

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 13, стр. 269–279 (2016)

УДК 519.178

DOI 10.17377/semi.2016.13.021

MSC 05C07 05C85

НОВЫЙ АЛГОРИТМ ПОРОЖДЕНИЯ ГРАФИЧЕСКИХ  
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В.А. БАРАНСКИЙ, Т.И. НАДЫМОВА, Т.А. СЕНЬЧОНОК

ABSTRACT. The aim is to give a new algorithm which generates all graphical sequences of a given length without generating any nongraphical sequences.

**Keywords:** graph, graphical sequence, algorithm.

Под графом мы будем понимать неориентированный граф без петель и кратных ребер.

Зафиксируем натуральное число  $n$ . Невозрастающую последовательность целых неотрицательных чисел  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  будем называть  $n$ -последовательностью;  $n$ -последовательность  $\lambda$  называется *графической*, если существует  $n$ -граф  $G = (V, E)$  такой, что  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  и  $\deg v_1 = \lambda_1, \deg v_2 = \lambda_2, \dots, \deg v_n = \lambda_n$ . Такой граф  $G$  называют *реализацией*  $n$ -последовательности  $\lambda$  и говорят, что  $\lambda$  реализуется графом  $G$ .

Задаче проверки  $n$ -последовательности на графичность было посвящено значительное число исследований (см., например, работы [1]–[4]). Изучалась также проблема перечисления всех графических  $n$ -последовательностей для заданного натурального числа  $n$ . Этой проблеме посвящена работа [5], содержащая обширную библиографию по данной тематике. Все известные алгоритмы порождения и перечисления графических  $n$ -последовательностей основаны на порождении всех последовательностей неотрицательных целых чисел  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  таких, что  $n - 1 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ , и на проверке их графичности.

---

BARANSKY, V.A., NADYMova, T.I., SENCHONOK, T.A., A NEW ALGORITHM GENERATING GRAPHICAL SEQUENCES.

© 2016 Баранский В.А., Надымова Т.И., Сеньчонок Т.А.

Поступила 24 декабря 2015 г., опубликована 13 апреля 2016 г.

Цель данной работы состоит в построении нового алгоритма порождения графических  $n$ -последовательностей, в котором не используются неграфические последовательности.

Компоненту  $n$ -последовательности  $\lambda$  с номером  $i$  называют *доминирующей*, если  $\lambda_i = n - 1$ . Число доминирующих компонент будем обозначать  $\text{dnn}(\lambda)$  и будем называть *числом доминирования*  $n$ -последовательности  $\lambda$ .

*Канонической  $n$ -последовательностью* будем называть такую  $n$ -последовательность  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , что

- 1)  $n - 1 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ ,
- 2) число  $\sum_{i=1}^n \lambda_i$  чётно,
- 3)  $\lambda_n \geq \text{dnn}(\lambda)$ .

Число  $\text{sum}(\lambda) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$  будем называть *весом*  $n$ -последовательности  $\lambda$ .

**Пример.**

- 1) 6-последовательность  $\lambda = (5, 5, 4, 4, 2, 2)$  является канонической и  $\text{dnn}(\lambda) = 2 = \lambda_6$ .
- 2) 6-последовательность  $\lambda = (5, 5, 4, 3, 2, 1)$  не является канонической, поскольку  $\text{dnn}(\lambda) = 2 > \lambda_6 = 1$ .

Очевидно, для любого графа  $G$  с вершинами  $v_1, v_2, \dots, v_n$  последовательность степеней его вершин такая, что

$$\deg v_1 \geq \deg v_2 \geq \dots \geq \deg v_n,$$

является канонической  $n$ -последовательностью.

Отметим, что для последовательности  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  число доминирования  $\text{dnn}(\lambda)$  равно числу доминирования графа  $G$ , т. е. числу доминирующих вершин графа  $G$  (числу вершин, каждая из которых смежна с любой отличной от нее вершиной).

Отметим также, что не любая каноническая  $n$ -последовательность является графической. Например, каноническая 5-последовательность  $(4, 3, 3, 1, 1)$  не является графической.

Перейдем теперь к построению алгоритма, который для заданного натурального числа  $n \geq 2$ , начиная с  $n$ -последовательности  $(n - 1, n - 1, \dots, n - 1)$  порождает все графические  $n$ -последовательности, не используя каких-либо неграфических  $n$ -последовательностей.

Далее для удобства канонические  $n$ -последовательности мы будем представлять себе в виде их диаграмм Ферре. Например, диаграмма Ферре 6-последовательности  $(5, 4, 3, 3, 2, 1)$  имеет вид

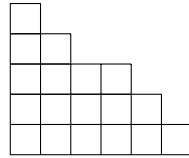


Рис. 1

Пусть  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  — произвольная каноническая  $n$ -последовательность. Введем понятие *стенки* для  $\lambda$ .

1. Пусть  $\text{dnn}(\lambda) = n$ , т.е.  $\lambda = (n - 1, n - 1, \dots, n - 1)$ . В этом случае стенкой является правая вертикальная линия последнего столбца диаграммы Ферре с номером  $n$ :

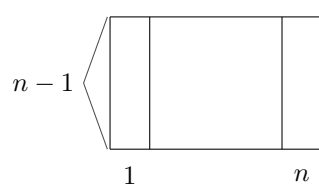


Рис. 2

2. Пусть  $0 < \text{dnn}(\lambda) < n$ . Тогда существует  $s \in \{2, \dots, n\}$  такое, что  $\lambda_{s-1} = n-1$  и  $\lambda_s < n-1$ . В этом случае стенкой является правая вертикальная линия столбца с номером  $s-1$ , отделяющая столбец с номером  $s-1$  от столбца с номером  $s$ :

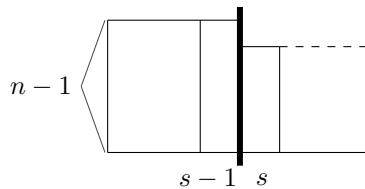


Рис. 3

Пунктиром мы указываем ту часть диаграммы Ферре, которая расположена справа от столбца с номером  $s$  и которую мы не можем указать более точно.

3. Пусть  $\text{dnn}(\lambda) = 0$ . В этом случае стенкой является левая вертикальная линия первого столбца диаграммы Ферре. Можно считать, что стенка в данном случае совпадает с правой вертикальной линией столбца с номером  $0$ , не входящего в диаграмму Ферре.

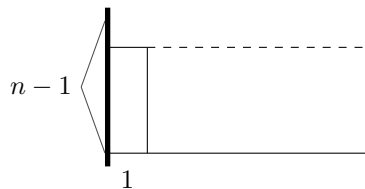


Рис. 4

В этом случае будем считать, что  $s = 1$ . Аналогично в случае 1 будем считать, что  $s = n + 1$ .

Определим теперь четыре типа *порождающих преобразований*, каждое из которых переводит некоторую заданную каноническую  $n$ -последовательность  $\lambda$  в новую каноническую  $n$ -последовательность  $\mu$ . Для последовательности  $\lambda$  через  $s$  будем обозначать указанное выше число.

- I. *Преобразование одинокого блока у стенки*. Пусть  $s < n$  и  $\lambda_s > \lambda_{s+1}$ , т.е. верхний блок столбца с номером  $s$  является «одиноким» (непосредственно справа от него нет другого блока). Пусть  $t$  — такой номер, что  $s < t \leq n$  и  $t$  соответствует «уступ» в диаграмме Ферре  $n$ -последовательности  $\lambda$ , т.е. либо  $\lambda_t > 0$  при  $t = n$ , либо при  $t < n$  выполняется  $\lambda_t > \lambda_{t+1}$ .

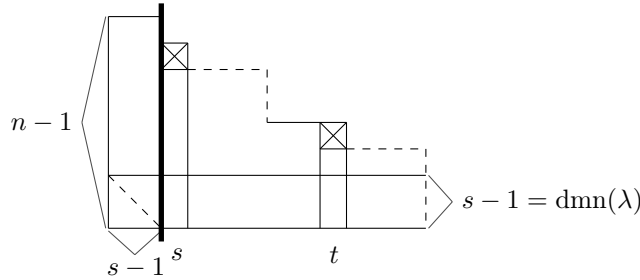


Рис. 5

Преобразование одинокого блока у стенки удаляет из диаграммы Ферре последовательности  $\lambda$  два выделенных верхних блока по одному из каждого столбца с номерами  $s$  и  $t$ .

При  $t < n$  полученная  $n$ -последовательность  $\mu$  очевидно является канонической. При  $t = n$  рассматриваемое преобразование можно применять лишь при выполнении условия

$$\lambda_n > \text{dmn}(\lambda) = s - 1,$$

которое гарантирует, что полученная  $n$ -последовательность  $\mu$  и в случае  $t = n$  является канонической.

Заметим, что после выполнения преобразования одинокого блока у стенки стенка сохраняет свое расположение в диаграмме Ферре, т.е. сохраняется число доминирования  $n$ -последовательности.

Приведем примеры преобразований одинокого блока у стенки при  $n = 6$ .

1.  $\lambda = (5, 5, 4, 3, 3, 2) \Rightarrow (5, 5, 3, 3, 2, 2) = \mu$ . Здесь  $n - 1 = 5$ ,  $s = 3$ ,  $t = 5$ ,  $\lambda_6 = 2 = \text{dmn}(\lambda)$  и стенка находится в позиции 2. Отметим, что при  $s = 3$  и  $t = 6$  преобразование нельзя выполнить, поскольку не выполняется условие  $\lambda_6 > \text{dmn}(\lambda)$  (здесь  $\lambda_6 = \text{dmn}(\lambda)$ ).
  2.  $\lambda = (4, 3, 2, 2, 2, 1) \Rightarrow (3, 3, 2, 2, 2, 0) = \mu$ . Здесь  $n - 1 = 5$ ,  $s = 1$ ,  $t = 6$ ,  $1 = \lambda_6 > \text{dmn}(\lambda) = 0$  и стенка находится в крайнем левом положении.
  3.  $\lambda = (4, 3, 2, 2, 2, 1) \Rightarrow (3, 3, 2, 2, 1, 1) = \mu$ .
  4.  $\lambda = (4, 3, 2, 2, 2, 1) \Rightarrow (3, 2, 2, 2, 2, 1) = \mu$ .
  5.  $\lambda = (4, 3, 3, 2, 2, 0) \Rightarrow (3, 3, 3, 2, 1, 0) = \mu$ .
- II. *Преобразование одинокой пары блоков у стенки*. Пусть  $\lambda_s = \lambda_{s+1}$ ,  $1 \leq s < n$  и в позиции  $s + 1$  имеется «уступ» в диаграмме Ферре  $n$ -последовательности  $\lambda$ , т.е.  $\lambda_{s+1} > 0$  при  $s + 1 = n$  или  $\lambda_s = \lambda_{s+1} > \lambda_{s+2}$  при  $s + 2 \leq n$ .

Преобразование одинокой пары блоков у стенки удаляет из диаграммы Ферре  $n$ -последовательности  $\lambda$  два выделенных верхних блока, по одному из каждого столбца с номерами  $s$  и  $s + 1$ . Полученная  $n$ -последовательность  $\mu$  является канонической, что очевидно при  $s + 1 < n$  и гарантируется условием  $\lambda_s = \lambda_{s+1} > \text{dmn}(\lambda)$  при  $s + 1 = n$ . При  $s + 1 = n$  данное преобразование можно выполнять лишь при выполнении условия  $\lambda_{n-1} = \lambda_n > \text{dmn}(\lambda)$ .

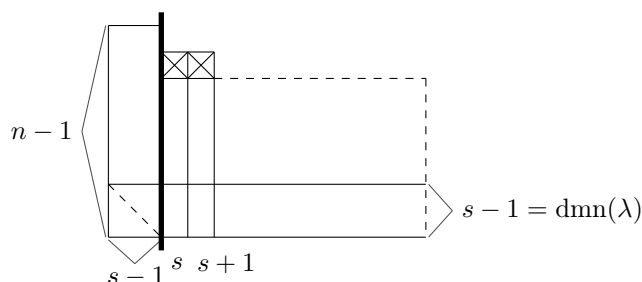


Рис. 6

После выполнения преобразования одинокой пары блоков у стенки стенка также сохраняет свое расположение в диаграмме Ферре, т. е. сохраняется число доминирования  $n$ -последовательности.

Приведем примеры преобразований одинокой пары блоков у стенки при  $n = 6$ .

1.  $\lambda = (5, 4, 4, 3, 2, 2) \Rightarrow (5, 3, 3, 3, 2, 2) = \mu$ . Здесь  $n - 1 = 5$ ,  $s = 2$ ,  $\text{dmn}(\lambda) = 1$  и стенка находится в позиции 1.
2. Преобразование одинокой пары блоков у стенки нельзя применить к 6-последовательности  $\lambda = (5, 5, 5, 5, 4, 4)$  в позициях  $s = 5$  и  $s + 1 = 6$ , поскольку нарушено условие  $\lambda_s > \text{dmn}(\lambda) = 4$  (здесь выполняется  $\lambda_6 = 4 = \text{dmn}(\lambda)$ ).
3.  $\lambda = (4, 4, 3, 2, 2, 1) \Rightarrow (3, 3, 3, 2, 2, 1) = \mu$ . Здесь  $n - 1 = 5$ ,  $s = 1$ ,  $\text{dmn}(\lambda) = 0$  и стенка находится в крайнем левом положении.
4.  $\lambda = (4, 4, 3, 3, 2, 0) \Rightarrow (3, 3, 3, 3, 2, 0) = \mu$ . Поскольку  $n = 6$ , здесь стенка находится в крайнем левом положении, т. е.  $\text{dmn}(\lambda) = 0$ . Отметим, что здесь  $\lambda$  и  $\mu$  являются каноническими 6-последовательностями.

III. *Преобразование правого блока на стенке.* Пусть  $s - 1 > 0$  и  $t$  — такой номер, что  $s \leq t \leq n$  и в позиции  $t$  имеется «уступ» в диаграмме Ферре  $n$ -последовательности  $\lambda$ , т. е.  $\lambda_t > 0$  при  $t = n$  или  $\lambda_t > \lambda_{t+1}$  при  $t < n$ . Отметим, что здесь выполняется условие  $\lambda_t > \lambda_n \geq 0$  при  $t < n$  и  $\lambda_t = \lambda_n \geq \text{dmn}(\lambda) = s - 1 > 0$  при  $t = n$ , т. е.  $\lambda_t > 0$  для любого значения  $t$ .

Преобразование правого блока на стенке удаляет из диаграммы Ферре  $n$ -последовательности  $\lambda$  два выделенных верхних блока по одному из каждого столбца с номерами  $s - 1$  и  $t$ . Полученная  $n$ -последовательность  $\mu$  является канонической, что очевидно при  $t < n$ , а при  $t = n$  гарантируется тем, что число доминирования  $n$ -последовательности уменьшается на 1.

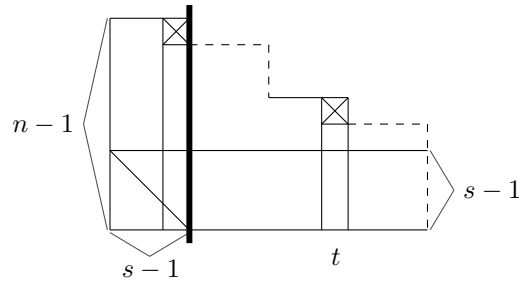


Рис. 7

Отметим, что при таком преобразовании стенка в диаграмме Ферре смещается влево на одну позицию, т. е. число доминирования  $n$ -последовательности уменьшается на 1.

Приведем примеры преобразований правого блока на стенке при  $n = 6$ .

1.  $\lambda = (5, 4, 4, 4, 4, 1) \Rightarrow (4, 4, 4, 4, 4, 0) = \mu$ . Здесь  $n - 1 = 5$ ,  $s - 1 = 1$ ,  $\text{dnn}(\lambda) = 1$  и стенка находится в позиции 1.
2.  $\lambda = (5, 4, 4, 4, 4, 1) \Rightarrow (4, 4, 4, 4, 3, 1) = \mu$ .
3.  $\lambda = (5, 5, 5, 3, 3, 3) \Rightarrow (5, 5, 4, 3, 3, 2) = \mu$ .

IV. Преобразование правой пары блоков на стенке. Пусть  $s - 2 > 0$ .

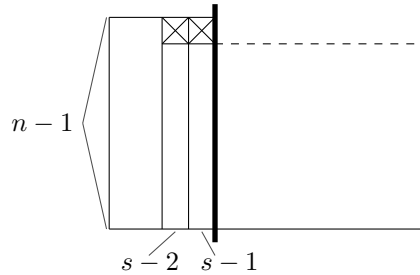


Рис. 8

Преобразование правой пары блоков на стенке удаляет из диаграммы Ферре  $n$ -последовательности  $\lambda$  два выделенных верхних блока по одному из каждого столбца с номерами  $s - 2$  и  $s - 1$ . Полученная  $n$ -последовательность  $\mu$  является канонической, что гарантируется уменьшением числа доминирования  $n$ -последовательности на 2. При таком преобразовании стенка смещается влево на две позиции.

Порождающие преобразования всех указанных четырех типов будем записывать в виде  $\lambda \Rightarrow \mu$ .

**Лемма 1.** Пусть  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  — графическая каноническая  $n$ -последовательность, отличная от  $n$ -последовательности  $(n - 1, n - 1, \dots, n - 1)$  и  $n \geq 2$ . Тогда существует графическая каноническая  $n$ -последовательность  $\lambda$  такая, что  $\lambda \Rightarrow \mu$ .

*Доказательство.* Пусть  $H$  — реализация  $n$ -последовательности  $\mu$ ,  $v_1, v_2, \dots, v_n$  — вершины графа  $H$  и  $\deg v_1 = \mu_1, \deg v_2 = \mu_2, \dots, \deg v_n = \mu_n$ . Тогда  $H$  является собственным подграфом полного графа  $K_n$  на множестве вершин  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .

Пусть  $i$  — наименьшее натуральное число такое, что  $\mu_i \neq n - 1$ . Поскольку в  $H$  отсутствует хотя бы одно ребро из  $K_n$ , выполняется  $i \leq n - 1$ . Так как  $\mu_1 = \dots = \mu_{i-1} = n - 1$ , вершины  $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}$  (если они имеются) являются доминирующими в  $H$ , т. е.  $\mu_n \geq i - 1 = \text{dnn}(\mu)$ .

Поскольку  $\mu_i \neq n - 1$ , в графе  $K_n$  существует ребро  $e = v_i v_j$  такое, что  $i < j$  и  $e \notin EH$ . Положим  $G = H + e$ .

Поскольку перестановка вершин, степени которых в  $H$  равны одному и тому же числу  $\mu_j$  не изменяют канонической последовательности степеней графа  $H$ , мы можем считать, что  $j$  является наименьшим из номеров компонент  $n$ -последовательности  $\mu$ , следующих после номера  $i$ , величина которых равна числу  $\mu_j$ .

**1 случай.** Пусть  $\mu_i = \mu_j$ . Тогда  $j = i + 1$ ,  $n - 1 \geq \mu_i + 1 = \mu_{i+1} + 1$ , причем  $\mu_i + 1 = \mu_{i+1} + 1 > \mu_{i+2}$  при  $i + 2 \leq n$ . Последовательность степеней  $\lambda$  графа  $G$  отличается от последовательности степеней  $\mu$  графа  $H$  точно в двух позициях  $i$  и  $i + 1$ , поэтому преобразование

$$\lambda = (\dots, \mu_i + 1, \mu_{i+1} + 1, \dots) \Rightarrow (\dots, \mu_i, \mu_{i+1}, \dots) = \mu$$

имеет тип II или тип IV.

Отметим, что условие 3) из определения канонической  $n$ -последовательности выполняется для  $n$ -последовательности  $\lambda$ , поскольку она является графической.

**2 случай.** Пусть  $\mu_i > \mu_j$ . Тогда выполняется

$$n - 1 > \mu_i \geq \dots \geq \mu_{j-1} > \mu_j \geq \dots$$

Здесь случай  $i = j - 1$  не исключается. Поэтому

$$n - 1 \geq \mu_i + 1 > \dots \geq \mu_j + 1,$$

причем  $\mu_j + 1 > \mu_{j+1}$  при  $j < n$ . Следовательно, графическая  $n$ -последовательность  $\lambda$ , реализуемая графом  $G$ , отличается от  $n$ -последовательности  $\mu$  точно в двух позициях  $i$  и  $j$ , а преобразование

$$\lambda = (\dots, \mu_i + 1, \dots, \mu_j + 1, \dots) \Rightarrow (\dots, \mu_i, \dots, \mu_j, \dots) = \mu$$

имеет тип I или тип III. Отметим, что в силу графичности  $n$ -последовательность  $\lambda$  является канонической.  $\square$

**Следствие 1.** Любая графическая каноническая  $n$ -последовательность может быть получена из  $n$ -последовательности  $(n - 1, n - 1, \dots, n - 1)$  с помощью конечной последовательности порождающих преобразований типов I–IV, в которой участвуют лишь графические канонические  $n$ -последовательности.

**Лемма 2.** Пусть  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  — графическая каноническая  $n$ -последовательность и каноническая  $n$ -последовательность  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  получена из  $\lambda$  с помощью порождающего преобразования одного из типов I–IV, т. е.  $\lambda \Rightarrow \mu$ . Тогда  $\mu$  является графической последовательностью.

*Доказательство.* Пусть граф  $G$  реализует  $n$ -последовательность  $\lambda$ ,  $v_1, v_2, \dots, v_n$  — вершины графа  $G$  и  $\deg v_1 = \lambda_1, \deg v_2 = \lambda_2, \dots, \deg v_n = \lambda_n$ .

**1 случай.** Пусть порождающее преобразование  $\lambda \Rightarrow \mu$  имеет тип II. Тогда  $\lambda$  имеет вид, изображенный на Рис. 6, где  $s$  — наименьший из номеров компонент  $n$ -последовательности  $\lambda$  такой, что  $\lambda_s \neq n - 1$ . Ясно, что вершины  $v_1, v_2, \dots, v_{s-1}$  при  $s \geq 2$  являются доминирующими вершинами графа  $G$ .

Если в графе  $G$  имеется ребро  $e = v_s v_{s+1}$ , то полагаем  $H = G - e$ . Тогда граф  $H$  реализует  $n$ -последовательность  $\mu$ , что и требовалось доказать.

Пусть вершины  $v_s$  и  $v_{s+1}$  несмежны в графе  $G$ . Ясно, что  $\lambda_s = \lambda_{s+1} = \Delta + (s - 1)$ , где  $\Delta > 0$ . Обозначим через  $N_s$  множество всех вершин, смежных с  $v_s$  в графе  $G$  и лежащих в множестве  $\{v_s, \dots, v_n\}$ . Тогда  $|N_s| = \Delta$  и  $v_{s+1} \notin N_s$ , поскольку  $\text{dmn}(\lambda) = s - 1$ . Пусть  $w$  — вершина, смежная с  $v_{s+1}$  и лежащая в множестве  $\{v_s, \dots, v_n\}$ . Такая вершина существует, поскольку  $\lambda_{s+1} = \Delta + (s - 1)$  и  $\Delta > 0$ .

Пусть вершина  $w$  смежна всем вершинам из  $N_s \setminus \{w\}$  или  $N_s \setminus \{w\} = \emptyset$ .

Если  $w \in N_s$ , то  $\deg w \geq |N_s| - 1 + 1 + 1 + (s - 1) = |N_s| + s > \lambda_s$ .

Если  $w \notin N_s$ , то  $\deg w \geq |N_s| + 1 + (s - 1) = |N_s| + s > \lambda_s$ .

Таким образом, в любом из случаев имеем  $\deg w > \lambda_s$ . Поскольку  $w \in \{v_{s+2}, \dots, v_n\}$ , получаем

$$\lambda_s = \lambda_{s+1} > \lambda_{s+2} \geq \dots \geq \deg w,$$

пришли к противоречию.

Следовательно, в  $N_s$  существует вершина  $u$  такая, что  $u \neq w$  и  $u$  несмежна с  $w$ , т.е. в  $G$  имеется 4-псевдоцикл:

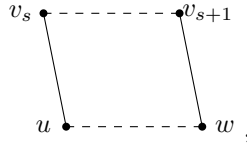


Рис. 9

где  $u, w \in \{v_{s+2}, \dots, v_n\}$ , вершины  $v_s, v_{s+1}, u, w$  попарно различны, в  $G$  существуют ребра  $e_1 = v_s u$  и  $e_2 = v_{s+1} w$  и отсутствуют ребра, соединяющие  $v_s$  с  $v_{s+1}$  и  $u$  с  $w$ . Совершая переключение ребер в этом 4-псевдоцикле, т.е. удаляя из  $G$  ребра  $e_1, e_2$  и добавляя в  $G$  новые ребра  $e_3 = v_s v_{s+1}$  и  $e_4 = uw$ , мы получаем граф  $G'$ , который очевидно реализует  $n$ -последовательность  $\lambda$ . Удаляя из графа  $G'$  ребро  $e_3$ , мы получаем граф  $H$ , реализующий последовательность  $\mu$ , что и требовалось доказать.

**2 случай.** Пусть порождающее преобразование  $\lambda \Rightarrow \mu$  имеет тип I. Тогда  $\lambda$  имеет вид, изображенный на Рис. 5. Вершины  $v_1, v_2, \dots, v_{s-1}$  при  $s - 1 \geq 1$  являются доминирующими в графе  $G$ ,

$$n - 1 > \lambda_s > \lambda_{s+1} \geq \dots \geq \lambda_t > \text{dmn}(\lambda) = s - 1,$$

причем  $\lambda_t > \lambda_{t+1}$  при  $t < n$ .

Положим  $\lambda_s = \Delta_1 + \lambda_t$  и  $\lambda_t = \Delta_2 + (s - 1)$ , где  $\Delta_1 > 0$  и  $\Delta_2 > 0$ . Тогда  $\lambda_s = \Delta + (s - 1)$ , где  $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 \geq 2$ .

Если вершины  $v_s$  и  $v_t$  смежны в  $G$ , то, удаляя ребро  $e = v_s v_t$  из графа  $G$ , получим граф  $H$ , который реализует  $n$ -последовательность  $\mu$ , что и требовалось доказать.



Пусть вершины  $v_s$  и  $v_t$  несмежны в графе  $G$ . Обозначим через  $N_s$  множества всех вершин из  $\{v_s, \dots, v_n\}$ , смежных с вершиной  $v_s$  в графе  $G$ . Тогда  $|N_s| = \Delta \geq 2$ . Поскольку  $\Delta_2 > 0$ , в графе  $G$  имеется вершина  $w \in \{v_s, \dots, v_n\}$ , смежная с  $v_t$ . Далее рассмотрение данного случая можно завершить точно так же, как в случае 1.

**3 случай.** Пусть порождающее преобразование  $\lambda \Rightarrow \mu$  имеет тип III или тип IV. Тогда  $\lambda$  имеет вид, изображенный на Рис. 7 или Рис. 8. В любом случае вершина  $v_{s-1}$  является доминирующей в графе  $G$ . Поэтому в случае преобразования типа III граф  $G$  имеет ребро  $e = v_{s-1}v_t$ , а в случае преобразования типа IV — ребро  $e = v_{s-2}v_{s-1}$ . Удаляя ребро  $e$  из графа  $G$ , мы получим граф  $H$ , который реализует последовательность  $\mu$ , что и требовалось доказать.  $\square$

Леммы 1 и 2 гарантируют корректность следующего алгоритма.

**Алгоритм 1.** Пусть  $n$  — натуральное число и  $n \geq 2$ . Следующая процедура находит множество  $GPL(n)$  всех графических  $n$ -последовательностей.

- 1) Пусть  $Q$  — текущая очередь, составленная из уже найденных графических  $n$ -последовательностей. В начале полагаем, что  $Q$  состоит из одной последовательности  $(n-1, n-1, \dots, n-1)$  веса  $n(n-1)$ .
- 2) По всем найденным  $n$ -последовательностям очередного веса  $2m > 0$  в соответствии с очередью  $Q$  с помощью всех допустимых применений порождающих преобразований типов I, II, III и IV находим все графические  $n$ -последовательности веса  $2m-2$ , при этом каждую новую найденную  $n$ -последовательность веса  $2m-2$  помещаем в очередь  $Q$  (т. е. необходимо сравнивать на повторение каждую очередную порожденную  $n$ -последовательность веса  $2m-2$  с ранее помещенными в  $Q$   $n$ -последовательностями веса  $2m-2$ ).
- 3) Повторяем 2) до тех пор, пока это возможно. Процесс завершится, и в  $Q$  будут содержаться все графические  $n$ -последовательности.

Ясно, что если в Алгоритме 1 запретить порождение  $n$ -последовательностей с нулевыми компонентами, то такая специализация Алгоритма 1, которую мы будем называть **Алгоритмом 2**, будет порождать множество  $GPLzf(n)$  всех графических  $n$ -последовательностей без нулевых компонент.

sum		end	sum		end	sum	end
20	$\eta_1 = (4, 4, 4, 4, 4)$		18	$\eta_2 = (4, 4, 4, 3, 3)$ $\eta_1 > \eta_2$	$\eta_1$	16	$\eta_3 = (4, 4, 3, 3, 2)$ $\eta_2 > \eta_3$
	$\eta_4 = (4, 3, 3, 3, 3)$ $\eta_2 > \eta_4$	$\eta_2$	14	$\eta_5 = (4, 4, 2, 2, 2)$ $\eta_3 > \eta_5$			$\eta_6 = (4, 3, 3, 3, 1)$ $\eta_3 > \eta_6$
	$\eta_7 = (4, 3, 3, 2, 2)$ $\eta_3 > \eta_7$			$\eta_8 = (3, 3, 3, 3, 2)$ $\eta_3 > \eta_8$ $\eta_4 > \eta_8$	$\eta_3$ $\eta_4$	12	$\eta_9 = (4, 3, 2, 2, 1)$ $\eta_5 > \eta_9$
	$\eta_{10} = (3, 3, 2, 2, 2)$ $\eta_5 > \eta_{10}$ $\eta_7 > \eta_{10}$	$\eta_5$		$\eta_{11} = (3, 3, 3, 2, 1)$ $\eta_6 > \eta_{11}$ $\eta_7 > \eta_{11}$	$\eta_6$		$\eta_{12} = (4, 2, 2, 2, 2)$ $\eta_7 > \eta_{12}$
10	$\eta_{13} = (4, 2, 2, 1, 1)$ $\eta_9 > \eta_{13}$			$\eta_{14} = (3, 3, 2, 1, 1)$ $\eta_9 > \eta_{14}$			$\eta_{15} = (3, 2, 2, 2, 1)$ $\eta_9 > \eta_{15}$ $\eta_{12} > \eta_{15}$
	$\eta_{16} = (2, 2, 2, 2, 2)$ $\eta_{10} > \eta_{16}$	$\eta_{10}$ $\eta_{11}$ $\eta_{12}$	8	$\eta_{17} = (4, 1, 1, 1, 1)$ $\eta_{13} > \eta_{17}$			$\eta_{18} = (3, 2, 1, 1, 1)$ $\eta_{13} > \eta_{18}$
	$\eta_{19} = (2, 2, 2, 1, 1)$ $\eta_{14} > \eta_{19}$ $\eta_{15} > \eta_{19}$	$\eta_{14}$ $\eta_{15}$ $\eta_{16}$ $\eta_{17}$	6	$\eta_{20} = (2, 1, 1, 1, 1)$ $\eta_{18} > \eta_{20}$	$\eta_{18}$ $\eta_{19}$ $\eta_{20}$		

Рис. 10. Порождение множества  $GPLzf(5)$

Рис. 10 иллюстрирует работу Алгоритма 2 при порождении всех двадцати графических 5-последовательностей без нулевых компонент.

Работу Алгоритма 2 можно проиллюстрировать также и с помощью дерева порождения  $n$ -последовательностей с корнем  $(n - 1, n - 1, \dots, n - 1)$ . На Рис. 11 приведено такое дерево для  $n = 5$ . Отметим, что пунктирными линиями отмечены повторные порождения 5-последовательностей, а справа указаны веса 5-последовательностей.

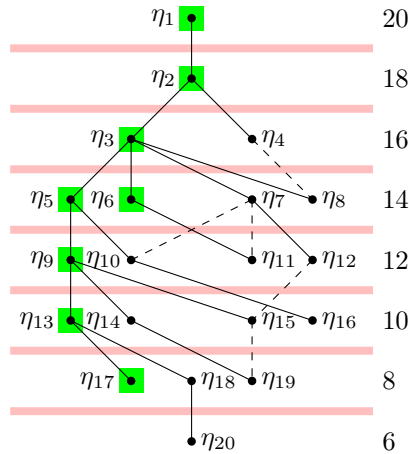


Рис. 11. Дерево порождения множества  $GPLzf(5)$

Рис. 12 иллюстрирует результат работы Алгоритма 1 для  $n = 5$  при порождении всех 31 графических 5-последовательностей, составляющих множество  $GPL(5)$ .

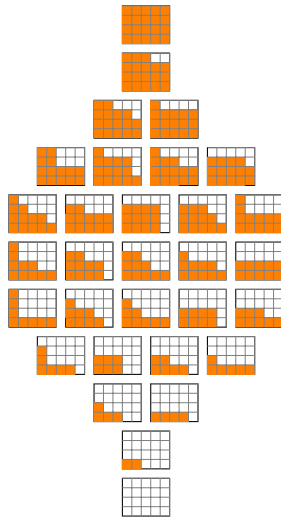


Рис. 12. Множество всех графических 5-последовательностей

Отметим, что Алгоритм 1 заведомо экспоненциален, поскольку

$$\frac{4^n}{C_1 n} \leq |GPL_n| \leq \frac{4^n}{(\log n)^{C_2} \sqrt{n}}$$

для некоторых констант  $C_1$  и  $C_2$  (см. работу [6]).

Отметим также, что основной результат данной работы — Алгоритм 1 — был анонсирован авторами в докладе на конференции [7], там же были анонсированы применения этого алгоритма для исследования множества всех графических последовательностей, развернутому изложению которых будут посвящены следующие работы авторов.

#### REFERENCES

- [1] V. Havel, *A remark on the existence of finite graphs*, Časopis Pěst. Mat., **1** (1955), 477–480. Zbl 0068.37202
- [2] P. Erdős, T. Gallai, *Graphs with vertices having prescribed degree*, Mat. Lapok, **11** (1960), 264–274.
- [3] S.L. Hakimi, *On the realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a simple graph*, J. SIAM Appl. Math., **10** (1962), 496–506. Zbl 0168.44705
- [4] G. Sierksma, H. Hoogeveen, *Seven criteria for integer sequences being graphic*, J. of Graph Th., **15**:2 (1991), 223–231. Zbl 0752.05052
- [5] A. Iványi, G. Gombos, L. Lucz, T. Matuszka, *Parallel enumeration of degree sequences of simple graphs II*, Acta Univ. Sapientiae, Informatica, **5**:2 (2013), 245–270. Zbl 1293.05368
- [6] J.M. Burns, *The number of degree sequences of graphs*, Ph. D. thesis, MIT. USA., 2007.
- [7] V.A. Baransky, T.I. Nadyмова, T.A. Senchonok, *The lattice of graphical partitions*, Groups and Graphs, Algorithms and Automata, Abstracts International Conference and PhD Summer School in honor of the 80<sup>th</sup> Birthday of Professor Vyacheslav A. Belonogov and of the 70<sup>th</sup> Birthday of Professor Vitaly A. Baransky, Yekaterinburg, August, 9–15 (2015), 15.

VITALY A. BARANSKY  
 URAL FEDERAL UNIVERSITY,  
 PR. LENINA, 51,  
 620083, EKATERINBURG, RUSSIA  
*E-mail address:* vitaly.baransky@urfu.ru

TATIANA I. NADYMOVA  
 N.N. KRASOVSKII INSTITUTE OF MATHEMATICS AND MECHANICS UB RAS,  
 ST. SOFIA KOVALEVSKAYA, 16,  
 620990, EKATERINBURG, RUSSIA,  
 URAL FEDERAL UNIVERSITY,  
 PR. LENINA, 51,  
 620083, EKATERINBURG, RUSSIA  
*E-mail address:* tnadyalive@gmail.com

TATIANA A. SENCHONOK  
 URAL FEDERAL UNIVERSITY,  
 PR. LENINA, 51,  
 620083, EKATERINBURG, RUSSIA  
*E-mail address:* tatiana.senchonok@urfu.ru