S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 300–304 (2016) УДК 550.344
DOI 10.17377/semi.2016.12.024 MSC 35Q99

ОБ ОСОБЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ SH ВОЛН В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

ХОЛМУРОДОВ А.Э., ТОШМУРОДОВА Г.

Abstract. Singular solutions of the IS equation for SH waves in an elasticporous medium are obtained. For expansion coefficients of wave fields a system of Volterra integral equations of the second kind are obtained. It is shwn that at vanishing of proposity these coefficients are transformed into well known expressions for the coefficients of expansion of wave fields for an elastic model.

Keywords: hyperbolic system, the porous medium, SH waves, the friction coefficient.

1. Введение

В прикладных задачах распространение упругих волн часто возникает потребность учесть пористость, флюидонасыщенность среды и гидродинамический фон. В частности, эти вопросы возникают в разведочной геофизике при поиске нефтяных слоев и при выборе параметров волнового воздействия на месторождения нефти и газа с целью интенсификации добычи. Аналогичные вопросы имеются в сейсмологии при геофизическом мониторинге свойств очаговой зоны с целью прогноза землетрясений [1]. Реальные средства являются пористыми, трещиноватыми и поглощающими (в системе происходит потеря энергии).

Kholmurodov, A.E., Toshmurodova, G., Singular solutions of one-dimensional SH wave equation in porous media.

Работа поддержана грантом Комитета по координации развития науки и технологий при Кабинете Министров Республики Узбекистан (номер гранта А-13-18).

Поступила 28 марта 2016 г., опубликована 4 мая 2016 г.

В [2, 3] исследованы сингулярности решения уравнений гиперболического типа. В данной работе, используя идеи [2, 3], исследуются сингулярности решения одномерного уравнения SH волн для насыщенных жидкостью пористых сред при потери энергии за счёт межкомпонентного трения.

2. Постановка задачи

Уравнения движения распространения сейсмических SH волн в среде с поглощением имеет вид [4, 5, 6]

$$\rho_s(z)U_{tt} = (\mu(z)U_z)_z - \chi(z)\rho_l^2(z)(U_t - V_t), \tag{1}$$

$$\rho_l(z)V_{tt} = \chi(z)\rho_l^2(z)(U_t - V_t), \tag{2}$$

Здесь U и V — компоненты вектора смещений частиц упругого пористого тела и жидкости с парциальным плотностями $\rho_s(z)$ и $\rho_l(z)$ соответственно, $\chi(z)$ — коэффициент трения.

Пусть система (1), (2) справедлива при $z > 0$. Предположим, что пористая среда покоится при $t < 0$:

$$U|_{t=0} = U_t|_{t=0} = 0, \tag{3}$$

$$V|_{t=0} = V_t|_{t=0} = 0, \tag{4}$$

Пусть на границе $z = 0$ приложена сила [7]:

$$\mu U_z|_{z=0} = F(t), \tag{5}$$

Требуется по этой информации и заданным функциям — дважды непрерывно дифференцируемым $\rho_s(z)$ и $\mu(z)$ и непрерывным $\rho_l(z)$, $\chi(z)$ — определить волновое поля $U(t, z)$,$V(t, z)$.

3. Алгоритм решения

Решение задачи (1)-(5) ищем, следуя [3], в виде

$$U(t,z) = \alpha^s(z)\varepsilon(t-\tau(z)) + \beta^s(z)(t-\tau(z))_+ + \frac{1}{2}\gamma^s(z)(t-\tau(z))_+^2 + \ldots, \tag{6}$$

$$V(t,z) = \alpha^t(z)\varepsilon(t-\tau(z)) + \beta^l(z)(t-\tau(z))_+ + \frac{1}{2}\gamma^l(z)(t-\tau(z))_+^2 + \ldots\ . \tag{7}$$

В (6) и (7) $\varepsilon(t)$ — функция Хевисайда, многоточием обозначено более гладкое при $t = \tau(\,z)\ldots$, по сравнению с выписанным, слагаемое

$$x_+^n = \begin{cases} x^n, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Найдем коэффициенты $\alpha^s(z)$, $\alpha^l(z)$, $\beta^s(z)$, $\beta^l(z)$, $\gamma^s(z)$, $\gamma^l(z)$. Подставляя разложения (6), (7) в систему (1), (2), получим

$$\begin{gathered}
p_s(z)\alpha^s(z)\delta'(t-\tau)+p_s(z)\beta^s(z)\delta(t-\tau)+p_s(z)\gamma^s(z)\varepsilon(t-\tau)+\dots \\
=\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu(\alpha^s)_z\varepsilon(t-\tau)-\mu\alpha^s\tau'_z\delta(t-\tau)-\mu\beta^s\tau'_z\varepsilon(t-\tau)+\mu(\beta^s)_z(t-\tau)_+\right. \\
\left.-\mu\gamma^s\tau'_z(t-\tau)_+ + \dots\right)-\chi(z)p_l^2(z)\big((\alpha^s(z)-\alpha^l(z))\delta(t-\tau)+(\beta^s(z) \\
-\beta^l(z))\varepsilon(t-\tau)+(\gamma^s(z)-\gamma^l(z))(t-\tau)_+ +\dots\big)=\mu\alpha^s(\tau'_z)^2\delta'(t-\tau) \\
-(\mu\alpha^s\tau'_z)'_z\delta(t-\tau)-\mu(\alpha^s)'_z\tau'_z\delta(t-\tau)+\mu\beta^s(\tau'_z)^2\delta(t-\tau) \\
+\left(\mu(\alpha^s)'_z\right)'_z\varepsilon(t-\tau)-(\mu\beta^s\tau'_z)'_z\varepsilon(t-\tau)-\mu(\beta^s)'_z\tau'_z\varepsilon(t-\tau) \\
+\mu\gamma^s(\tau'_z)^2\varepsilon(t-\tau)-\mu\gamma^s(\tau'_z)^2\varepsilon(t-\tau)-\chi(z)p_l^2(z)\left(\alpha^s(z)-\alpha^l(z)\right)\delta(t-\tau) \\
-\chi(z)p_l^2(z)\left(\beta^s(z)-\beta^l(z)\right)\varepsilon(t-\tau)-\chi(z)p_l^2(z)\left(\gamma^s(z)-\gamma^l(z)\right)(t-\tau)_+ +\dots,
\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}
\alpha^l(z)\delta(t-\tau)+\beta^l(z)\delta(t-\tau)+\gamma^l(z)\delta(t-\tau)_+ +\dots \\
=\chi(z)p_l(z)\left(\alpha^s(z)-\alpha^l(z)\right)\varepsilon(t-\tau) \\
+\chi(z)p_l(z)\left(\beta^s(z)-\beta^l(z)\right)(t-\tau)_+ \\
+\tfrac{\gamma^s(z)-\gamma^l(z)}{2}\chi(z)p_l(z)(t-\tau)_+^2+\dots.
\end{gathered} \tag{9}$$

При выводе этих равенств мы воспользовались свойством функции Дирака [8]:

$$\delta\,(t)\,=\varepsilon'(t).$$

Приравнивая коэффициенты при $\delta'(t-\tau)$ в (8), находим что функция $\tau(z)$ удовлетворяет уравнению эйконала

$$(\tau'_z)=\frac{\rho_s}{\mu},$$

откуда

$$\tau(z)=\int_0^z\frac{d\xi}{c_t(\xi)},$$

где $c_t(z)=\sqrt{\frac{\mu(z)}{\rho_s(z)}}$ есть скорость распространения поперечных сейсмических волн в пористой среде.

Приравнивание коэффициентов при $\delta\,(t-\tau)$ в (8) и (9) дает

$$(\mu\alpha^s\tau'_z)'_z+\mu(\alpha^s)'_z\tau'_z+\chi(z)\rho_l^2(z)\alpha^s(z)=0,$$

$$\alpha^l(z)=0.$$

Отсюда, с учетом найденного значения функции $\tau(z)$, получим

$$(\sigma\alpha^s)'_z+\sigma(\alpha^s)'_z+\chi(z)\rho_l^2(z)\alpha^s(z)=0. \tag{10}$$

Здесь $\sigma(z)=\sqrt{\mu(z)\rho_s(z)}$.

В эквивалентном виде уравнения (10) имеет вид

$$2\sqrt{\sigma}\left(\sqrt{\sigma}\alpha^s\right)'_z+\chi(z)\rho_l^2(z)\alpha^s(z)=0,$$

откуда

$$\sqrt{\sigma(z)}\alpha^s(z)=const-\frac{1}{2}\int_0^z\frac{\chi(x)\rho_l^2(x)\alpha^s(x)}{\sqrt{\sigma(x)}}dx,$$

или

$$\alpha^s(z)=\frac{const}{\sqrt{\sigma(z)}}-\frac{1}{2\sqrt{\sigma(z)}}\int_0^z\frac{\chi(x)\rho_l^2(x)\alpha^s(x)}{\sqrt{\sigma(x)}}dx. \tag{11}$$

Используя граничное условие (5) и разложение функции F(t) |3|

$$F(t)=\delta(t)+f(0)\varepsilon(t)+\dots,$$

получим формулу для определения постоянной интегрирования

$$const = -\frac{1}{\sqrt{\sigma(0)}}.$$

Поставляя это значение в (11), получим

$$\alpha^s(z) = -\frac{1}{\sqrt{\sigma(0)\sigma(z)}} - \frac{1}{2\sqrt{\sigma(z)}} \int_0^z \frac{\chi(x)\rho_l^2(x)\alpha^s(x)}{\sqrt{\sigma(x)}} dx. \qquad (12)$$

Наконец, приравняв коэффициенты при $\varepsilon(t-\tau)$ в (8), (9), находим

$$(\mu(\alpha^s)'_z)'_z - (\mu\beta^s\tau'_z)'_z - \mu(\beta^s)'_z\tau'_z - \chi(z)\rho_l^2(z)(\beta^s(z) - \beta^l(z)) = 0,$$

$$\beta^l(z) = \chi(z)\rho_l(z)\alpha^s(z),$$

или

$$2\sqrt{\sigma}\left(\sqrt{\sigma}\beta^s\right)'_z = (\mu(\alpha^s)'_z)'_z - \chi(z)\rho_l^2(z)(\beta^s(z) - \beta^l(z)),$$

откуда

$$\sqrt{\sigma(z)}\beta^s(z) = const - \tfrac{1}{2}\int_0^z \tfrac{\chi(x)\rho_l^2(x)\beta^s(x)}{\sqrt{\sigma(x)}} dx + \tfrac{1}{2}\int_0^z \tfrac{\chi(x)\rho_l^2(x)\alpha^s(x)}{\sqrt{\sigma(x)}} dx$$
$$+\tfrac{1}{2}\int_0^z \tfrac{1}{\sqrt{\sigma(x)}}\left(\mu(x)(\alpha^s(x))'_x\right)'_x dx$$

Деля обе части этого равенства на $\sqrt{\sigma(z)}$, получим

$$\beta^s(z) = -\tfrac{const1}{\sqrt{\sigma(z)}} - \tfrac{1}{2\sqrt{\sigma(z)}}\int_0^z \tfrac{\chi(x)\rho_l^2(x)\beta^s(x)}{\sqrt{\sigma(x)}} dx + \tfrac{1}{2\sqrt{\sigma(z)}}\int_0^z \tfrac{\chi^2(x)\rho_l^3(x)\alpha^s(x)}{\sqrt{\sigma(x)}} dx$$
$$+\tfrac{1}{2\sqrt{\sigma(z)}}\int_0^z \tfrac{1}{\sqrt{\sigma(x)}}\left(\mu(x)(\alpha^s(x))'_x\right)'_x dx = \tfrac{1}{2\sqrt{\sigma(z)}}\int_0^z \left[\left(\tfrac{1}{\sqrt{\sigma(x)}}\right)'_x \mu(x)\right] dx$$
$$-\tfrac{1}{2\sqrt{\sigma(z)}}\int_0^z \tfrac{\chi(x)\rho_l^2(x)\beta^s(x)}{\sqrt{\sigma(x)}} dx + \tfrac{1}{2\sqrt{\sigma(z)}}\int_0^z \tfrac{\chi^2(x)\rho_l^3(x)\alpha^s(x)}{\sqrt{\sigma(x)}} dx$$
$$-\left(\tfrac{1}{\sqrt{\sigma(z)}}\right)'_z \tfrac{\mu(z)}{2\sigma(z)\sqrt{\sigma(0)}} - \tfrac{1}{\sqrt{\sigma(z)\sigma(0)}}\left(\tfrac{\sigma'(0)}{\rho_s(0)} - f(0)\right). \qquad (13)$$

При выводе этой формулы мы воспользовались формулой интегрирования по частям и граничным условием (5). Можно получить сколько угодно членов разложения волновых полей $U(t,z)$ и $V(t,z)$, точнее, столько, сколько допускает гладкость коэффициента $\sigma(z)$.

Соотношения (12), (13) при заданных $\rho_s(z)$, $\mu(z)$, $\rho_l(z)$, $\chi(z)$ представляет собой относительно $\alpha^s(z)$, $\beta^s(z)$ систему вольтерровых интегральных уравнений второго рода. Как известно, такая система всегда разрешима. Зная функцию $\alpha^s(z)$, по явной формуле находим функцию $\beta^l(z) = \chi(z)\rho_l(z)\alpha^s(z)$.

В частном случае, когда $\sigma(z) = 1$, выражения для $\alpha^s(z)$, $\beta^s(z)$ существенно упростятся

$$U|_{t=\tau(z)+0} = -1 - \frac{1}{2}\int_0^z \chi(x)\rho_l^2(x)U|_{t=\tau(x)+0} dx,$$

$$U|_{t=\tau(z)+0} = -\frac{1}{2}\int_0^z \chi(x)\rho_l^2(x)U_t|_{t=\tau(x)+0} dx + \frac{1}{2}\int_0^z \chi^2(x)\rho_l^3(x)U|_{t=\tau(x)+0} dx + f(0).$$

При исчезновении пористости парциальные плотности ρ_s и ρ_l стремится к ρ_s^f и 0 соответственно [4,5,9]. Здесь ρ_s^f — плотность упругой среды. Поэтому, устремляя пористость к нулю, в (12), (13) получим известные формулы, приведенные в [3] для коэффициентов разложения волнового поля для упругой среды.

Таким образом, получили сингулярные решение для одномерного уравнения SH волн в пористой среде с учетом потери энергии на межкомпонентное трение.

References

[1] A.S. Alekseev, Kh.Kh.Imomnazarov, E. Grachev E., T.T. Rakhmonov, B.Kh. Imomnazarov, *Direct and inverse dynamic problems for a system of equations of homogeneous elastic-porous media*, Proceedings of the International Conference «Mathematical Methods in Geophysics», ch.1., Novosibirsk: ICMMG Russian Academy of Sciences, (2003), 99–106.

[2] V.G. Romanov, *Inverse problems of mathematical physics.* M.: Nauka, 1984. Zbl 0576.35001

[3] M.I. Belishevyaev, A.S. Blagoveshinskiy, *Dynamical inverse problem of the theory of waves*, St. Petersburg: Publishing House of St.-Petersburg University, 1999.

[4] V.N. Darovskiy, J.V.Perepechko , E.E. Romenskiy, *EI Wave processes in saturated porous elastically deformable environments*, SCF, **1** (1993), 100–111.

[5] A.M. Blokhin, V.N.Dorovsky, *Mathematical modeling in the theory of multi velocity continuum, nova science publishers*, Inc, placeState New York, 1995, 192–194.

[6] Kh.Kh. Imomnazarov, *Estimates of conditional stability of some combined inverse problems for Maxwell's equations and equations of porous media*, Comp. Appl. Math., **20** (2001), 20–34. Zbl 1123.35354 20-34.

[7] Kh.Kh. Imomnazarov *Numerical modeling of some problems in filtration theory for porous media*, Sib. Bench, **4**:2 (2001), 154–165. Zbl 1004.76086

[8] V.S. Vladimirov, *Generalized functions in mathematical physics*, M.: Nauka, 1979. Zbl 0515.46033

[9] Kh.Kh. Imomnazarov, *A few notes about the system Bio*, Reports of the Academy of Sciences of equations, **373**:4 (2000), 536–537. Zbl 1056.86512

Abdulkhamid Erkinovich Kholmurodov
Karshi State University,
Karshi city, street Kuchabag-17,
180100, Republic of Uzbekistan, Kashkadarya region
E-mail address: abishx@mail.ru

Gulmira Toshmurodova
Karshi State University,
Karshi city, street Kuchabag-17,
180100, Republic of Uzbekistan, Kashkadarya region
E-mail address: gultosh@mail.ru