г., опубликована 8 апреля 2016 г.

его частичную сумму $S_n(x)$ и остаток $R_n(x)$ в виде

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!},\ R_n(x) = \exp(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Несмотря на простоту этой функции, оценки остатка ряда Тэйлора для экспоненты изучались в работах многих известных математиков: Г. Сегё, С. Рамануджана, Х. Алзера, У. Гаучи и других, см. подробные исторические указания в [1]–[2]. Так, Г. Сегё доказал замечательное предельное распределение комплексных нулей остатков рядов Тэйлора экспоненциальной функции, которые накапливаются вдоль так называемых кривых Сегё [3]. С. Рамануджан был по–видимому первым, кто доказал нетривиальное неравенство для остатков ряда Тэйлора экспоненты в следующем виде (см. [4], С. 323–324): если

$$\frac{e^n}{2} = R_{n-1}(n) + \frac{n^n}{n!}\theta(n),$$

то

$$\frac{1}{3} < \theta(n) = \frac{n!\left(\frac{e^n}{2} - R_{n-1}(n)\right)}{n^n} < \frac{1}{2}.$$

Этот результат важен, так как позволяет оценить величину e^n в рациональных границах

$$\frac{2n^n}{3n!} + 2R_{n-1}(n) < e^n < \frac{n^n}{n!} + 2R_{n-1}(n),$$

что было специально отмечено в [4], с. 323–324. Неравенства для остатка ряда Тэйлора экспоненты изучались также в работах К. Менон [5], Х. Алзера [6], У. Гаучи [7].

В препринте [1] одним из авторов настоящей статьи было проведено наиболее подробное изучение неравенств для остатка ряда Тэйлора экспоненты, их различных модификаций и обобщений. В том числе были исследованы неравенства вида

$$m(n) \leq f_n(x) = \frac{R_{n-1}(x)R_{n+1}(x)}{\left[R_n(x)\right]^2} \leq M(n),\ x \geq 0. \tag{1}$$

В [1] были получены многочисленные альтернативные доказательства, обобщения неравенства (1) в различных направлениях, а также выдвинут ряд связанных с этим неравенством гипотез. Несколько доказательств использовали неравенство Коши–Буняковского, переход к неполной гамма–функции, вырожденной гипергеометрической функции Куммера, дробному интегралу Римана–Лиувилля, интерполяционные неравенства, теорему Адамара о трёх прямых, неравенства для вполне монотонных функций. Обобщения данного неравенства были доказаны также в терминах аппроксимаций Паде и средних Чезаро для экспоненциального ряда.

Краткая история получения точных постоянных $m(n) = m_{best}(n)$, $M(n) = M_{best}(n)$ в этом неравенстве изложена в [1]–[2]. Точная постоянная $m_{best}(n) = \frac{n+1}{n+2} = f_n(0)$ была найдена в работе [7], а точная постоянная $M_{best} = 1 = f_n(\infty)$ — в работе [1]. Точное неравенство из [1] было, по–видимому, первым так называемым неравенством типа Турана, которое было явно сформулировано в терминах гипергеометрической функции Куммера, хотя более ранние версии Сегё для полиномов Лагерра и Гаучи для остатков экспоненциального ряда также могут быть записаны через частные случаи гипергеометрической функции Куммера. В последнее время подобные неравенства для различных гипергеометрических функций стали популярной темой для исследований, см., например, [8]–[9]. Неравенствами типа Турана стало принято называть неравенства вида

$$f_n^2(x) \leq (\geq) f_{n-1}(x) \cdot f_{n+1}(x)$$

для некоторой последовательности специальных функций $f_n(x)$, устанавливающие логарифмическую выпуклость (вогнутость) этой последовательности по параметру, который может быть дискретным или непрерывным. Отметим, что оригинальное неравенство, давшее название для целого направления исследований, было доказано Полом Тураном в работе [10] для случая полиномов Лежандра $f_n(x) = P_n(x)$.

Очевидно, что неравенства (1) с точными постоянными вытекают из следующей гипотезы, впервые сформулированной в [1], см. также [2].

Гипотеза 1. *Функция $f_n(x)$ из (1) является монотонно возрастающей при $x \in [0; \infty), n \in \mathbb{N}$.*

Из сформулированной гипотезы вытекают неравенства с указанными выше точными постоянными

$$m_{best}(n) = \frac{n+1}{n+2} = f_n(0) \leq f_n(x) < 1 = f_n(\infty) = M_{best}(n).$$

Перейдём от остатков ряда Тэйлора к их представлению через гипергеометрическую функцию Куммера

$$f_n(x) = \frac{n+1}{n+2}\, g_n(x),\ \ g_n(x) = \frac{{}_1F_1(1; n+1; x){}_1F_1(1; n+3; x)}{\left[{}_1F_1(1; n+2; x)\right]^2}. \tag{2}$$

Через эти функции гипотеза 1 может быть переформулирована так.

Функция *$g_n(x)$ из представления* (2) *является монотонно возрастающей при $x \in [0; \infty), n \in \mathbb{N}$.*

Этот вариант гипотезы в свою очередь можно очевидным образом обобщить на более широкий набор параметров.

Задача 1. *Найти условия монотонности по x при $x \in [0; \infty)$ для функции $h(a, b, c, x) = \frac{{}_1F_1(a;b-c;x){}_1F_1(a;b+c;x)}{[{}_1F_1(a;b;x)]^2}$.*

Следующее очевидное обобщение — это переход от гипергеометрических функций Куммера к обобщённым гипергеометрическим функциям.

Задача 2. *Найти условия монотонности по x для функции*

$$h_{p,q}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, x) = \frac{{}_pF_q(\mathbf{a}; \mathbf{b}-\mathbf{c}; x){}_pF_q(\mathbf{a}; \mathbf{b}+\mathbf{c}; x)}{\left[{}_pF_q(\mathbf{a}; \mathbf{b}; x)\right]^2}, \tag{3}$$

$$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_p), \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_q), \mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_q).$$

Отметим, что условия монотонности в задачах 1,2 требуется сформулировать в терминах параметров гипергеометрической функции, кроме того в задаче 2 требуется указать интервал монотонности по x, эти интервалы могут быть различными при различных ограничениях на параметры.

Целью этой работы является доказательство гипотезы 1 , сформулированной в работе [1] в 1993 году, а также решение задач 1 и 2, которые были перечислены выше.

Мы используем в настоящей работе подход, при котором неравенства типа Турана могут быть обобщены до более сильных результатов о монотонности отношений соответствующих функций с единичными верхней или нижней постоянными. Такой метод для исследования и обобщений неравенств типа Турана представляется полезным и эффективным.

2. Монотонность отношений гипергеометрических функций Куммера

Сформулируем две полезные леммы, которые будут использоваться в дальнейшем. Они были впервые доказаны в [11], см. также [12], где приведено более подробное доказательство и различные приложения этих лемм.

Лемма 1. *Пусть* a_n *и* b_n $(n = 0, 1, 2, \dots)$ *— две последовательности действительных чисел, таких, что* $b_n > 0$, $n = 0, 1, 2, ...$, *и отношение* $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq 0}$ *возрастает (убывает). Тогда последовательность* $\left(\frac{a_0 + \dots + a_n}{b_0 + \dots + b_n}\right)_n$ *также возрастает (убывает).*

Лемма 2. *Пусть* a_n *and* b_n $(n = 0, 1, 2...)$ *— две последовательности действительных чисел, и пусть степенные ряды* $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *и* $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ *являются сходящимися при* $|x| < r$. *Если* $b_n > 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, *и последовательность* $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq 0}$ *является строго возрастающей, тогда функция* $\frac{A(x)}{B(x)}$ *также является строго возрастающей на* $[0, r)$.

Отметим, что в лемме 2 допустимым является случай $r = +\infty$.

Теперь докажем теорему, из которой следует, что приведённая выше гипотеза 1 действительно выполняется, а также формулируются условия на параметры, при которых получается решение задачи 1 из введения.

Теорема 1. *Пусть даны действительные числа* a, b, c, *такие, что* $a > 0, b > c > 0$; *определим функцию* $x \longmapsto h(a, b, c, x)$ *по формуле*

$$h(a, b, c, x) = \frac{{}_1F_1(a; b - c; x)\,{}_1F_1(a; b + c; x)}{\left[{}_1F_1(a; b; x)\right]^2}, \tag{4}$$

где ${}_1F_1(a; b; x)$ *— гипергеометрическая функция Куммера, см.* [9]. *Тогда функция* $h(a, b, c, x)$ *монотонно возрастает по* x *на* $[0, \infty)$. *Следовательно, для* $n \in \mathbb{N}$, *функции* $x \longmapsto f_n(x)$ *в* (1)–(2) *и* $x \longmapsto g_n(x)$ *в* (2) *также возрастают на* $[0, \infty)$.

Доказательство. Для всех действительных чисел a, b, c, таких, что $a > 0, b > c > 0$ преобразуем рассматриваемую функцию

$$\begin{aligned} h(a, b, c, x) &= \frac{{}_1F_1(a; b - c; x)\,{}_1F_1(a; b + c; x)}{\left[{}_1F_1(a; b; x)\right]^2} = \\ &= \frac{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b-c)_n n!} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b+c)_n n!} x^n\right)}{\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{(b)_n n!} x^n\right]^2} \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n}, \end{aligned}$$

где

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(a)_k (a)_{n-k}}{(b-c)_k (b+c)_{n-k} k!(n-k)!} \quad \text{and } B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(a)_k (a)_{n-k}}{(b)_k (b)_{n-k} k!(n-k)!}.$$

При этом мы использовали тот факт, что при указанных условиях на параметры гипергеометрическая функция Куммера представляется одним сходящимся рядом при $x \in [0; \infty)$.

Определим последовательности $(u_{n,k})_{k\geq 0}$, $(v_{n,k})_{k\geq 0}$ и $(w_{n,k})_{k\geq 0}$ по формулам

$$u_{n,k} = \frac{(a)_k (a)_{n-k}}{(b-c)_k (b+c)_{n-k} k!(n-k)!}, \quad v_{n,k} = \frac{(a)_k (a)_{n-k}}{(b)_k (b)_{n-k} k!(n-k)!},$$

и

$$w_{n,k} = \frac{u_{n,k}}{v_{n,k}} = \frac{(b)_k (b)_{n-k}}{(b-c)_k (b+c)_{n-k}}, \; k \geq 0.$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned}
\frac{w_{n,k+1}}{w_{n,k}} &= \frac{u_{n,k+1} v_{n,k}}{v_{n,k+1} u_{n,k}} \\
&= \frac{(b)_{k+1} (b)_{n-k-1} (b-c)_k (b+c)_{n-k}}{(b-c)_{k+1} (b+c)_{n-k-1} (b)_k (b)_{n-k}} \\
&= \frac{\Gamma(b+k+1)}{\Gamma(b+k)} . \frac{\Gamma(b+n-k-1)}{\Gamma(b+n-k)} . \frac{\Gamma(b-c+k)}{\Gamma(b-c+k+1)} . \frac{\Gamma(b+c+n-k)}{\Gamma(b+c+n-k-1)} \\
&= \frac{(b+k)}{(b-c+k)} . \frac{(b+c+n-k-1)}{(b+n-k-1)} \geq 1.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что последовательность $(w_{n,k})_{k\geq 0}$ возрастает и, следовательно, последовательность $(C_n = \frac{A_n}{B_n})_{n\geq 0}$ также возрастает по лемме 1. Таким образом, функция $h(a,b,c,x)$ возрастает по x на $[0,\infty)$ по лемме 2. Наконец, заменяя a и c на 1, b на $n+1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, мы получаем, что функции $x \longmapsto g_n(x)$ и $x \longmapsto f_n(x)$ из неравенств (1)–(2) также возрастают на $[0,\infty)$. □

Таким образом, гипотеза 1 из введения доказана в обеих формулировках. Мы также получили решение задачи 1 из введения, если условия теоремы 1 выполнены.

Следствие 1. *Для всех действительных чисел a, b, c таких, что $a > 0, b > c > 0$, выполняется следующее неравенство типа Турана*

$$({}_1F_1(a,b,x))^2 \leq {}_1F_1(a,b-c,x) \cdot {}_1F_1(a,b+c,x) \tag{5}$$

для всех $x \in [0,\infty)$.

Доказательство. Так как функция $x \longmapsto h(a,b,c,x)$ является возрастающей по x на $[0,\infty)$, то мы получаем

$$h(a,b,c,x) \geq h(a,b,c,0) = 1.$$

□

Этот результат интересен как следствие установленного нами более сильного свойства монотонности, само неравенство (5) было ранее получено в работе [14].

3. Монотонность отношений для обобщённых гипергеометрических функций

Теперь перейдём к решению задачи 2 из введения при естественных ограничениях на параметры.

Теорема 2. *Пусть даны параметры гипергеометрической функции* $p, q \in \mathbb{N}$ *такие, что* $p \leq q$, *а также последовательности* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_p)$, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_q)$,
$\mathbf{c} = (c_1, ..., c_q)$, *причём* $a_i > 0$ *для* $i = 1, 2, \ldots, p$; $b_i > c_i > 0$ *для* $i = 1, 2, \ldots, q$. *Тогда функция* $x \longmapsto h_{p,q}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, x)$ *из* (3) *является строго возрастающей по* x *при* $x \in [0; \infty)$.

Доказательство. Используя представление в виде ряда гипергеометрической функции ${}_pF_q(\mathbf{a}; \mathbf{b}; x)$ при указанных ограничениях на параметры (см. [13]), получаем

$$h_{p,q}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, x) = \frac{{}_pF_q(\mathbf{a}; \mathbf{b} - \mathbf{c}; x) \cdot {}_pF_q(\mathbf{a}; \mathbf{b} + \mathbf{c}; x)}{\left({}_pF_q(\mathbf{a}; \mathbf{b}; x)\right)^2}$$
$$= \frac{\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n ... (a_p)_n x^n}{(b_1 - c_1)_n (b_2 - c_2)_n ... (b_q - c_q)_n n!}\right]}{\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n ... (a_p)_n x^n}{(b_1)_n (b_2)_n ... (b_q)_n n!}\right]^2}$$
$$\times \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n ... (a_p)_n x^n}{(b_1 + c_1)_n (b_2 + c_2)_n ... (b_q + c_q)_n n!}\right] = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} A_n(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} B_n(\mathbf{a}, \mathbf{b}) x^n},$$

где обозначено

$$A_n(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \sum_{k=0}^{n} U_k(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{[(a_1)_k (a_1)_{n-k}]\,[(a_1)_k (a_1)_{n-k}] \ldots [(a_p)_k (a_p)_{n-k}]}{[(b_1 - c_1)_k ... (b_q - c_q)_k]\,[(b_1 + c_1)_{n-k} ... (b_q + c_q)_{n-k}]\, k!(n-k)!},$$

и

$$B_n(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{k=0}^{n} V_k(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{[(a_1)_k (a_1)_{n-k}]\,[(a_2)_k (a_2)_{n-k}] \ldots [(a_p)_k (a_p)_{n-k}]}{[(b_1)_k (b_1)_{n-k}]\,[(b_2)_k (b_2)_{n-k}] \ldots [(b_q)_k (b_q)_{n-k}]\, k!(n-k)!}.$$

Далее, для фиксированного $n \in \mathbb{N}$ определим последовательности $(W_{n,k}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}))_{k \geq 0}$ следующим образом:

$$W_{n,k}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \frac{U_k(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}{V_k(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = \frac{[(b_1)_k (b_1)_{n-k}]\,[(b_2)_k (b_2)_{n-k}] \ldots [(b_q)_k (b_q)_{n-k}]}{[(b_1 - c_1)_k ... (b_q - c_q)_k]\,[(b_1 + c_1)_{n-k} ... (b_q + c_q)_{n-k}]}.$$

Для $n, k \in \mathbb{N}$ вычисляем отношение

$$\frac{W_{n,k+1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}{W_{n,k}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})} = \prod_{j=1}^{q} \left[\frac{(b_j)_{k+1} (b_j)_{n-k-1} (b_j - c_j)_k (b_j + c_j)_{n-k}}{(b_j)_k (b_j)_{n-k} (b_j - c_j)_{k+1} (b_j + c_j)_{n-k-1}}\right]$$
$$= \prod_{j=1}^{q} \left[\left(\frac{\Gamma(b_j + k + 1)}{\Gamma(b_j + k)}\right)\left(\frac{\Gamma(b_j + n - k - 1)}{\Gamma(b_j + n - k)}\right)\right.$$

$$\times \left(\frac{\Gamma(b_j - c_j + k)}{\Gamma(b_j - c_j + k + 1)} \right) \left(\frac{\Gamma(b_j + c_j + n - k - 1)}{\Gamma(b_j + c_j + n - k)} \right) \Bigg]$$

$$= \prod_{j=1}^{q} \left[\frac{b_j + k}{b_j - c_j + k} \right] \left[\frac{b_j + c_j + n - k - 1}{b_j + n - k - 1} \right] > 1.$$

Теперь мы можем заключить, что последовательность $(W_{n,k})_{k\geq 0}$ является возрастающей и, следовательно, $\left(C_n = \frac{A_n}{B_n}\right)_{n\geq 0}$ также возрастает по лемме 1. Таким образом, функция $x \longmapsto h_{p,q}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, x)$ является возрастающей по x на $[0, \infty)$ по лемме 2. □

Случай $p = q + 1$ мы рассмотрим отдельно.

Теорема 3. *Рассмотрим гипергеометрическую функцию с параметрами* $p \in \mathbb{N}, q = p + 1$. *Пусть для векторных параметров* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *выполнены все условия предыдущей теоремы. Тогда функция* $x \longmapsto h_{p,p+1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, x)$ *из (3) является строго возрастающей по* x *при* $x \in [0; 1)$.

Доказательство. Вывод этой теоремы полностью повторяет доказательство предыдущей за одним исключением — теперь мы можем пользоваться представлением гипергеометрической функции в виде ряда только для значений $x \in [0; 1)$. □

В частности, теорема 3 применима к классическим гипергеометрическим функциям Гаусса ${}_2F_1(a, b; c; x)$.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия* $a > 0, b > 0, c > d > 0$. *Тогда функция*

$$h(a, b, c, x) = \frac{{}_2F_1(a, b; c - d; x) \cdot {}_2F_1(a, b; c + d; x)}{\left({}_2F_1(a, b; c; x)\right)^2}$$

является строго возрастающей по x *на* $[0, 1)$.

Так же, как и выше, из теорем 2,3 мы можем получить неравенства типа Турана.

Следствие 3. *Пусть параметры гипергеометрической функции удовлетворяют условиям теоремы 2 (теоремы 3). Тогда выполняется следующее неравенство типа Турана*

$$ {}_pF_q(\mathbf{a}; \mathbf{b} - \mathbf{c}; x)\, {}_pF_q(\mathbf{a}; \mathbf{b} + \mathbf{c}; x) > \left({}_pF_q(\mathbf{a}; \mathbf{b}; x)\right)^2 \tag{6}$$

для всех $x \in [0, \infty)$ $(x \in [0, 1))$.

Доказательство. Сразу следует из установленной монотонности функции $h_{p,q}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, x)$ по x. □

Мы можем ещё раз повторить, что последнее неравенство типа Турана (6) приведено нами как следствие более общего результата о монотонности отношения обобщённых гипергеометрических функций, это неравенство само по себе не является новым и было получено в [9].

4. Заключение

В работе доказаны результаты о монотонности отношений при определённых условиях гипергеометрических функций Куммера, Гаусса, а также обобщённых гипергеометрических функций. В качестве следствия получены доказательства гипотез об остатках ряда Тэйлора экспоненциальной функции, высказанных одним из авторов в 1993 году в работе [1]. Показано, что рассмотренные результаты о монотонности отношений специальных функций в качестве следствий приводят к неравенствам типа Турана.

В качестве возможных приложений полученных условий монотонности и неравенств для специальных функций отметим их использование при оценках ядер операторов преобразования [15]–[16], а также при исследовании разложений сигналов по целочисленным сдвигам функций Гаусса [17]–[18], исследовании неравенств специального вида для однородных форм [19]. Авторами были также получены в [20] результаты о монотонности отношений и неравенствах типа Турана для q–гипергеометрических функций, см. [21].

References

[1] S.M. Sitnik, *Inequalities for the exponential remainder*, preprint, Institute of Automation and Control Process, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Vladivostok, (1993), (in Russian), 31 pp.

[2] S.M. Sitnik, *Conjectures on Monotonicity of Ratios of Kummer and Gauss Hypergeometric Functions*, RGMIA Research Report Collection, **17** (2014), Article 107, 4 pp.

[3] A. Edrei , E.B. Saff, R.S. Varga, *Zeros of Sections of Power Series*, Springer, 1983. Zbl 0507.30001

[4] G.H. Hardy, P.V. Seshu Aiyan, B.M. Wilson, (eds), *Collected Papers of Srinivasa Ramanujan*, Cambridge, 1927.

[5] P. Kesava Menon, *Some integral inequalities*, Math. Student, **11** (1943), 36–38.

[6] H. Alzer, *An inequality for the exponential function*, Arch. Math., **55** (1990), 462–464. Zbl 0723.26007

[7] W. Gautschi, *A note on the successive remainders of the exponential series*, Elem. Math., **37** (1982), 46–49. Zbl 0442.33001

[8] D.B. Karp, S.M. Sitnik, *Log–convexity and log–concavity of hypergeometric–like functions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **364**:2 (2010), 384–394. Zbl 1226.33003

[9] D.B. Karp, S.M. Sitnik, *Inequalities and monotonicity of ratios for generalized hypergeometric function*, Journal of Approximation Theory, **161** (2009), 337–352. Zbl 1185.33008

[10] P. Turán, *On the zeros of the polynomials of Legendre*, Casopis Pest. Mat. Fys. **75** (1950), 113–122. Zbl 0040.32303

[11] M. Biernacki, J. Krzyz, *On the monotonicity of certain functionals in the theory of analytic functions*, Ann. Univ. M. Curie–Skłodowska, **2** (1995), 134–145.

[12] S. Ponnusamy, M. Vuorinen, *Asymptotic expansions and inequalities for hypergeometric functions*, Mathematika, **44** (1997), 278–301. Zbl 0897.33001

[13] F.W.J. Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert, C.W. Clark (Eds.), *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010. Zbl 1198.00002

[14] Á. Baricz, *Functional inequalities involving Bessel and modified Bessel functions of the first kind*, Expositiones Mathematicae, **26** (2008), 279–293. Zbl 1152.33304

[15] S.M. Sitnik, *Factorization and Estimates of Norms in Weighted Lebesgue Spaces of Buschman–Erdelyi Operators*, Soviet Math. Dokl, **44:2** (1991), 641–646. Zbl 0771.44004

[16] V.V. Katrakhov, S.M. Sitnik, *Boundary value problem for the stationary Schrödinger equation with a singular potential*, Akademiia Nauk SSSR, Doklady, **30:2** (1984), 468–470. Zbl 0641.35013

[17] M.V. Zhuravlev, E.A. Kiselev, L.A. Minin, S.M. Sitnik, *Jacobi theta-functions and systems of integral shifts of Gaussian functions*, Journal of Mathematical Sciences, **173:2** (2011), 231–241. Zbl 1219.42023

[18] E.A. Kiselev, L.A. Minin, I.Ya. Novikov, S.M. Sitnik, *On the Riesz Constants for Systems of Integer Translates*, Mathematical Notes, **96:2** (2014), 228–238. Zbl 1319.42028

[19] A.B. Pevnyi, S.M. Sitnik, *On Gasparyan's inequality*, Journal Of Mathematical Sciences, **205:2** (2015), 304–307. Zbl 1329.26039

[20] K. Mehrez, S.M. Sitnik, *On monotonicity of ratios of q–Kummer confluent hypergeometric and q–hypergeometric functions and associated Turán types inequalities*, RGMIA Research Report Collection, **17** (2014), Article 150, 9 pp.

[21] G. Gasper, M. Rahman, *Basic hypergeometric series*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990. Zbl 0695.33001

Sergei Mihailovich Sitnik
Voronezh Institute of the Ministry of Internal Affairs,
pr. Patriotov, 53, Voronezh, 394065, Russia;

Peoples' Friendship University of Russia,
M. - Maklaya str., 6, Moscow, 117198, Russia.
E-mail address: mathsms@yandex.ru

Khaled Mehrez
University of Kairouan,
Department of Mathematics, ISSAT Kasserine 3100, Tunisia.
E-mail address: k.mehrez@yahoo.fr