S(e)MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 331–337 (2016) УДК 519.175
DOI 10.17377/semi.2016.13.027 MSC 05C30

О ХРОМАТИЧЕСКОЙ ОПРЕДЕЛЯЕМОСТИ ПОЛНЫХ ТРЕХДОЛЬНЫХ ГРАФОВ ВИДА $K(s, s-1, s-k)$ ПРИ $k \geq 1$ И $s-k \geq 2$

П.А. ГЕЙН

Abstract. Let $P(G,x)$ be the chromatic polynomial of a graph G. A graph G is called *chromatically unique* if for any graph H, $P(G,x) = P(H,x)$ implies that G and H are isomorphic. In this parer we show that full tripartite graph $K(s, s-1, s-k)$ is chromatically unique if $k \geq 1$ and $s-k \geq 2$.

Keywords: graph, chromatic polynomial, chromatic uniqueness, complete tripartite graph.

В данной работе рассматриваются только обыкновенные графы, т. е. графы, не содержащие петель и кратных ребер. Основная терминология используется в соответствии с [1].

Пусть G – произвольный n-граф, т. е. граф, имеющий ровно n вершин. *Раскраской* графа в t цветов называется такое отображение ϕ множества вершин графа в множество чисел $\{1, 2, \ldots, t\}$, что для любых двух смежных вершин x и y выполняется $\phi(x) \neq \phi(y)$. *Хроматическим числом* графа G называется наименьшее натуральное число $\chi(G) = \chi$, такое что граф G имеет раскраску в χ цветов. Для натурального числа x через $P(G,x)$ обозначим число раскрасок графа G в x цветов. Хорошо известно (см., например, [1]), что функция $P(G,x)$ является многочленом степени n от переменной x, который называется *хроматическим многочленом* графа G.

Два графа называются *хроматически эквивалентными*, если они имеют одинаковые хроматические многочлены. Предположим, что каждому графу

Gein, P.A., About chromatic uniqueness of complete tripartite graph $K(s, s-1, s-k)$, where $k \geq 1$ and $s-k \geq 2$.

Поступила 15 апреля 2016 г., опубликована 10 мая 2016 г.

G приписано некоторое число $\alpha(G)$. Это число называется *хроматическим инвариантом*, если оно одинаково для любых двух хроматически эквивалетных графов. Известно (см. [1, 2, 3]), что хроматическими инвариантами являются число вершин, число ребер и число треугольников, содержащихся в графе G. Число ребер графа G будем обозначать через $I_2(G)$, а число треугольников – через $I_3(G)$.

Через $pt(G,i)$ обозначим число разбиений множества вершин графа G на i непустых коклик, т. е. подмножеств, состоящих из попарно несмежных вершин. По теореме Зыкова (см. [1]), хроматический многочлен графа G можно представить в виде

$$P(G,x) = \sum_{i=\chi}^{n} pt(G,i)x^{(i)},$$

где через $x^{(i)}$ обозначена *факториальная степень* переменной x, т. е. $x^{(i)} = x(x-1)\cdot\dots\cdot(x-i+1)$. В силу указанной теоремы числа $pt(G,i)$ являются хроматическими инвариантами.

В дальнейшем нас особенно будет интересовать инвариант $pt(G,\chi+1)$, который мы будем обозначать просто через pt. Если $G = K(n_1,n_2,\dots,n_t)$ – полный t-дольный граф, где $n_1 \geq n_2 \geq \dots n_t \geq 1$, то $pt = pt(G,t+1) = 2^{n_1-1}+2^{n_2-1}+\dots+2^{n_t-1}-t$ (см. [4]).

Пусть $\alpha(G)$ – некоторый хроматический инвариант, G_1 и G_2 – произвольные графы. Введем обозначение: $\Delta\alpha(G_1,G_2) = \alpha(G_1)-\alpha(G_2)$.

Граф называется *хроматически определяемым*, если он изоморфен любому хроматически эквивалентному ему графу. Различными авторами доказана хроматическая определяемость графов многих типов (см. обзор [5] и монографию [6]). Большое внимание было уделено исследованию хроматической определяемости полных многодольных графов. Так, в 1990 г. Koh и Teo [7] доказали, что полный двудольный граф $K(n_1,n_2)$ является хроматически определяемым, если $n_1 \geq n_2 \geq 2$. В связи с проведенными исследованиями сформировался вопрос: являются ли полные многодольные графы $K(n_1n_2,\dots n_t)$ хроматически определяемыми при $t \geq 3$, если $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_t \geq 2$?

В работах [8, 9] была доказана хроматическая определяемость графов вида $K(n_1,n_1,n_3)$, где $n_1 \geq n_3 \geq 2$. Также в работе [8] была доказана хроматическая определяемость графов вида $K(n_1,n_2,n_3)$, где $n_2 = n_1-1$ и $2n_3 \geq n_1, n_3 \geq 2$. Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. *Граф $K(s,s-1,s-k)$ является хроматически определяемым при $k \geq 1$ и $s-k \geq 2$.*

Для доказательства этой теоремы приведем необходимые сведения и вспомогательные утверждения.

Разбиением натурального числа n называется невозрастающая последовательность целых неотрицательных чисел $u = (u_1,u_2,\dots)$ такая, что $u_1 \geq u_2 \geq \dots$, последовательность u содержит лишь конечное число ненулевых членов и $n = \sum_{i=1}^{\infty} u_i$. *Длиной* разбиения u называется такое число l, что $u_l > 0$ и $u_{l+1} = u_{l+2} = \dots = 0$. При записи разбиений мы будем часто опускать их нулевые члены.

На множестве всех разбиений натурального числа n введем отношение порядка следующим образом. Пусть $u = (u_1, u_2, \ldots)$ и $v = (v_1, v_2, \ldots)$ – два разбиения числа n. Тогда $v \trianglelefteq u$, если

$$\begin{gathered} v_1 \leq u_1, \\ v_1 + v_2 \leq u_1 + u_2, \\ \ldots \\ v_1 + v_2 + \ldots + v_{t-1} \leq u_1 + u_2 + \ldots + u_{t-1}, \end{gathered}$$

где t – наибольшая из длин разбиений u и v. Отношение $\trianglelefteq$ называют *отношением доминирования*. В работе [10] показано, что все разбиения числа n образуют решетку относительно $\trianglelefteq$.

В работе [11] отмечено, что все разбиения фиксированной длины числа n образуют решетку отнносительно $\trianglelefteq$, а также введено понятие *элементарного преобразования*. Разбиение $v = (v_1, v_2, \ldots, v_t)$ есть результат применения элементарного преобразования к разбиению $u = (u_1, u_2, \ldots, u_t)$, если найдутся такие натуральные числа i и j, что 1) $1 \leq i < j \leq t$, 2) $u_i - 1 \geq u_{i+1}$ и $u_{j-1} \geq u_j + 1$, 3) $u_i - u_j = \delta \geq 2$, 4) $v_i = u_i - 1, v_j = u_j + 1, u_k = v_k$ для всех $k = 1, 2, \ldots, t, k \neq i, j$. В работе [11] доказано, что $v \trianglelefteq u$ выполняется в том и только в том случае, когда разбиение v может быть получено из разбиения u последовательным применением некоторого конечного числа элементарных преобразований.

Каждый полный t-дольный граф на n вершинах можно отождествить с соответствующим ему разбиением числа n длины t. Пусть $u = (u_1, u_2, \ldots u_t)$ – разбиение длины t числа n. Далее для краткости вместо $K(u_1, u_2, \ldots, u_t)$ будем писать $K(u)$. Доли графа $K(u)$ будем обозначать через V_i, где $|V_i| = u_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, t$.

Пусть u – некоторое разбиение длины t числа n, и предположим, что графы $K(u)$ и H хроматически эквивалентны, но не изоморфны. Тогда граф H также должен иметь n вершин и его хроматическое число должно быть равно t. Это означает, что граф H может быть получен удалением некоторого множества ребер E из графа $K(v)$, где v – некоторое разбиение длины t числа n. В работе [12] доказано, что различные полные многодольные графы не являются хроматически эквивалентными, поэтому множество E непусто.

Лемма 1. *Пусть $u = (u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots u_t) \to v = (\ldots, u_i - 1, \ldots u_j + 1, \ldots)$ – элементарное преобразование разбиения u, где $u_t \geqslant 2$. Если граф H получен удалением некоторого непустого множества ребер E из графа $K(v)$, то графы $K(u)$ и H не являются хроматически эквивалентными.*

Доказательство. От противного предположим, что $K(u)$ и H хроматически эквиваленты. Пусть $\delta = u_i - u_j \geqslant 2$. Тогда число удаленных ребер, согласно лемме 1 из [4], равно $|E| = \delta - 1 = u_i - u_j - 1 \geqslant 1$. Вычисляя разность инвариантов pt и используя следствие 2 из [13], получаем $2^{u_i-1} + 2^{u_j-1} - 2^{u_i-2} - 2^{u_j} =$

$2^{u_i-2}-2^{u_j-1} \leqslant 2^{|E|}-1 = 2^{u_i-u_j-1}-1$. Полагая $x = 2^{u_i-2}$ и $y = 2^{u_j-1}$, получаем

$$\frac{x}{y} = \frac{2^{u_i-2}}{2^{u_j-1}} = 2^{u_i-u_j-1},$$
$$x - y \leqslant \frac{x}{y} - 1,$$
$$xy - y^2 \leqslant x - y,$$
$$x(y-1) \leqslant y(y-1).$$

С учетом того, что $u_j \geq 2$, получаем $y = 2^{u_j-1} \geq 2$. Тогда эквивалентными преобразования получаем цепочку неравенств $x \leqslant y$, $2^{u_i-2} \leqslant 2^{u_j-1}$, $u_i - 2 \leqslant u_j - 1$, $u_i - u_j - 1 \leqslant 0$, пришли к противоречию. □

Отметим, что помимо указанного отношения порядка, на множестве разбиений также можно рассмотреть обычное отношение лексикографического порядка.

Лемма 2. *Пусть* $u = (u_1, u_2, u_3)$ *и* $v = (v_1, v_2, v_3)$ *– два разбиения числа* n *и разбиение* v *лексикографически больше разбиения* u. *Тогда* $\Delta pt(K(u), K(v)) = 2^{u_1-1} + 2^{u_2-1} + 2^{u_3-1} - 2^{v_1-1} - 2^{v_2-1} - 2^{v_3-1} < 0$.

Доказательство. Рассмотрим случаи.

(1) $v_1 = u_1$. Тогда $v_2 > u_2 \geq u_3$ (иначе $v_2 = u_2, v_3 > u_3$, что невозможно). Тогда, так как $u_3 \leq u_2$, выполняется $2^{v_2} \geq 2^{u_2} + 2^{u_3}$, откуда следует требуемое.

(2) $v_1 = u_1 + 1$. Возможны два подслучая.
  (a) $u_2 < u_1$. Тогда $2^{u_3} + 2^{u_2} \leq 2^{u_2+1} \leq 2^{u_1}$, откуда вытекает $2^{u_1} + 2^{u_2} + 2^{u_3} \leq 2^{u_1} + 2^{u_1} = 2^{v_1} < 2^{v_1} + 2^{v_2} + 2^{v_3}$.
  (b) $u_2 = u_1$. Тогда $2^{v_1} = 2^{u_1} + 2^{u_2}$, поэтому достаточно показать, что $2^{v_2} + 2^{v_3} > 2^{u_3}$. Заметим, что $u_3 = n - 2u_1 = n - 2v_1 + 2$, и по неравенству между средними арифметическим и геометрическим выполняется $2^{v_2} + 2^{v_3} \geq 2 \cdot 2^{\frac{v_2+v_3}{2}} = 2^{\frac{n-v_1}{2}+1}$. Теперь достаточно установить, что $\frac{n-v_1}{2} + 1 > n - 2v_1 + 2$. Это неравенство эквивалентно неравенству $3v_1 > n + 2$. Последнее неравенство верно, так как $3v_1 = 3(u_1 + 1) \geq u_1 + u_2 + u_3 + 3 = n + 3 > n + 2$.

(3) $v_1 \geq u_1 + 2$. Тогда $2^{u_1} + 2^{u_2} + 2^{u_3} \leq 3 \cdot 2^{u_1} < 2^{u_1+2} \leq 2^{v_1} < 2^{v_1} + 2^{v_2} + 2^{v_3}$.

□

Следствие 1. *Пусть* u *и* v *– два разбиения длины 3 числа* n *и разбиение* v *лексикографически больше разбиения* u. *Пусть также граф* H *получен удалением некоторого непустого множества ребер* E *из графа* $K(v)$. *Тогда графы* $K(u)$ *и* H *не являются хроматически эквивалентными.*

Доказательство. Если графы $K(u)$ и H хроматически эквивалентны, то по следствию 2 из [13] получаем $0 \leq \Delta pt(H, K(v)) = \Delta pt(K(u), K(v))$, что противоречит лемме 2. □

Пусть v – некоторое разбиение длины t числа n и граф H получен удалением некоторого непустого множества ребер E из графа $K(v)$. Для $i, j = 1, 2, \ldots, t$ через E_{ij} обозначим множество ребер из E, которые соединяют вершину из i-й доли с вершиной из j-й доли. Ясно, что $E_{ij} = E_{ij}$ для всех $i, j = 1, 2, \ldots, t$. Положим $e_{ij} = |E_{ij}|$. Тогда, очевидно, выполняется $|E| = \sum_{i<j} e_{ij}$. Особый

интерес представляет случай, когда для некоторого i ни одно ребро из E не инцедентно вершинам из i-й доли.

Пусть $G_1 = (V_1', E_1')$ и $G_2 = (V_2', E_2')$ – два графа и $V_1' \cap V_2' = \varnothing$. Через $G_1 \otimes G_2$ обозначим граф $G = (V', E')$, построенный следующим образом

$V' = V_1' \cup V_2'$, $E' = E_1' \cup E_2' \cup \{xy | x \in V_1', y \in V_2'\}$.

Известно (см., например, [1]), что $P(G_1 \otimes G_2, x) = P(G_1, x) \otimes P(G_2, x)$, где операция $\otimes$ на множестве многочленов определена следующим образом. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – два многочлена. Представим их через факториальные степени. Затем перемножим полученные многочлены, действуя с факториальными степенями переменной x как с обычными степенями.

Лемма 3 (Лемма 5 [14])**.** *Пусть $u = (u_1, u_2, u_3)$ – разбиение числа n и $u_3 \geq 2$. Пусть граф $H = O(u_i) \otimes H_1$ для некоторого $i \in \{1, 2, 3\}$ и некоторого графа H_1, где $O(u_i)$ – нулевой граф на u_i вершинах. Тогда если H и $K(u)$ хроматически эквивалентны, то они изоморфны.*

Доказательство. Пусть $k, l \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$ и $k < l$.

Хроматический многочлен графа H можно представить в виде $P(H, x) = P(O(u_i), x) \otimes P(H_1, x)$. Хроматический многочлен графа $K(u)$ имеет вид $P(K(u), x) = P(O(u_i), x) \otimes P(K(u_k, u_l), x)$. Отметим, что кольцо многочленов с операцией умножения $\otimes$ является кольцом без делителей нуля. Тогда, сокращая в равенстве

$$P(O(u_i), x) \otimes P(K(u_k, u_l), x) = P(O(u_i), x) \otimes P(H_1, x),$$

на $P(O(u_i), x)$, получаем $P(K(u_k, u_l), x) = P(H_1, x)$. Поскольку граф $K(u_k, u_l)$ является хроматически определяемым при $u_l \geq 2$ (см. [7]), выполняется $H_1 \simeq K(u_k, u_l)$, откуда получаем $H \simeq K(u)$. $\square$

Вычислим число ребер и число треугольников в полном t-дольном графе $K(u_1, u_2, \ldots, u_t)$. Через $\sigma_k(x_1, x_2, \ldots x_t)$ обозначим k-й основой симметрический многочлен от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_t$, так, $\sigma_1(x_1, x_2, \ldots x_t) = x_1 + x_2 + \ldots + x_t$ и

$$\sigma_2(x_1, x_2, \ldots, x_t) = \sum_{i<j} x_i x_j.$$

Ясно, что $I_2(K(u)) = \sigma_2(u_1, u_2, \ldots u_t)$ и $I_3(K(u)) = \sigma_3(u_1, u_2, \ldots u_t)$.

Пусть граф H получен удалением некоторого непустого множества ребер E из графа $K(v)$. Установим, как меняется инвариант I_3 при переходе от графа $K(v)$ к графу H. Пусть $e \in E$. Через $\xi_1(e)$ обозначим число треугольников в графе $K(v)$, которые содержат ребро e. Пусть $\xi_1 = \sum_{e \in E} \xi_1(e)$. Число треугольников в $K(v)$, у которых ровно два ребра лежат в E, обозначим через ξ_2. Число треугольников в $K(v)$, у которых все три ребра лежат в E, обозначим через ξ_3. В работе [4] указано соотношение $\Delta I_3(K(v), H) = \xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3$.

Следующая лемма уточняет теорему 1 из [9].

Лемма 4. *Пусть $u = (u_1, u_2, u_3)$ и $v = (v_1, v_2, v_3)$ – два различных разбиения числа n, граф H получен удалением некоторого непустого множества ребер E из графа $K(v)$ и графы $K(u)$ и H хроматически эквивалентны. Тогда*

(1) $u_2 \leq v_1 \leq u_1$;

(2) *если* $v_1 = u_2$ *или* $v_1 = u_1$, *то*

  (a) $\xi_2 = \xi_3 = 0$,

  (b) $v_1 |E| = v_1 e_{23} + v_2 e_{13} + v_3 e_{12}$,

(c) $E = E_{23}$ *в случае, если* $v_1 > v_2$.

Доказательство. Заметим, что в случае $v_1 \le u_3$, выполняется $n = v_3+v_2+v_1 \le 3v_1 \le 3u_3 \le u_1+u_2+u_3 = n$, откуда получаем $u = v$, что противоречит условию леммы. Следовательно, $v_1 > u_3$.

Вычислим разность инвариантов I_2.

$$|E| = \Delta I_2(K(v), K(u)) = v_1v_2 + v_1v_3 + v_2v_3 - \sigma_2(u_1, u_2, u_3).$$

Вычислим разность инвариантов I_3.

$$\Delta I_3(K(v), K(u)) = v_1v_2v_3 - \sigma_3(u_1, u_2, u_3)$$
$$\Delta I_3(K(v), H) = \xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3$$

Используя эти разности, получим теперь четыре эквивалентных неравенства.

$$\xi_1 = v_1e_{23} + v_2e_{13} + v_3e_{12} \le v_1|E| = v_1^2v_2 + v_1^2v_3 + v_1v_2v_3 - v_1\sigma_2(u_1, u_2, u_3) = \\ = v_1^2(\sigma_1(u_1, u_2, u_3) - v_1) + v_1v_2v_3 - v_1\sigma_2(u_1, u_2, u_3).$$

$$v_1v_2v_3 - \sigma_3(u_1, u_2, u_3) \le \\ \le v_1^2(\sigma_1(u_1, u_2, u_3) - v_1) + v_1v_2v_3 - v_1\sigma_2(u_1, u_2, u_3) - \xi_2 - 2\xi_3. \tag{1}$$

$$v_1^3 - \sigma_1(u_1, u_2, u_3)v_1^2 + \sigma_2(u_1, u_2, u_3)v_1 - \sigma_3(u_1, u_2, u_3) \le -\xi_2 - 2\xi_3 \le 0.$$

$$(v_1 - u_1)(v_1 - u_2)(v_1 - u_3) \le -\xi_2 - 2\xi_3 \le 0. \tag{2}$$

Поскольку $v_1 > u_3$, получаем $(v_1 - u_1)(v_1 - u_2) \le 0$, откуда следует, что $u_2 \le v_1 \le u_1$.

Пусть $v_1 = u_1$ или $v_1 = u_2$. Тогда неравенство 2 обращается в равенство, откуда имеем $\xi_2 = 0$ и $\xi_3 = 0$. Кроме того, неравенство 1 обращается в равенство, поэтому $v_1v_2v_3 - \sigma_3(u_1, u_2, u_3) = v_1|E| - \xi_2 - 2\xi_3 = v_1|E| + \xi_1 - \xi_2 - 2\xi_3 - \xi_1$, откуда вытекает $v_1|E| = \xi_1 = v_1e_{23} + v_2e_{13} + v_3e_{12}$. Предположим также, что $v_1 > v_2$. Тогда верно и неравенство $v_1 > v_3$. Если $e_{13} \ne 0$ или $e_{12} \ne 0$, то $v_1|E| = v_1e_{23} + v_2e_{13} + v_3e_{12} < v_1e_{23} + v_1e_{13} + v_1e_{12} = v_1|E|$, что противоречиво. Поэтому верны равенства $e_{13} = 0$ и $e_{12} = 0$. Следовательно, справедливо равенство $E = E_{23}$. □

Мы привели все необходимые вспомогательные утверждения, и теперь перейдем к доказательству основного результата.

Доказательство теоремы 1. Положим $u = (s, s-1, s-k)$.

Пусть граф H получен удалением непустого множества ребер из графа $K(v) = K(v_1, v_2, v_3)$ и графы H и $K(u)$ хроматически эквиваленты. По лемме 4 получаем, что $v_1 = s$ или $v_1 = s - 1$.

Случай 1. Предположим, что $v_1 = s$. Если $v_2 = v_1 = s$, то $v_3 = s - k - 1$ и разбиение $v = (s, s, s - k - 1)$ лексикографически больше разбиения u, что противоречит следствию 1. Следовательно, $v_2 < v_1$, откуда по лемме 4 вытекает равенство $E = E_{23}$. Это означает, что ни одно ребро из множества E не инцедентно вершинам из доли V_1, т. е. $H = O(v_1) \otimes H_1 = O(s) \otimes H_1$, по лемме 3 получаем $H \simeq K(u)$.

Случай 2. Предположим теперь, что $v_1 = s-1$. Если $v_2 < v_1$, то по лемме 4 получаем равенство $E = E_{23}$ и также, как в предыдущем случае, выполняется

$H = O(v_1) \otimes H_1 = O(s-1) \otimes H_1$, откуда по лемме 3 получаем $H \simeq K(u)$. Рассмотрим случай $v_2 = v_1 = s-1$. Тогда $v_3 = s-k+1$ и разбиение $v = (s-1, s-1, s-k+1)$ получено одним элементарным преобразованием из разбиения u, что невозможно в силу леммы 1. $\square$

Автор благодарен своему научному руководителю Баранскому В.А. за постоянное внимание к работе и ценные замечания.

References

[1] M. O. Asanov, V. A. Baranskii, and V. V. Rasin, *Discrete Mathematics: Graphs, Matroids, Algorithms*, Publ. Lan', 2010 [in Russian].

[2] E.J. Farrell, *On chromatic coefficients*, Discrete Math, **29** (1980), 257–264. Zbl 0443.05041

[3] V.A. Baranskii, S.V. Viharev, *On the chromatic invariants of bipartite graphs.*, Izv. Ural. Gos. Univ. Mat. Mekh., **36**:7 (2005), 25—34. Zbl 1189.05057

[4] V.A. Baranskii, T.A. Koroleva, *Chromatic uniqueness of certain complete tripartie graphs*, Izv. Ural. Gos. Univ. Mat. Mekh., **74**:12 (2010), 5–26. Zbl 1323.05044

[5] H. Zhao, *Chromaticity and adjoint polynomials of graphs*, Zutphen: Wöhrmann Print Service, 2005.

[6] F.M. Dong, K.M. Koh, K.L. Teo, *Chromatic polynomials and chromaticity of graphs*, World Scientific, 2005. Zbl 1070.05038

[7] K.M. Koh, K.L. Teo, *The search of chromatically unique graphs*, Graphs Combin., **6**, 1990, 259–285.

[8] R. Liu, H. Zhao, C. Ye, *A complete solution to a conjecture on chromatic uniqueness of complete tripartite graphs*, Discrete Mathematics, **289** (2004), 175—179. Zbl 1061.05034

[9] G.L. Chia, Chee-Kit Ho, *Chromatic equivalence classes of some families of complete tripartite graphs*, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, **37**:3 (2014), 641–646.

[10] T. Brylawski, *The lattice of integer partitions*, Dicrete Mathematics, **6** (1973), 210–219. Zbl 0283.06003

[11] V. A. Baransky and T. A. Koroleva, *The Lattice of Partitions of a Positive Integer*, Doklady Akademii Nauk, **418**:4 (2008), 439–442. Zbl 1170.11035

[12] Zhao H. et al., *On the minimum real roots of the σ-polynomials and chromatic uniqueness of graphs*, Discrete mathematics, **281**:1 (2004), 277–294. Zbl 1042.05047

[13] V. A. Baranskii , T. A. Sen'chonok, *Chromatic uniqueness of elements of height ≤ 3 in lattices of complete multipartite graphs*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **279**, suppl. 1:4 (2012), 1–16.

[14] G.L. Chia, Chee-Kit Ho, *Chromatic equivalence classes of complete tripartite graphs*, Discrete Mathematics, **309** (2009), 134—143.

Pavel A. Gein
Ural Federal University,
pr. Lenina, 51,
62083, Ekaterinburg, Russia
E-mail address: pavel.gein@gmail.com