S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 318-330 (2016) УДК 519.175

DOI 10.17377/semi.2016.13.026 MSC 05C30

О ПЕРЕЧИСЛЕНИИ ЧАСТИЧНЫХ ПОРЯДКОВ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА КОНЕЧНОМ МНОЖЕСТВЕ

В.И. РОДИОНОВ

Abstract. If $T_0(n)$ is the number of partial orders (labeled T_0-topologies) defined on a finite set of n elements then the formula hold

$$T_0(n) = \sum_{p_1+\ldots+p_k=n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{p_1!\ldots p_k!} W(p_1,\ldots,p_k),$$

where the summation is over all ordered sets $(p_1,\ldots,p_k)$ of positive integers such that $p_1+\ldots+p_k=n$. The number $W(p_1,\ldots,p_k)$ is the number of partial orders of a special form. If D_k is the dihedral group of order $2k$ then $W(p_{\pi(1)},\ldots,p_{\pi(k)}) = W(p_1,\ldots,p_k)$ for all $\pi\in D_k$. We studied the complemented partial orders.

Keywords: graph enumeration, poset, finite topology.

1. Введение

Всякое бинарное отношение $\sigma\subseteq X^2$ (где X — произвольное множество) порождает характеристическую функцию $\sigma' : X^2\to\{0,1\}$ (если $(x,y)\in\sigma$, то $\sigma'(x,y)=1$, иначе $\sigma'(x,y)=0$), и это отображение биективно (так как всякая характеристическая функция восстанавливает исходное отношение). В силу этого обстоятельства мы называем подмножества $\sigma\subseteq X^2$ как отношениями, так и функциями (иногда орграфами). В случае $\operatorname{card} X<\infty$ характеристическую функцию можно интерпретировать как бинарную матрицу (матрицу, состоящую из 0 и 1). В работе применяется функциональное представление, позволяющее получать содержательные результаты в наиболее общей форме (см., например, [1, 2, 3]). Через $\mathcal{V}_0(X)$ обозначим совокупность всех частичных порядков, определенных на множестве X. В терминах характеристических функций справедливо утверждение: $\sigma\in\mathcal{V}_0(X)$ *тогда и только тогда, когда*

Rodionov, V.I., On enumeration of posets defined on finite set.

Поступила 15 апреля 2016 г., опубликована 10 мая 2016 г.

$$
\begin{gathered}
\sigma(x,x)=1 \ \textit{для всех}\ x\in X,\\
\sigma(x,y)\,\sigma(y,z)\leqslant\sigma(x,z)\ \textit{для всех}\ x,y,z\in X,\\
\sigma(x,y)\,\sigma(y,x)=\delta_{xy}\ \textit{для всех}\ x,y\in X\ \ (\textit{где}\ \delta_{xy}\ \textit{— символ Кронекера}).
\end{gathered}\tag{1}
$$

Если $X \doteq \{1,\dots,n\}$, то существует биекция между множеством $\mathcal{V}_0(X)$ и множеством всех помеченных транзитивных орграфов, определенных на X; существует биекция между $\mathcal{V}_0(X)$ и множеством всех помеченных T_0-топологий, определенных на множестве X. Обозначим через $T_0(n)$ число таких топологий (в частности, $\operatorname{card}\mathcal{V}_0(X)=T_0(n)$). Если $\mathcal{V}(X)$ — совокупность всех помеченных топологий, определенных на множестве X, то согласно [4, 5, 6]

$$
\operatorname{card}\mathcal{V}(X)=\sum_{m=1}^{n} S(n,m)\,T_0(m),
$$

где $S(n,m)$ — числа Стирлинга 2-го рода. Отметим еще, что для любого частичного порядка $\sigma\in\mathcal{V}_0(X)$ определено опорное множество

$$
S(\sigma)\doteq\bigl\{\,y\in X\colon\ \sigma(x,y)=\delta_{xy}\ \ \text{для всех}\ \ x\in X\,\bigr\}\neq\varnothing,
$$

а если $\varnothing\neq Y\subseteq X$, то сужение $\sigma|_{Y^2}$ принадлежит $\mathcal{V}_0(Y)$ (является частичным порядком на множестве Y).

2. Основная теорема

Зафиксируем натуральные числа $p_1,\dots,p_k$ и целое $m\geqslant 0$. Пусть, далее,

$$
\begin{gathered}
n\doteq p_1+\ldots+p_k,\\
N\doteq\{\,1,\dots,n\,\},\quad M\doteq\{\,n+1,\dots,n+m\,\},\quad L\doteq\{\,1,\dots,n+m\,\}=N\cup M,\\
N_r\doteq\{\,p_1+\ldots+p_{r-1}+1,\ \dots\ ,p_1+\ldots+p_r\,\}\ \ \text{для всех}\ \ r=1,\dots,k,\\
\triangle\doteq\bigl\{\,(i,j)\in N^2\colon\ i>j\,\bigr\},\quad d\doteq\bigl\{\,(i,j)\in N^2\colon\ i=j\,\bigr\},\quad \triangledown\doteq\bigl\{\,(i,j)\in N^2\colon\ i<j\,\bigr\},\\
D\doteq\bigl\{\,(i,j)\in N_1^2\cup\ldots\cup N_k^2\colon\ i\leqslant j\,\bigr\}.
\end{gathered}
$$

Через $\mathcal{W}(p_1,\dots,p_k)$ обозначим множество всех $\sigma\in\mathcal{V}_0(N)$ таких, что

$$
\sigma(i,j)=\delta_{ij}\ \ \text{для всех}\ \ (i,j)\in\triangle\cup D.
$$

Через $\mathcal{W}(p_1,\dots,p_k;m)$ обозначим множество всех $\sigma\in\mathcal{V}_0(L)$ таких, что

$$
\sigma(i,j)=\delta_{ij}\ \ \text{для всех}\ \ (i,j)\in\triangle\cup D\cup[\,M\times N].
$$

Для элементов множеств $\mathcal{W}(p_1,\dots,p_k)$ и $\mathcal{W}(p_1,\dots,p_k;m)$ справедливы блочные представления (символ 0 означает, что все элементы блока равны нулю; в диагональных блоках e_{p_r}, $r=1,\dots,k$, диагональные элементы равны 1, а остальные равны 0):

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c}
\hline
e_{p_1} & & & & N_1\\
\cline{1-2}
0 & \ddots & & & \vdots\\
\cline{1-3}
\ddots & \ddots & \ddots & & \vdots\\
\cline{1-4}
0 & \ddots & 0 & e_{p_k} & N_k\\
\hline
\multicolumn{1}{c}{N_1} & \multicolumn{1}{c}{\cdots} & \multicolumn{1}{c}{\cdots} & \multicolumn{1}{c}{N_k} &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c}
\hline
e_{p_1} & & & & & N_1\\
\cline{1-2}
0 & \ddots & & & & \vdots\\
\cline{1-3}
\ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots\\
\cline{1-4}
0 & \ddots & 0 & e_{p_k} & & N_k\\
\hline
\multicolumn{4}{|c|}{0} & & M\ .\\
\hline
\end{array}
\tag{2}
$$

Пусть, далее,

$$W(p_1,\ldots,p_k)\doteq\operatorname{card}\mathcal{W}(p_1,\ldots,p_k),\quad W(p_1,\ldots,p_k;m)\doteq\operatorname{card}\mathcal{W}(p_1,\ldots,p_k;m).$$

Очевидно,

$$W(p_1,\ldots,p_k;0)=W(p_1,\ldots,p_k),\quad W(p_1,\ldots,p_k;1)=W(p_1,\ldots,p_k,1). \tag{3}$$

Заметим, что при $m>0$ сужение $\sigma|_{M^2}$ отношения $\sigma\in\mathcal{W}(p_1,\ldots,p_k;m)\subset\mathcal{V}_0(L)$ принадлежит $\mathcal{V}_0(M)$, следовательно, $S(\sigma|_{M^2})\neq\varnothing$.

Лемма 1. *Для натуральных чисел $p_1,\ldots,p_k$ и m справедливо равенство*

$$W(p_1,\ldots,p_k;m)=\sum_{q=1}^{m}(-1)^{q-1}\tbinom{m}{q}\,W(p_1,\ldots,p_k,q;m-q). \tag{4}$$

Доказательство. Так как $S(\sigma|_{M^2})\neq\varnothing$ для всех $\sigma\in\mathcal{W}(p_1,\ldots,p_k;m)$, то для любого непустого подмножества $\alpha\subseteq M$ определено множество

$$\mathcal{W}_\alpha(p_1,\ldots,p_k;m)\doteq\{\,\sigma\in\mathcal{W}(p_1,\ldots,p_k;m)\colon\ \alpha\subseteq S(\sigma|_{M^2})\,\}.$$

Очевидно, включение $\varnothing\neq\alpha\subseteq\beta\subseteq M$ влечет включение

$$\mathcal{W}_\beta(p_1,\ldots,p_k;m)\subseteq\mathcal{W}_\alpha(p_1,\ldots,p_k;m),$$

поэтому в соответствии с принципом включения-исключения имеет место равенство

$$\operatorname{card}\mathcal{W}(p_1,\ldots,p_k;m)=\sum_{\varnothing\neq\alpha\subseteq M}(-1)^{|\alpha|-1}\operatorname{card}\mathcal{W}_\alpha(p_1,\ldots,p_k;m),$$

в котором суммирование ведется по всем непустым подмножествам α из M, а $|\,\alpha\,|$ обозначает число элементов в α. Очевидно, если непустые $\alpha,\beta\subseteq M$ таковы, что $|\,\alpha\,|=|\,\beta\,|$, то

$$\operatorname{card}\mathcal{W}_\alpha(p_1,\ldots,p_k;m)=\operatorname{card}\mathcal{W}_\beta(p_1,\ldots,p_k;m)=\operatorname{card}\mathcal{W}_\gamma(p_1,\ldots,p_k;m),$$

где $\gamma\doteq\{\,n+1,\ldots,n+q\,\}\subseteq M$, $q\doteq|\,\alpha\,|=|\,\beta\,|\in[1,m]$. Легко убедиться в справедливости равенства $\mathcal{W}_\gamma(p_1,\ldots,p_k;m)=\mathcal{W}(p_1,\ldots,p_k,q;m-q)$ (см. представление (2)), поэтому

$$\operatorname{card}\mathcal{W}(p_1,\ldots,p_k;m)=\sum_{q=1}^{m}(-1)^{q-1}\tbinom{m}{q}\operatorname{card}\mathcal{W}(p_1,\ldots,p_k,q;m-q).\qquad\square$$

Лемма 2. *Для любого натурального n справедливо равенство*

$$T_0(n)=\sum_{q=1}^{n}(-1)^{q-1}\tbinom{n}{q}\,W(q;n-q).$$

Доказательство. (Проводится по аналогии с доказательством леммы 1.) Для любого непустого подмножества $\alpha\subseteq N$ определено множество

$$\mathcal{V}_0^\alpha(N)\doteq\{\,\sigma\in\mathcal{V}_0(N)\colon\ \alpha\subseteq S(\sigma)\,\}.$$

Если $\varnothing\neq\alpha\subseteq\beta\subseteq N$, то $\mathcal{V}_0^\beta(N)\subseteq\mathcal{V}_0^\alpha(N)$, поэтому

$$T_0(n)=\operatorname{card}\mathcal{V}_0(N)=\sum_{\varnothing\neq\alpha\subseteq N}(-1)^{|\alpha|-1}\operatorname{card}\mathcal{V}_0^\alpha(N).$$

Наконец, имеет место равенство $\mathcal{V}_0^\alpha(N)=\mathcal{W}(q;n-q)$, где $q\doteq|\,\alpha\,|\in[1,n]$. $\square$

Лемма 3. *Для натуральных чисел* $p_1, \dots, p_k$ *и* m *справедливо равенство*

$$W(p_1, \dots, p_k; m) = \sum_{q_1+\ldots+q_r=m} (-1)^{m-r} \frac{m!}{q_1! \dots q_r!} W(p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_r), \tag{5}$$

где суммирование ведется по всем упорядоченным наборам $(q_1, \dots, q_r)$ *натуральных чисел таких, что* $q_1 + \ldots + q_r = m$.

Доказательство. (Проводится индукцией по m.) При $m = 1$ формула (5) превращается в равенство $W(p_1, \dots, p_k; 1) = W(p_1, \dots, p_k, 1)$, справедливое в силу (3). Оно составляет базу индукции. Пусть $m > 1$, и предположим, что равенство (5) верно для всех $\ell < m$ (вместо m следует писать ℓ) и всех $p_1, \dots, p_k$. Покажем, что оно верно также для $\ell = m$ и всех $p_1, \dots, p_k$.

Применив индукционное предположение к слагаемым, стоящим в правой части равенства (4), получаем, что

$$W(p_1, \dots, p_k; m) - (-1)^{m-1} W(p_1, \dots, p_k, m; 0) = \sum_{q=1}^{m-1} (-1)^{q-1} \binom{m}{q} W(p_1, \dots, p_k, q; m-q)$$

$$= \sum_{q=1}^{m-1} (-1)^{q-1} \binom{m}{q} \sum_{q_1+\ldots+q_r=m-q} (-1)^{m-q-r} \frac{(m-q)!}{q_1! \dots q_r!} W(p_1, \dots, p_k, q, q_1, \dots, q_r).$$

Далее воспользуемся первой формулой (3). Переходя от двойного суммирования к суммированию по всем переменным одновременно, получаем равенство

$$W(p_1, \dots, p_k; m) - (-1)^{m-1} W(p_1, \dots, p_k, m) = \sum_{\substack{q+q_1+\ldots+q_r=m \\ q<m}} (-1)^{m-1-r} \frac{m!}{q!\, q_1! \dots q_r!} W(p_1, \dots, p_k, q, q_1, \dots, q_r).$$

Сделав замену переменных $q_1' = q$, $q_i' = q_{i-1}$, $i = 2, \dots, r' = r+1$, получаем

$$W(p_1, \dots, p_k; m) - (-1)^{m-1} W(p_1, \dots, p_k, m) = \sum_{\substack{q_1+\ldots+q_r=m \\ q_1<m}} (-1)^{m-r} \frac{m!}{q_1! \dots q_r!} W(p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_r)$$

(штрихи у новых переменных не пишем), что и доказывает утверждение. □

Теорема 1. *Для любого натурального* n *справедливо равенство*

$$T_0(n) = \sum_{p_1+\ldots+p_k=n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{p_1! \dots p_k!} W(p_1, \dots, p_k), \tag{6}$$

где суммирование ведется по всем упорядоченным наборам $(p_1, \dots, p_k)$ *натуральных чисел таких, что* $p_1 + \ldots + p_k = n$.

Доказательство. В силу лемм 2 и 3 и равенства $W(n; 0) = W(n)$ справедливо

$$T_0(n) - (-1)^{n-1} W(n) = T_0(n) - (-1)^{n-1} W(n; 0) = \sum_{q=1}^{n-1} (-1)^{q-1} \binom{n}{q} W(q; n-q)$$

$$= \sum_{q=1}^{n-1} (-1)^{q-1} \binom{n}{q} \sum_{q_1+\ldots+q_r=n-q} (-1)^{n-q-r} \, \frac{(n-q)!}{q_1!\ldots q_r!} \, W(q,q_1,\ldots,q_r).$$

Переходя к суммированию по всем переменным одновременно, получаем

$$T_0(n) = (-1)^{n-1} W(n) + \sum_{\substack{q+q_1+\ldots+q_r=n \\ q<n}} (-1)^{n-1-r} \, \frac{n!}{q!\,q_1!\ldots q_r!} \, W(q,q_1,\ldots,q_r),$$

а замена переменных $p_1 = q$, $p_i = q_{i-1}$, $i = 2,\ldots,k = r+1$, приводит к требуемому результату. $\square$

3. Два аналога формулы (6)

Через $\mathcal{V}(p_1,\ldots,p_k)$ обозначим множество всех отношений $\sigma \in \mathcal{W}(p_1,\ldots,p_k)$ таких, что в представлении (2) для σ в блоках $N_{r-1} \times N_r$, $r = 2,\ldots,k$, в каждом столбце имеется хотя бы одна единица (называем блоки *невырожденными*). Заметим, что в силу транзитивности σ все блоки $N_s \times N_r$, $s = 1,\ldots,k-1$, $r = s+1,\ldots,k$, невырожденные. Пусть, далее, $V(p_1,\ldots,p_k) \doteq \operatorname{card} \mathcal{V}(p_1,\ldots,p_k)$. В работах [4, 7, 8] доказана формула, аналогичная (6):

$$T_0(n) = \sum_{p_1+\ldots+p_k=n} \frac{n!}{p_1!\ldots p_k!} \, V(p_1,\ldots,p_k).$$

Числа $V(p_1,\ldots,p_k)$ изучались в работах [8, 9, 10, 11, 12]. Согласно [5] при $k \geqslant 2$ справедливы оценки

$$\prod_{r=2}^{k} (\, 2^{p_{r-1}} - 1\,)^{p_r} \leqslant V(p_1,\ldots,p_k) \leqslant 2^{\,(n^2-p_1^2-\ldots-p_k^2)/2}. \tag{7}$$

Если интерпретировать $\mathcal{V}_0(N)$ как совокупность помеченных транзитивных орграфов (в этом случае полагаем $\sigma(i,i) = 0$ для всех $\sigma \in \mathcal{V}_0(N)$ и $i \in N$, исключая из графов σ петли), то включение $\sigma \in \mathcal{V}_0(N)$ влечет включение $\sigma \in \mathcal{A}(N)$, то есть σ — это помеченный ациклический орграф. Согласно [13] справедлива формула, аналогичная (6):

$$\operatorname{card} \mathcal{A}(N) = \sum_{p_1+\ldots+p_k=n} (-1)^{n-k} \, \frac{n!}{p_1!\ldots p_k!} \, 2^{\,(n^2-p_1^2-\ldots-p_k^2)/2},$$

и ее обобщение

$$A_n(x) = \sum_{p_1+\ldots+p_k=n} (-1)^{n-k} \, \frac{n!}{p_1!\ldots p_k!} \, (\,1+x\,)^{\,(n^2-p_1^2-\ldots-p_k^2)/2}, \tag{8}$$

где $A_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{nr}\, x^r$ — производящая функция (полином), в которой через A_{nr} обозначено количество помеченных ациклических орграфов порядка n, имеющих ровно r дуг.

4. Некоторые соотношения между числами $W(p_1,\ldots,p_k)$

Лемма 4. *Для натуральных чисел $p_1,\ldots,p_k$ справедливо равенство*

$$W(p_1,\ldots,p_k) = W(p_k,\ldots,p_1).$$

Доказательство. Зафиксируем $\sigma \in \mathcal{W}(p_1, \ldots, p_k)$. На множестве N определено отношение τ такое, что $\tau(i,j) \doteq \sigma(n+1-j, n+1-i)$ для всех $i,j \in N$. Очевидно, $\tau \in \mathcal{V}_0(N)$, более того, $\tau \in \mathcal{W}(p_k, \ldots, p_1)$. Биективность отображения $\mathcal{W}(p_1, \ldots, p_k) \to \mathcal{W}(p_k, \ldots, p_1)$, $\sigma \to \tau$, также очевидна. $\square$

Пусть $\mathcal{T}_0(N)$ — это совокупность всех помеченных T_0-топологий, определенных на множестве N. Зафиксируем $\mathrm{T} \in \mathcal{T}_0(N)$, и через $[\,j\,]$ обозначим замыкание точки $j \in N$. Определена функция $\sigma^c : N^2 \to \{0,1\}$ такая, что $\sigma^c(i,j) = 1$, если $i \in [\,j\,]$, а иначе $\sigma^c(i,j) = 0$. В работах [8, 14] доказаны включение $\sigma^c \in \mathcal{V}_0(N)$ и биективность отображения $\varphi^c\colon \mathcal{T}_0(N) \to \mathcal{V}_0(N)$, $\mathrm{T} \to \sigma^c$. В силу конечности T_0-топологии T для любого $i \in N$ существует наименьшее открытое множество $(\,i\,)$, содержащее точку i, где $(\,i\,)$ — это пересечение всех открытых множеств, содержащих i. Другими словами, $\big\{\,(\,i\,)\colon\, i \in N\,\big\}$ — база T_0-топологии T. Определена функция $\sigma^o\colon N^2 \to \{0,1\}$ такая, что $\sigma^o(i,j) = 1$, если $j \in (\,i\,)$, а иначе $\sigma^o(i,j) = 0$. В работе [2] доказаны включение $\sigma^o \in \mathcal{V}_0(N)$ и биективность отображения $\varphi^o\colon \mathcal{T}_0(N) \to \mathcal{V}_0(N)$, $\mathrm{T} \to \sigma^o$.

Покажем, что $\sigma^c = \sigma^o$. Если это не так, то существуют $i,j \in N$ такие, что $\sigma^c(i,j) \neq \sigma^o(i,j)$. Понятно, что $i \neq j$. В случае $\sigma^c(i,j) = 0$, $\sigma^o(i,j) = 1$ имеем $i \notin [\,j\,]$, то есть $i \in (\,j\,)$, поэтому $\sigma^o(j,i) = 1$ и $\sigma^o(i,j)\,\sigma^o(j,i) = 1$, что противоречит (1). В симметричном случае $\sigma^c(i,j) = 1$, $\sigma^o(i,j) = 0$ справедливо $j \notin (\,i\,)$, то есть $j \in [\,i\,]$, поэтому $\sigma^c(j,i) = 1$ и, следовательно, $\sigma^c(i,j)\,\sigma^c(j,i) = 1$, что также противоречит (1).

Таким образом, если $\sigma^{\mathrm{T}} \doteq \sigma^c = \sigma^o$, то определена биекция

$$\varphi\colon \mathcal{T}_0(N) \to \mathcal{V}_0(N), \quad \mathrm{T} \to \sigma^{\mathrm{T}},$$

где $\varphi \doteq \varphi^c = \varphi^o$. Прообраз частичного порядка $\sigma \in \mathcal{V}_0(N)$ при отображении φ обозначим T^σ. Замыканием точки $j \in N$ в топологии T^σ является множество $[\,j\,] \doteq \big\{\, i \in N\colon\, \sigma(i,j) = 1\,\big\}$. Базой топологии T^σ является семейство $\big\{\,(\,i\,)\,\big\}_{i \in N}$ открытых множеств $(\,i\,) \doteq \big\{\, j \in N\colon\, \sigma(i,j) = 1\,\big\}$.

Лемма 5. *Для натуральных чисел p и $q_1, \ldots, q_k$ справедливо равенство*

$$W(p, q_1, \ldots, q_k) = W(q_1, \ldots, q_k, p).$$

Доказательство. Зафиксируем $\sigma \in \mathcal{W}(q_1, \ldots, q_k)$. Через $\mathcal{N}(\sigma)$ и $\mathcal{M}(\sigma)$ обозначим совокупности всех тех строк $\xi = (\,\xi_1, \ldots, \xi_n\,)$ (соответственно всех тех столбцов $\eta = (\,\eta_1, \ldots, \eta_n\,)^\top$), состоящих из нулей и единиц, для которых отношения

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \xi \\ \hline 0 & \\ \vdots & \sigma \\ 0 & \\ \hline \end{array}\,, \qquad \begin{array}{|ccc|c|}\hline & & & \\ & \sigma & & \eta \\ & & & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

являются частичными порядками. Пусть $N(\sigma) \doteq \operatorname{card} \mathcal{N}(\sigma)$, $M(\sigma) \doteq \operatorname{card} \mathcal{M}(\sigma)$. В силу транзитивности отношений справедливы импликации

$$\text{(9)} \qquad \big(\xi_i = 1,\ \sigma(i,j) = 1 \implies \xi_j = 1\big), \quad \big(\sigma(i,j) = 1,\ \eta_j = 1 \implies \eta_i = 1\big).$$

Пусть, далее, $\mathcal{O}(\sigma)$ и $\mathcal{C}(\sigma)$ — это (равномощные) совокупности открытых и замкнутых множеств топологии T^σ. *Утверждается, что* $N(\sigma) = \operatorname{card}\mathcal{O}(\sigma)$ *и* $M(\sigma) = \operatorname{card}\mathcal{C}(\sigma)$.

Строка $\xi \in \mathcal{N}(\sigma)$ порождает множества

$$\alpha \doteq \{\, i \in N \colon\, \xi_i = 1 \,\}, \quad \omega \doteq \bigcup_{i\in\alpha} (\, i\,) \in \mathcal{O}(\sigma).$$

Очевидно, $\alpha = \bigcup\limits_{i\,\in\alpha} i \subseteq \bigcup\limits_{i\,\in\alpha} (\, i\,) = \omega$. С другой стороны, если $j \in \omega$, то найдется $i \in \alpha$ такое $j \in (\, i\,)$, поэтому $\xi_i = 1$ и $\sigma(i,j) = 1$, а в силу (9) справедливо $\xi_j = 1$, следовательно, $j \in \alpha$. Таким образом, $\omega \subseteq \alpha$, $\alpha = \omega \in \mathcal{O}(\sigma)$. Очевидно, отображение $\psi \colon\; \mathcal{N}(\sigma) \to \mathcal{O}(\sigma)$, $\xi \to \alpha$, инъективно. Прообразом множества $\alpha \in \mathcal{O}(\sigma)$ является его характеристический вектор $\xi = (\,\xi_1,\ldots,\xi_n\,)$ такой, что $\xi_i = 1$, если $i \in \alpha$, а иначе $\xi_i = 0$. Покажем, что $\xi \in \mathcal{N}(\sigma)$. Допустим, что $\xi_i = 1$ и $\sigma(i,j) = 1$ для некоторых $i,j \in N$. Тогда $i \in \alpha$ и $j \in (\, i\,)$. Так как $(\, i\,)$ — наименьшее открытое множество, содержащее точку i, то включение $i \in \alpha$ влечет включение $(\, i\,) \subseteq \alpha$. Следовательно, $j \in (\, i\,) \subseteq \alpha$ и $\xi_j = 1$, что доказывает левую импликацию (9). Таким образом, $\xi \in \mathcal{N}(\sigma)$, поэтому ψ — биекция и $\operatorname{card}\mathcal{N}(\sigma) = \operatorname{card}\mathcal{O}(\sigma)$.

Столбец $\eta \in \mathcal{M}(\sigma)$ порождает множества

$$a \doteq \{\, j \in N \colon\, \eta_j = 1 \,\}, \quad w \doteq \bigcup_{j\in a} [\, j\,] \in \mathcal{C}(\sigma).$$

Очевидно, $a = \bigcup\limits_{j\,\in a} j \subseteq \bigcup\limits_{j\,\in a} [\, j\,] = w$. С другой стороны, если $i \in w$, то найдется $j \in a$ такое $i \in [\, j\,]$, поэтому $\eta_j = 1$ и $\sigma(i,j) = 1$, а в силу (9) имеем $\eta_i = 1$, следовательно, $i \in a$. Таким образом, $w \subseteq a$, поэтому $a = w \in \mathcal{C}(\sigma)$. Очевидно, отображение $\chi \colon\; \mathcal{M}(\sigma) \to \mathcal{C}(\sigma)$, $\eta \to a$, инъективно. Прообразом множества $a \in \mathcal{C}(\sigma)$ является его характеристический вектор $\eta = (\,\eta_1,\ldots,\eta_n\,)$ такой, что $\eta_j = 1$, если $j \in a$, а иначе $\eta_j = 0$. Покажем, что $\eta \in \mathcal{M}(\sigma)$. Допустим, что $\eta_j = 1$ и $\sigma(i,j) = 1$ для некоторых $i,j \in N$. Тогда $j \in a$ и $i \in [\, j\,] \subseteq a$. Следовательно, $\eta_i = 1$, что доказывает правую импликацию (9). Таким образом, $\eta \in \mathcal{M}(\sigma)$, поэтому χ — биекция и $\operatorname{card}\mathcal{M}(\sigma) = \operatorname{card}\mathcal{C}(\sigma)$.

Так как $\operatorname{card}\mathcal{O}(\sigma) = \operatorname{card}\mathcal{C}(\sigma)$, то $N(\sigma) = M(\sigma)$.

Легко видеть, что количество частичных порядков вида

$$\tau = \begin{array}{|c|c|} \hline e_p & \\ \hline 0 & \sigma \\ \hline \end{array}\,, \qquad \varrho = \begin{array}{|c|c|} \hline \sigma & \\ \hline 0 & e_p \\ \hline \end{array}$$

равно $N^p(\sigma)$ и $M^p(\sigma)$ соответственно (в блоке e_p диагональные элементы равны 1, а остальные равны 0). Очевидно, $\tau \in \mathcal{W}(p,q_1,\ldots,q_k)$ и $\varrho \in \mathcal{W}(q_1,\ldots,q_k,p)$. Следовательно,

(10)
$$W(p,q_1,\ldots,q_k) = \sum_{\sigma\in\mathcal{W}(q_1,\ldots,q_k)} N^p(\sigma), \qquad W(q_1,\ldots,q_k,p) = \sum_{\sigma\in\mathcal{W}(q_1,\ldots,q_k)} M^p(\sigma),$$

а так как $N(\sigma) = M(\sigma)$, то $W(p,q_1,\ldots,q_k) = W(q_1,\ldots,q_k,p)$. □

Пусть D_k — группа диэдра порядка $2k$, порожденная подстановками

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k \\ 2 & 3 & \dots & k & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & k \\ k & k-1 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

В силу лемм 4 и 5 справедлива

Теорема 2. *Для любых $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{N}$ и $\pi \in D_k$ имеет место равенство*

$$W(\,p_{\pi(1)}, \dots, p_{\pi(k)}) = W(p_1, \dots, p_k).$$

Ниже приведены формулы для отдельных значений $W(p_1, \dots, p_k)$. Две первые формулы очевидны в силу представления (2). Остальные формулы получены в результате компьютерных вычислений, основанных на формулах (10).

$W(p) = 1.$
$W(p, q) = 2^{pq}.$
$W(p, 1, 1) = 4^p + 3^p.$
$W(p, 2, 1) = 8^p + 2 \cdot 6^p + 5^p.$
$W(p, 1, 1, 1) = 8^p + 3 \cdot 6^p + 2 \cdot 5^p + 4^p.$
$W(p, 3, 1) = 16^p + 3 \cdot 12^p + 3 \cdot 10^p + 9^p.$
$W(p, 2, 2) = 16^p + 4 \cdot 12^p + 4 \cdot 10^p + 2 \cdot 9^p + 4 \cdot 8^p + 7^p.$
$W(p, 2, 1, 1) = 16^p + 5 \cdot 12^p + 6 \cdot 10^p + 3 \cdot 9^p + 6 \cdot 8^p + 3 \cdot 7^p + 6^p.$
$W(p, 1, 2, 1) = 16^p + 5 \cdot 12^p + 6 \cdot 10^p + 4 \cdot 9^p + 4 \cdot 8^p + 4 \cdot 7^p + 6^p.$
$W(p, 1, 1, 1, 1) = 16^p + 6 \cdot 12^p + 8 \cdot 10^p + 5 \cdot 9^p + 9 \cdot 8^p + 7 \cdot 7^p + 3 \cdot 6^p + 5^p.$

$$\begin{aligned} W(p, 1, 1, 1, 1, 1) = {}& 32^p + 10 \cdot 24^p + 20 \cdot 20^p + 25 \cdot 18^p + 2 \cdot 17^p + 35 \cdot 16^p + \\ & + 20 \cdot 15^p + 53 \cdot 14^p + 28 \cdot 13^p + 50 \cdot 12^p + 36 \cdot 11^p + \\ & + 36 \cdot 10^p + 24 \cdot 9^p + 12 \cdot 8^p + 4 \cdot 7^p + 6^p. \end{aligned}$$

Заметим, что $2386 = W(2, 2, 1, 1) \neq W(2, 1, 2, 1) = 2388$ (ср. с теоремой 2). Заметим также, что этих формул достаточно для вычисления по формуле (6) всех значений $T_0(n)$ при $n \leqslant 6$.

5. Частичные порядки с дополнением

Через $\mathcal{R}(p_1, \dots, p_k)$ обозначим совокупность всех тех частичных порядков $\sigma \in \mathcal{W}(p_1, \dots, p_k)$, для которых существует $\tau \in \mathcal{W}_n \doteq \mathcal{W}(1, \dots, 1)$, такое, что $\tau(i, j) + \sigma(i, j) = 1$ для всех $(i, j) \in \bigtriangledown$.

Теорема 3. *Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{N}$ таких, что $p_1 + \ldots + p_k = n$, справедливо равенство*

$$\operatorname{card} \mathcal{R}(p_1, \dots, p_k) = \frac{n!}{p_1! \dots p_k!}.$$

Доказательство. 1. Через $\mathcal{H}(p_1, \dots, p_k)$ обозначим совокупность всех тех подстановок π из симметрической группы S_n (действующей на множестве N), у которых $\pi^{-1}(i) \leqslant \pi^{-1}(j)$ для всех $(i, j) \in D$. Если $e \doteq (1)(2) \dots (n)$ — единичная подстановка, то $e \in \mathcal{H}(p_1, \dots, p_k)$, следовательно, $\mathcal{H}(p_1, \dots, p_k) \neq \varnothing$. Очевидно, при $k = 1$ (в этом случае $p_1 = n$) справедливо равенство $\mathcal{H}(n) = \{\, e\,\}$, а при $k = n$ (в этом случае $p_1 = \ldots = p_n = 1$) имеет место равенство $D = d$, поэтому $\mathcal{H}(1, \dots, 1) = S_n$. Подстановки $\pi \in \mathcal{H}(p_1, \dots, p_k)$ обладают следующим общим свойством: для любого $r = 1, \dots, k$ элементы множества N_r расположены в нижней строке подстановки π в порядке возрастания. Другими словами, если $i, j \in N_r$, $i < j$, то число i стоит левее числа j в нижней строке подстановки π:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 \;\ldots\ldots\; n \\ \ldots i \ldots j \ldots \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Если в нижней строке подстановки (11) заменить все элементы множества N_r одним и тем же числом $c_r \doteq p_1 + \ldots + p_r$ (для всех $r = 1, \ldots, k$), то получим (k)-перестановку из n элементов, в которой p_1 элементов имеют вид c_1, p_2 элементов имеют вид c_2, …, p_k элементов имеют вид c_k. Количество всех (k)-перестановок равно $n!\,/(p_1! \ldots p_k!)$. Процедура перехода от подстановок вида (11) к (k)-перестановкам биективна: обратное преобразование осуществляется заменой каждого вхождения числа c_r (двигаясь слева направо) очередным числом из диапазона $[\,p_1 + \ldots + p_{r-1} + 1, \ldots, p_1 + \ldots + p_r\,]$ (замены проводятся для всех $r = 1, \ldots, k$). Следовательно, $\operatorname{card} \mathcal{H}(p_1, \ldots, p_k) = n!\,/(p_1! \ldots p_k!)$.

2. Произвольная подстановка $\pi \in S_n$ порождает на множестве N бинарное отношение σ_π:

a) для всех $(i, j) \in \triangle \cup d$ полагаем $\sigma_\pi(i, j) = \delta_{ij}$;

b) для всех $(i, j) \in \triangledown$ полагаем $\sigma_\pi(i, j) = \begin{cases} 0, & \text{если } \pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(j), \\ 1, & \text{если } \pi^{-1}(i) > \pi^{-1}(j). \end{cases}$

Утверждается, что σ_π является частичным порядком. Рефлексивность и антисимметричность очевидны. Пусть $\sigma_\pi(i, r) = \sigma_\pi(r, j) = 1$ для некоторых $i, r, j \in N$. Если r таково, что $i \neq r \neq j$, то $i < r < j$ и $\pi^{-1}(i) > \pi^{-1}(r) > \pi^{-1}(j)$, поэтому $\sigma_\pi(i, j) = 1$. Случаи $r = i$ и $r = j$ тривиальны. Следовательно, $\sigma_\pi \in \mathcal{V}_0(N)$. Очевидно, отображение $\Phi : S_n \to \mathcal{V}_0(N)$, сопоставляющее подстановке $\pi \in S_n$ частичный порядок $\sigma_\pi \in \mathcal{V}_0(N)$, инъективно.

Определим, далее, бинарное отношение σ_*:

a) для всех $(i, j) \in \triangle \cup d$ полагаем $\sigma_*(i, j) = \delta_{ij}$;

b) для всех $(i, j) \in \triangledown$ полагаем $\sigma_*(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(j), \\ 0, & \text{если } \pi^{-1}(i) > \pi^{-1}(j). \end{cases}$

Легко убедиться, что $\sigma_* \in \mathcal{V}_0(N)$, $\sigma_\pi, \sigma_* \in \mathcal{W}_n$ и $\sigma_*(i, j) + \sigma_\pi(i, j) = 1$ для всех $(i, j) \in \triangledown$.

3. Зафиксируем $\pi \in \mathcal{H}(p_1, \ldots, p_k) \subseteq S_n$ и $(i, j) \in \triangle \cup D = [\,\triangle \cup d\,] \cup [\,D \setminus d\,]$. Если $(i, j) \in [\,\triangle \cup d\,]$, то $\sigma_\pi(i, j) = \delta_{ij}$. Если же $(i, j) \in [\,D \setminus d\,]$, то $\pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(j)$ и, следовательно, $\sigma_\pi(i, j) = 0$. Значит, $\sigma_\pi(i, j) = \delta_{ij}$ для всех $(i, j) \in \triangle \cup D$, поэтому $\sigma_\pi \in \mathcal{W}(p_1, \ldots, p_k)$. Так как $\sigma_* \in \mathcal{W}_n$ и $\sigma_*(i, j) + \sigma_\pi(i, j) = 1$ при всех $(i, j) \in \triangledown$, то $\sigma_\pi \in \mathcal{R}(p_1, \ldots, p_k)$. Таким образом, если Φ' — это сужение инъективного отображения $\Phi \colon S_n \to \mathcal{V}_0(N)$ на совокупность $\mathcal{H}(p_1, \ldots, p_k)$, то

$$\operatorname{Im} \Phi' = \operatorname{Im} \Phi|_{\mathcal{H}(p_1, \ldots, p_k)} \subseteq \mathcal{R}(p_1, \ldots, p_k).$$

4. Зафиксируем отношение $\sigma \in \mathcal{R}(p_1, \ldots, p_k) \subset \mathcal{V}_0(N)$ и по нему построим бинарное дерево t_σ с n вершинами, занумерованными числами от 1 до n. Корень дерева t_σ пометим числом 1. Если $\sigma(1, 2) = 1$, то выпустим из корня дугу, направленную влево, а вершину, находящуюся в конце этой дуги, пометим числом 2. Если же $\sigma(1, 2) = 0$, то сделаем то же самое, но дугу направим вправо. В общем случае, когда требуется выбрать место на дереве для числа k (к этому моменту дерево уже содержит $k-1$ вершину и $k-2$ дуги), поступаем следующим образом. В процессе выбора просматриваем некоторый путь по дереву (цепочку смежных неповторяющихся вершин и дуг), выходящий всегда

из корня. Чтобы, находясь в некоторой вершине i пути ($i < k$), определить, обрывается ли путь в этой вершине, а если нет, то какая вершина следующая, применяется один и тот же прием для каждой вершины, в том числе и для корня. Если $\sigma(i,k) = 1$, то выясняем, исходит ли из вершины i дуга влево. Если исходит, то вершина, находящаяся в конце дуги, будет следующей вершиной пути, если нет, то достраиваем эту дугу и помещаем число k в ее конце. Если же $\sigma(i,k) = 0$, то все происходит аналогично, но с дугой, направленной вправо.

Дереву t_σ однозначно соответствует перестановка $i_1, \dots, i_n$ чисел множества N, которая получается, если пройти дерево t_σ в обратном порядке. [Обратный порядок прохождения бинарного дерева определяется рекурсивно. В случае, когда дерево пусто, оно проходится без выполнения каких-либо действий; в противном случае прохождение выполняется в три этапа: 1) пройти левое поддерево; 2) зайти в корень; 3) пройти правое поддерево.] Таким образом, дерево t_σ порождает перестановку $i_1, \dots, i_n$ (где i_1 — это первый элемент при обратном порядке обхода дерева t_σ, i_2 — второй элемент, и так далее) и подстановку

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 \dots n \\ i_1 \dots i_n \end{pmatrix}.$$

5. Утверждается, что $\pi \in \mathcal{H}(p_1, \dots, p_k)$ и π — прообраз частичного порядка $\sigma \in \mathcal{R}(p_1, \dots, p_k)$ при инъективном отображении $\Phi' : \mathcal{H}(p_1, \dots, p_k) \to \mathcal{R}(p_1, \dots, p_k)$, то есть $\sigma_\pi = \sigma$.

Пусть $\sigma(i,j) = 1$ для некоторых $i < j$. Рассмотрим наименьшее поддерево дерева t_σ, содержащее вершины i и j, и пусть k — корень этого поддерева. Обозначим поддерево через $t_\sigma(k)$. Допустим, что вершина j содержится в правом поддереве дерева $t_\sigma(k)$. В этом случае непосредственно из построения дерева t_σ следует, что $\sigma(k,j) = 0$, а поскольку $\sigma(i,j) = 1$, то в силу (1) справедливы соотношения $\sigma(k,i) = \sigma(k,i)\,\sigma(i,j) \leqslant \sigma(k,j) = 0$, поэтому $\sigma(k,i) = 0$. Так как k — корень поддерева, содержащего вершины i и j, то $k \leqslant i$ и $k \leqslant j$, поэтому $k \leqslant i < j$, а поскольку $\sigma(k,i) = 0$, то $k \neq i$, следовательно, $k < i < j$. В силу последнего обстоятельства и равенств $\sigma(k,i) = 0$ и $\sigma(k,j) = 0$ обе вершины i и j находятся в правом поддереве дерева $t_\sigma(k)$, что противоречит тому, что $t_\sigma(k)$ — наименьшее поддерево дерева t_σ, содержащее вершины i и j.

Полученное противоречие означает, что вершина j находится в левом поддереве дерева $t_\sigma(k)$. Так как $t_\sigma(k)$ — наименьшее поддерево дерева t_σ, содержащее вершины i и j, то вершина i не принадлежит левому поддереву дерева $t_\sigma(k)$. Следовательно, число j стоит левее числа i в нижней строке подстановки π (в соответствии с процедурой обратного обхода дерева t_σ), поэтому $\pi^{-1}(j) < \pi^{-1}(i)$, откуда следует равенство $\sigma_\pi(i,j) = 1$. Таким образом, доказана импликация $\sigma(i,j) = 1 \implies \sigma_\pi(i,j) = 1$.

Пусть теперь $\sigma(i,j) = 0$ для некоторых $i < j$. Рассмотрим наименьшее поддерево $t_\sigma(k)$ дерева t_σ, содержащее вершины i и j (где k — корень этого поддерева), и допустим, что вершина j содержится в левом поддереве дерева $t_\sigma(k)$, то есть $\sigma(k,j) = 1$. Так как k — корень поддерева, содержащего вершины i и j, то $k \leqslant i$ и $k \leqslant j$, поэтому $k \leqslant i < j$, а поскольку $\sigma(i,j) = 0$ и $\sigma(k,j) = 1$, то $k \neq i$ и $k < i < j$. Поскольку $\sigma \in \mathcal{R}(p_1, \dots, p_k)$, то существует отношение $\tau \in \mathcal{W}_n \subset \mathcal{V}_0(N)$ такое, что $\tau(\xi,\eta) + \sigma(\xi,\eta) = 1$ для всех $(\xi,\eta) \in \triangledown$. Следовательно, $\tau(i,j) = 1$ и $\tau(k,j) = 0$, поэтому в силу (1) справедливы соотношения $\tau(k,i) = \tau(k,i)\,\tau(i,j) \leqslant \tau(k,j) = 0$ и $\tau(k,i) = 0$, значит, $\sigma(k,i) = 1$. Так как

$k < i < j$, $\sigma(k,i) = 1$ и $\sigma(k,j) = 1$, то обе вершины i и j находятся в левом поддереве дерева $t_\sigma(k)$, — противоречие. В силу этого обстоятельства вершина j принадлежит правому поддереву дерева $t_\sigma(k)$ (а вершина i ему не принадлежит), следовательно, число j стоит правее числа i в нижней строке подстановки π, поэтому $\pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(j)$ и $\sigma_\pi(i,j) = 0$, что доказывает импликацию $\sigma(i,j) = 0 \implies \sigma_\pi(i,j) = 0$.

Таким образом, $\sigma_\pi = \sigma$.

Зафиксируем $(i,j) \in D$. Так как $\sigma \in \mathcal{R}(p_1,\ldots,p_k) \subseteq \mathcal{W}(p_1,\ldots,p_k)$, то в случае $i \neq j$ справедливо $\sigma(i,j) = 0$ и $\sigma_\pi(i,j) = 0$, поэтому $\pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(j)$, а импликация $i = j \Longrightarrow \pi^{-1}(i) = \pi^{-1}(j)$ тривиальна. Значит, $\pi \in \mathcal{H}(p_1,\ldots,p_k)$. Итак, инъективное отображение $\Phi' \colon \mathcal{H}(p_1,\ldots,p_k) \to \mathcal{R}(p_1,\ldots,p_k)$ сюръективно и, следовательно,

$$\operatorname{card}\mathcal{R}(p_1,\ldots,p_k) = \operatorname{card}\mathcal{H}(p_1,\ldots,p_k) = \frac{n!}{p_1!\ldots p_k!}. \qquad \square$$

Замечание 1. Так как $\mathcal{R}(p_1,\ldots,p_k) \subseteq \mathcal{W}(p_1,\ldots,p_k)$, то в силу теоремы 3 справедливы оценки, аналогичные (7):

$$\frac{n!}{p_1!\ldots p_k!} \leqslant W(p_1,\ldots,p_k) \leqslant 2^{\,(n^2-p_1^2-\ldots-p_k^2)/2}.$$

Нижние оценки для $W(p_1,\ldots,p_k)$ порождают любопытные числа a_k вида (6):

$$a_0 \doteq 1, \qquad a_n \doteq \sum_{p_1+\ldots+p_k=n} (-1)^{n-k}\Big(\frac{n!}{p_1!\ldots p_k!}\Big)^2, \qquad n \geqslant 1.$$

Представим несколько первых значений этих чисел:

n	1	2	3	4	5	6
a_n	1	3	19	211	3 651	90 921
$T_0(n)$	1	3	19	219	4 231	130 023
A_n	1	3	25	543	29 281	3 781 503

В таблице также приведены значения $T_0(n)$ (в статье [15] представлены числа $T_0(n)$ для всех $n \leqslant 18$) и числа $A_n \doteq A_n(1)$ (см. формулу (8)). [Можно считать, что числа A_n порождены верхними оценками для чисел $W(p_1,\ldots,p_k)$.] *Справедливы равенства*

$$(12) \qquad \sum_{m=0}^{n}(-1)^m\tbinom{n}{m}^2 a_m = \delta_{n0}, \qquad \sum_{m=0}^{n}(-1)^m\tbinom{n}{m}\,2^{\,m(n-m)}A_m = \delta_{n0}$$

рекуррентного характера. Действительно, при $n \geqslant 1$ имеем

$$\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\tbinom{n}{m}^2 a_m - a_0 - (-1)^n a_n = \sum_{m=1}^{n-1}(-1)^{n-m}\tbinom{n}{m}^2 a_{n-m}$$

$$= \sum_{m=1}^{n-1}(-1)^{n-m}\binom{n}{m}^2 \sum_{p_1+\ldots+p_k=n-m}(-1)^{n-m-k}\Big(\frac{(n-m)!}{p_1!\ldots p_k!}\Big)^2$$

$$= \sum_{\substack{m+\,p_1+\ldots+p_k=\,n\\ m<n}}(-1)^k\Big(\frac{n!}{m!\,p_1!\ldots p_k!}\Big)^2,$$

а, сделав замену переменных $q_1 = m$, $q_i = p_{i-1}$, $i = 2, \ldots, r = k+1$, получаем

$$\sum_{m=0}^{n} (-1)^m \tbinom{n}{m}^2 a_m = a_0 + (-1)^n a_n + \sum_{\substack{q_1+\ldots+q_r=n\\ q_1<n}} (-1)^{r-1} \Big(\frac{n!}{q_1!\ldots q_r!} \Big)^2 = 0.$$

Второе равенство доказывается аналогичным образом (см. также [16, 17, 18]).

Замечание 2. Назовем отношения $\sigma, \tau \in \mathcal{V}_0(N)$ *подобными*, если существует подстановка $\pi \in S_n$ такая, что $\sigma(i,j) = \tau(\pi(i), \pi(j))$ для всех $i, j \in N$. Отношение $\sigma \in \mathcal{V}_0(N)$ назовем *частичным порядком с дополнением*, если существует частичный порядок $\tau \in \mathcal{R}(1, \ldots, 1)$, подобный σ. Множество всех частичных порядков с дополнением, определенных на N, обозначим $\mathcal{V}_0^*(N)$. Пусть $T_0^*(n) \doteq \operatorname{card} \mathcal{V}_0^*(N)$. Например, если $N = \{1,2,3,4\}$, то отношения

$$\varrho = \begin{vmatrix} 1&0&0&1\\ 0&1&0&0\\ 0&1&1&0\\ 0&0&0&1 \end{vmatrix}, \qquad \sigma = \begin{vmatrix} 1&0&1&0\\ 0&1&0&1\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{vmatrix}, \qquad \tau = \begin{vmatrix} 1&1&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&1\\ 0&0&0&1 \end{vmatrix}$$

подобны, $\varrho \notin \mathcal{W}(1,1,1,1)$, $\sigma \in \mathcal{W}(1,1,1,1) \setminus \mathcal{R}(1,1,1,1)$. Так как $\tau \in \mathcal{R}(1,1,1,1)$, то $\varrho, \sigma, \tau \in \mathcal{V}_0^*(N)$.

В результате компьютерных вычислений при $n \leqslant 5$ установлено равенство $\mathcal{V}_0^*(N) = \mathcal{V}_0(N)$ и, следовательно, $T_0^*(n) = T_0(n)$, а при $n \geqslant 6$ имеем $T_0^*(n) < T_0(n)$. При $n = 6$ существует ровно три класса подобных частичных порядков, все представители которых не принадлежат $\mathcal{V}_0^*(N)$. Их представителями являются частичные порядки

$$\begin{vmatrix} 1&0&0&0&1&1\\ 0&1&0&1&0&1\\ 0&0&1&1&1&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1&0&1&1&1&1\\ 0&1&0&0&1&1\\ 0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1&0&0&1&1&1\\ 0&1&1&0&1&1\\ 0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1 \end{vmatrix}.$$

Согласно [15] в множестве $\mathcal{V}_0(\{1, \ldots, 6\})$ существует 318 классов подобных частичных порядков, из них только в трех отсутствуют отношения из множества $\mathcal{V}_0^*(\{1, \ldots, 6\})$.

References

[1] Kh.Sh. Al' Dzhabri, V.I. Rodionov, *The graph of partial orders*, Vestn. Udmurt. Univ., Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki, **4** (2013), 3–12. Zbl 1299.05169

[2] Kh.Sh. Al' Dzhabri, *The graph of reflexive-transitive relations and the graph of finite topologies*, Vestn. Udmurt. Univ., Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki, **25**:1 (2015), 3–11. Zbl 06534864

[3] Kh.Sh. Al' Dzhabri, V.I. Rodionov, *The graph of acyclic digraphs*, Vestn. Udmurt. Univ., Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki, **25**:4 (2015), 441–452.

[4] L. Comtet, *Recouvrements, bases de filtre et topologies d'un ensemble fini*, C. R. Acad. Sci., **262** (1966), A1091–A1094. MR201325

[5] J.W. Evans, F. Harary, M.S. Lynn, *On the computer enumeration of finite topologies*, Comm. ACM, **10**:5 (1967), 295–297.

[6] H. Gupta, *Number of topologies on a finite set*, Res. Bull. Panjab. Univ. (N.S.), **19** (1968), 231–241. Zbl 0185.50503

[7] M. Erne, *Struktur- und anzahlformeln fur topologien auf endlichen mengen*, Manuscripta Math., **11** (1974), 221–259. MR360300

[8] Z.I. Borevich, *Enumeration of finite topologies*, J. Sov. Math., **20**:6 (1982), 2532–2545. MR541003, Zbl 0498.05007

[9] Z.I. Borevich, W. Wieslaw, E. Dobrowolski, V.I. Rodionov, *The number of labeled topologies on nine points*, J. Sov. Math., **37**:2 (1987), 937–942. MR503838, Zbl 0612.05004

[10] Z.I. Borevich, V.V. Bumagin, V.I. Rodionov, *Number of labeled topologies on ten points*, J. Sov. Math., **17**:4 (1981), 1941–1945. MR535474, Zbl 0459.05011

[11] V.I. Rodionov, *A relation in finite topologies*, J. Sov. Math., **24**:4 (1984), 458–460. MR618504, Zbl 0533.05003

[12] V.I. Rodionov, *Some recurrence relations in finite topologies*, J. Sov. Math., **27**:4 (1984), 2963–2968. MR669569, Zbl 0557.05007

[13] V.I. Rodionov, *On the number of labeled acyclic digraphs*, Discrete Mathematics, **105** (1992), 319–321. Zbl 0761.05050

[14] V. Krishnamurthy, *On the number of topologies on a finite set*, Amer. Math. Monthly, **73**:2 (1966), 154–157. Zbl 0135.40704

[15] G. Brinkmann, B.D. McKay, *Posets on up to 16 points*, Order, **19**:2 (2002), 147–179. MR2134160

[16] R.W. Robinson, *Counting labeled acyclic digraphs*, New directions in the theory of graphs: Proc. Third Ann Arbor Conference on Graph Theory, (1971), 239–273.

[17] R.P. Stanley, *Acyclic orientations of graphs*, Discrete Mathematics, **5** (1973), 171–178. Zbl 0258.05113

[18] V.A. Liscovec, *On the number of maximal vertices of a random acyclic digraph*, Theory Probab. Appl., **20**:2 (1976), 401–409. MR380925, Zbl 0362.60030

Vitalii Ivanovich Rodionov
Udmurt State University,
ul. Universitetskaya, 1,
426034, Izhevsk, Russia
E-mail address: rodionov@uni.udm.ru