S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 280–285 (2016) УДК 510.64. 512.57
DOI 10.17377/semi.2016.13.022 MSC 08B05, 08A55

СЛАБЫЕ КОНЪЮНКЦИИ ТОЖДЕСТВ

М.С. ШЕРЕМЕТ

Abstract. We say that a weak conjunction of equalities of partial functions is true if all those equalities are true in a usual sence provided that all functions there are defined. We construct a full and correct system of inference rules for the logic of weak conjunctions of identities.

Keywords: partial algebras, weak identities.

1. Введение

Различные работы по эквациональным логикам частичных алгебр (см., например, [3], [2], [4]) имеют одну общую особенность — соответствующие логики получались двухуровневыми в том смысле, что для некоторых правил вывода сама проверка возможности их применения в каждом конкретном случае заключалась в поиске доказательства в некотором вспомогательном исчислении.

В настоящей работе мы рассматриваем некое расширение эквациональной логики для частичных алгебр, которое позволяет избавиться от описанной выше особенности. Формулы предлагаемого нами исчисления можно трактовать как нестандартные (ослабленные) конъюнкции слабых тождеств.

2. Синтаксис и семантика исчисления

Известно, что понятие равенства частичных функций может быть определено различными способами. Данная работа основывается на понятии слабого равенства, т. е. формальное равенство считается выполненным, если обе его части определены и равны, либо хотя бы одна из частей не определена.

Sheremet, M.S., Weak conjunctions of identities.

Поступила 9 ноября 2015 г., опубликована 15 апреля 2016 г.

Итак, пусть Ω — произвольная функциональная сигнатура без нульместных символов, X — счетное множество переменных, T — множество всех Ω-термов над X. Под алгеброй всегда будем понимать частичную Ω-алгебру.

Формулами нашей логики будут выражения вида $\bigwedge C$, где C — конечное множество равенств вида $(s \approx t)$, где $s, t \in T$. Отметим, что если C задано как $\{(u_i \approx v_i) \mid i \leqslant n\}$, то вместо $\bigwedge C$ мы можем писать $\bigwedge_{i \leqslant n}(u_i \approx v_i)$ или $(u_0 \approx v_0) \wedge \cdots \wedge (u_n \approx v_n)$, подразумевая, тем не менее, что перестановки и повторения среди пар (u_i, v_i) нам безразличны. А вместо $\bigwedge\{(u \approx v)\}$ можем писать просто $(u \approx v)$, если это не вызывает двусмысленности.

Для $t \in T$ пусть $\downarrow t$ обозначает множество всех подтермов t. Для $M \subseteq T$ положим $\downarrow M = \{\downarrow t \mid t \in M\}$. Для множества равенств $C = \{(u_i \approx v_i) \mid i \leqslant n\}$ пусть $\downarrow C$ обозначает $\downarrow\{u_0, v_0, \ldots, u_n, v_n\}$.

Будем говорить, что *формула* $\bigwedge_{i \leqslant n}(u_i \approx v_i)$ *выполняется* на алгебре $\mathcal{A}$ при означивании $\sigma : X \to A$, если из того, что значения $u_0^{\mathcal{A}}[\sigma]$, $v_0^{\mathcal{A}}[\sigma]$, $\ldots$, $u_n^{\mathcal{A}}[\sigma]$, $v_n^{\mathcal{A}}[\sigma]$ определены, следует, что $u_0^{\mathcal{A}}[\sigma] = v_0^{\mathcal{A}}[\sigma]$, $\ldots$, $u_n^{\mathcal{A}}[\sigma] = v_n^{\mathcal{A}}[\sigma]$. Обозначение: $\mathcal{A} \vDash \bigwedge_{i \leqslant n}(u_i \approx v_i)[\sigma]$.

Следует заметить, что вопрос о выполнимости формул такого вида возникает естественным образом при изучении структуры алгебр, определяемых соотношениями вида «термы $s_0, \ldots, s_n$ определены» (подробнее об алгебрах такого вида говорится в начале следующего параграфа).

Будем говорить, что *формула* $\bigwedge_{i \leqslant n}(u_i \approx v_i)$ *истинна* на алгебре $\mathcal{A}$, если она выполняется на $\mathcal{A}$ при любом означивании $\sigma : X \to A$. Обозначение: $\mathcal{A} \vDash \bigwedge_{i \leqslant n}(u_i \approx v_i)$.

Естественно, что выполнимость или истинность отдельных равенств, т. е. $\mathcal{A} \vDash (s \approx t)[\sigma]$ или $\mathcal{A} \vDash (s \approx t)$, понимается как $\mathcal{A} \vDash \bigwedge\{(s \approx t)\}[\sigma]$ или $\mathcal{A} \vDash \bigwedge\{(s \approx t)\}$, соответственно. Таким образом, мы получаем слабые равенства и слабые тождества.

Отметим, что согласно нашим определениям, истинность формул $\bigwedge C$ и $\bigwedge D$ влечет истинность формулы $\bigwedge C \wedge \bigwedge D$ но обратное, вообще говоря, неверно. В этом смысле формула вида $\bigwedge_{i \leqslant n}(u_i \approx v_i)$ является нестандартной конъюнкцией равенств $(u_i \approx v_i)$, $i \leqslant n$.

Рассмотрим следующие правила вывода.

(Sy)	$\dfrac{\bigwedge C \wedge (u \approx v)}{\bigwedge C \wedge (v \approx u)}$	симметричность
(Tr)	$\dfrac{\bigwedge C \wedge (u \approx v) \wedge (v \approx w)}{\bigwedge C \wedge (u \approx v) \wedge (v \approx w) \wedge (u \approx w)}$,	транзитивность
(Rp)	$\dfrac{\bigwedge C \wedge (u \approx v)}{\bigwedge C \wedge (t(u) \approx t(v))}$, где $t(x) \in T$	замена
(Sb)	$\dfrac{\bigwedge_{i \leqslant n}(u_i \approx v_i)}{\bigwedge_{i \leqslant n}(u_i[\sigma] \approx v_i[\sigma])}$, где $\sigma : X \to T$	подстановка
(Jn)	$\dfrac{\bigwedge C,\ \bigwedge D}{\bigwedge (C \cup D)}$	объединение
(E0)	$\dfrac{\bigwedge C \wedge (u \approx v)}{\bigwedge C}$, где $u, v \in \downarrow C \cup X$	простое удаление

$$\text{(E1)}\quad \frac{(u \approx v),\ \bigwedge C \wedge (t(u) \approx t(v))}{\bigwedge C},\ \text{где } t(u), v \in {\downarrow}C \cup X \quad \begin{matrix}\text{условное}\\ \text{удаление}\end{matrix}$$

Пусть (IWI) обозначает семи правил (Sy)–(E1) выше.

Пусть φ — формула, а Φ — множество формул. Говорим, что φ *следует из* Φ, и пишем $\Phi \vDash \varphi$, если $\mathcal{A} \vDash \Phi$ влечет $\mathcal{A} \vDash \varphi$ для любой алгебры $\mathcal{A}$. Говорим, что φ *выводится из* Φ, если существует *вывод* φ *из* Φ, т. е. последовательность формул $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ такая, что $\varphi_n = \varphi$ и каждая φ_k либо принадлежит Φ, либо получается из $\varphi_0, \ldots, \varphi_{k-1}$ по одному из правил (IWI).

Формула φ называется *строгой*, если она не содержит вхождений равенств вида $(t \approx t)$. Вывод называется *строгим*, если все входящие в него формулы строгие. Пишем $\Phi \vdash \varphi$, если φ имеет строгий вывод из Φ.

Мы исключаем из рассмотрения равенства вида $(t \approx t)$, поскольку в противном случае в нашем исчислении легко интерпретируются произвольные импликации вида «если термы $s_0, \ldots, s_n$ определены, то s_0 и s_1 равны». А выразительная сила логики таких импликаций намного сильнее таковой для логики слабых тождеств, от которой мы не хотим отклоняться сильно.

3. Алгебры, определенные соотношениями

Пусть E — множество равенств, а $\mathbf{W}$ — слабое многообразие с базисом E, т. е. $\mathbf{W}$ — это класс всех алгебр, на которых истинны все равенства из E. Важным инструментом для изучения алгебр из $\mathbf{W}$ являются определяющие соотношения.

Говорим, что алгебра $\mathcal{A}$ задана в $\mathbf{K}$ соотношениями «термы $t_0, \ldots, t_n$ определены», если $\mathcal{A} \in \mathbf{K}$ и существует означивание $\sigma : X \to A$ со следующими свойствами:

1) значения $t_0^{\mathcal{A}}[\sigma], \ldots, t_n^{\mathcal{A}}[\sigma]$ определены;

2) если для некоторых $\mathcal{B} \in \mathbf{W}$ и $\tau : X \to B$ значения $t_0^{\mathcal{B}}[\sigma], \ldots, t_n^{\mathcal{B}}[\sigma]$ определены, то $\tau = \varphi \circ \sigma$ для некоторого гомоморфизма $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

Эти условия определяют алгебру $\mathcal{A}$ с точностью до изоморфизма. Опишем ее строение с помощью конструкции на термах. Рассмотрим некоторое множество термов M и пусть $E^\star$ обозначает замыкание множества строгих равенств из E относительно правил симметрии, замены и подстановки. Определим понятие E-M-базы терма t индукцией по сложности t:

$\varnothing$ является E-M-базой t тогда и только тогда, когда $t \in {\downarrow}M$;

если H_0 и H_1 являются E-M-базами $r(p)$ и q для некоторых $r(x) \in T \setminus X$ и $(p \approx q) \in E^\star$, тогда $H_0 \cup H_1 \cup \{(r(p) \approx r(q))\}$ является E-M-базой $r(q)$.

Таким образом, E-M-база какого-либо терма — это конечное подмножество $E^\star$. При этом некоторые термы могут не иметь никакой E-M-базы, а некоторые — иметь несколько таковых. Более точно, если H является E-M-базой терма t, то индукцией по построению H можно установить следующее: если равенства H истинны на некоторой алгебре $\mathcal{A}$, а значения $u^{\mathcal{A}}[\sigma]$ $(u \in M)$ определены для некоторого означивания $\sigma : X \to A$, то значение $t^{\mathcal{A}}[\sigma]$ также определено.

Кроме того, из построения следует, что если H является E-M-базой какого-либо терма и $(s \approx t) \in H$, то найдется $G \subseteq H$ такой, что $G \cup \{(s \approx t)\}$ является E-M-базой терма t.

Пусть M^E (M_k^E) обозначает множество всех термов, имеющих E-M-базу (соответственно, не более чем из k равенств, $k < \omega$). Тогда $M_0^E = {\downarrow}M$, все M_k^E и M^E замкнуты относительно подтермов и $M_0^E \subseteq M_1^E \subseteq M_2^E \subseteq \dots$. Рассмотрим (обычную) алгебру $\mathcal{T}$ всех термов из T; она индуцирует на M^E некоторую алгебру $\mathcal{M}^E$ (которая будет частичной, если $M^E \neq T$). Определим на $\mathcal{M}^E$ следующие отношения:

$$(1) \qquad \eta = \big\{(p,q) \in (M^E)^2 \mid (p \approx q) \in E^\star\big\}, \quad \theta \text{ — транзитивное замыкание } \eta.$$

Тогда для любых $(a,b) \in \eta$ и терма $t(x)$ имеем следующую эквивалентность:

$$(2) \qquad t(a) \in M^E \iff t(b) \in M^E \iff (t(a), t(b)) \in \eta.$$

Действительно, если, например, $t(a) \in M$, а H_0 и H_1 — E-M-базы термов $t(a)$ и b, то $H_0 \cup H_1 \cup \{(t(a) \approx t(b))\}$ — E-M-база терма $t(b)$.

Далее, свойство (2) сохраняется при транзитивном замыкании, следовательно для любых $(a_0,b_0),\dots,(a_n,b_n) \in \theta$ и $t(x_0,\dots,x_n) \in T$ имеем:

$$(3) \qquad t(\overline{a}) \in M^E \iff t(\overline{b}) \in M^E \iff (t(\overline{a}), t(\overline{b})) \in \theta$$

(здесь $\overline{c}$ обозначает набор вида $(c_0, c_1, \dots)$). Поэтому на фактор-множестве $F = M^E/\theta$ корректно определяется фактор-алгебра $\mathcal{F} = \mathcal{M}^E/\theta$, причем естественный гомоморфизм из $\mathcal{M}^E$ на $\mathcal{F}$ является замкнутым, т. е. для любых $a_0,\dots,a_n, b \in M^E$ и $t(x_0,\dots,x_n) \in T$ имеем:

$$(4) \qquad \begin{gathered} \text{значение } t^{\mathcal{F}}(a_0/\theta,\dots,a_n/\theta) \text{ определено и равно } b/\theta \\ \text{тогда и только тогда, когда } (t(a_0,\dots,a_n), b) \in \theta. \end{gathered}$$

Для ссылок в дальнейшем алгебру $\mathcal{F}$, а также отношения η и θ из (1), будем обозначать $\mathcal{F}_E(M)$, η_{EM} и θ_{EM}, соответственно.

Пусть, как выше, $\mathbf{W}$ — слабое многообразие с базисом E. Из построения следует, что алгебра $\mathcal{F}_E(M)$ определяется в $\mathbf{W}$ соотношениями “термы из M определены”. Доказательство этого факта стандартно и мы воспользуемся ссылкой на построение в [3, стр. 334–336], где множество термов $D_{pq}^E = \bigcup_{n<\omega} D_n$ и конгруэнция F_{pq} строятся по тем самым принципам, которые нами использовались для $M^E = \bigcup_{n<\omega} M_n^E$ и θ_{EM}.

Таким образом, мы получаем, что истинность формулы $\bigwedge C$ на $\mathbf{W}$ равносильна выполнимости множества равенств C на алгебре $\mathcal{F}_E(M)$, где $M = {\downarrow}C$, при естественном означивании $x \mapsto x/\theta_{EM}$, которое заведомо доставляет значения всем термам из C.

4. Основной результат

Прежде чем переходить к основной теореме, установим следующее свойство.

Предложение 1. *Пусть для некоторого множества равенств $\{(u \approx v)\} \cup C \cup E$ имеет место $E \vdash \bigwedge C \wedge (u \approx v)$, причем $u, v \in ({\downarrow}C)^E$. Тогда $E \vdash \bigwedge C$.*

Доказательство. Пусть M обозначает ${\downarrow}C$. Тогда $u, v \in M_k^E$ для некоторого k. Доказательство будем вести индукцией по наименьшему такому k.

Если u и v принадлежат M_0^E, т. е. ${\downarrow}C$, то заключение леммы получается сразу по правилу (E0).

Для обоснования индукционного шага и, следовательно, завершения доказательства предложения 1, достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть в условиях предложения 1 имеем* $u, v \in M^E_{k+1}$ *для некоторого* $k < \omega$. *Тогда существуют* $p_0, \dots, p_m, q_0, \dots, q_m \in M^E_k$ *такие, что* $E \vdash \bigwedge C \wedge \bigwedge_{j \leqslant m}(p_j \approx q_j)$.

Предположим сначала, что $u, v \notin M^E_0$. Тогда для u v найдутся непустые E-M-базы U и V мощности не более $k+1$. Следовательно,

$$U = U_0 \cup U_1 \cup \{r(p) \approx r(p')\} \quad \text{и} \quad V = V_0 \cup V_1 \cup \{s(q) \approx s(q')\},$$

где $(p \approx p')$, $(q \approx q') \in E^\star$, а U_0, U_1, V_0 и V_1 являются E-M-базами термов $r(p)$, p', $s(q)$ и q', соответственно; кроме того, $r(p') = u$ и $s(q') = v$. Далее, имеем:

$$\begin{aligned}
E &\vdash \bigwedge C \wedge (u \approx v) \wedge \bigwedge U \wedge \bigwedge V, \quad \text{поскольку } U \cup V \subseteq E^\star, \text{ откуда}\\
E &\vdash \bigwedge C \wedge \bigwedge U \wedge \bigwedge V, \quad \text{в силу правила (E0), следовательно}\\
E &\vdash \bigwedge C \wedge \bigwedge U_0 \wedge \bigwedge U_1 \wedge \bigwedge V_0 \wedge \bigwedge V_1, \quad \text{в силу правила (E1).}
\end{aligned}$$

При этом любой из термов, встречающихся в $U_0 \cup U_1 \cup V_0 \cup V_1$ имеет E-M-базу мощности не больше k, поскольку таковая может быть выбрана как собственное подмножество U или V.

Предположим теперь, что один из $\{u, v\}$ принадлежит M^E_0; для определенности, пусть $v \in M^E_0$. Тогда нетрудно проверить, что все выводы выше сохранятся, если в них удалить $\bigwedge V$, $\bigwedge V_0$ и $\bigwedge V_1$. □

Теорема 1. *Пусть* E *— множество равенств, а* φ *— строгая формула. Тогда* $E \vDash \varphi$ *равносильно тому, что* $E \vdash \varphi$.

Доказательство. Проверка импликации справа налево заключается в проверке корректности всех правил из (IWI). Продемонстрируем доказательство корректности только для (E1), поскольку для остальных правил это делается заметно проще и очевиднее.

Итак, пусть $\mathcal{A}$ — алгебра, в которой истинны формулы из посылки (E1), т. е. $\mathcal{A} \vDash (u \approx v)$, $\mathcal{A} \vDash \bigwedge C \wedge (t(u) \approx t(v))$, где $t(u)$, $v \in \downarrow C \cup X$; докажем, что $\mathcal{A} \vDash \bigwedge C$. Для этого предположим, что при некотором означивании $\sigma : X \to A$ в $\mathcal{A}$ определены значения всех термов из C. Поскольку $t(u)$, $v \in \downarrow C \cup X$, получаем, что $(t(u))^{\mathcal{A}}[\sigma]$ и $v^{\mathcal{A}}[\sigma]$ также определены, т. е. функция $t^{\mathcal{A}}(x)$ определена на аргументе $u^{\mathcal{A}}[\sigma]$. А поскольку $\mathcal{A} \vDash (u \approx v)$, имеем $u^{\mathcal{A}}[\sigma] = v^{\mathcal{A}}[\sigma]$. Следовательно, $(t(v))^{\mathcal{A}}[\sigma]$ определено и равно $(t(u))^{\mathcal{A}}[\sigma]$. Наконец, поскольку $\mathcal{A} \vDash \bigwedge C \wedge (t(u) \approx t(v))$, получаем, что все необходимые равенства из C выполняются; что и требовалось.

Проверим теперь импликацию слева направо. Предположим, что некоторая строгая формула $\bigwedge_{i \leqslant n}(u_i \approx v_i)$ истинна на всех алгебрах $\mathcal{A}$ со свойством $\mathcal{A} \vDash E$. Тогда, в частности, эта формула выполняется на алгебре $\mathcal{F}_E(M)$, где $M = \{u_0, v_0, \dots, u_n, v_n\}$, при естественном означивании $x \mapsto x/\theta_{EM}$. Следовательно, $(u_0, v_0), \dots, (u_n, v_n) \in \theta_{EM}$ согласно (4). Рассмотрим произвольное $i \leqslant n$. Согласно построению θ_{EM} включение $(u_i, v_i) \in \theta_{EM}$ означает, что в $E^\star$ найдется цепочка нетривиальных равенств $u_{i0} \approx u_{i1} \approx \dots \approx u_{ik}$, в которой $u_i = u_{i0}$ и $v_i = u_{ik}$. Пусть D_i обозначает $\{(u_{ij} \approx u_{ij+1}) \mid j < k\}$. Тогда формула $(u_i \approx v_i) \wedge \bigwedge D_i$ является строгой, $E \vdash \bigwedge D_i$ ввиду $D_i \subseteq E^\star$, и, следовательно, $E \vdash (u_i \approx v_i) \wedge \bigwedge D_i$ в силу правила (Tr).

Пусть теперь $C = \{(u_i \approx v_i) \mid i < n\}$ и $D = D_0 \cup \dots \cup D_n$. Тогда формула $\bigwedge C \wedge \bigwedge D$ является строгой, $E \vdash \bigwedge C \wedge \bigwedge D$ ввиду правила (Jn) и доказанного выше, и все входящие в D термы принадлежат $(\downarrow C)^E$. Таким образом, для завершения доказательства остается сослаться на предложение 1. $\square$

В заключение, автор выражает благодарность рецензенту за указания, способствовавшие улучшению изложения.

References

[1] V.A. Gorbunov, M.S. Sheremet, *Horn classes of predicate systems and varieties of partial algebras*, Algebra and Logic, **39**:1 (2000), 12–25. Zbl 0953.08003

[2] A. Robinson, *Equational Logic of Partial Functions Under Kleene Equality: A Complete and an Incomplete Set of Rules*, The Journal of Symbolic Logic, **54**:2 (1989), 354–362. Zbl 0701.03013

[3] L. Rudak, *A completeness theorem for weak equational logic*, Algebra Universalis, **16**:1 (1983), 331–337. Zbl 0519.08006

[4] M.S. Sheremet, *Completeness theorem for the Evans logic of identities*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **1** (2004), 24–34. [Russian, English abstract] Zbl 1079.08007

Mikhail Sergeevich Sheremet
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: sheremet@math.nsc.ru

Siberian Institute of Management RANEPA,
ul. Nizhegorodskaya, 6,
630102, Novosibirsk, Russia
E-mail address: sheremetms@yandex.ru