S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 338–340 (2016) УДК 512.57
DOI 10.17377/semi.2016.13.028 MSC 08B05, 08A55

ОСНОВНЫЕ СЕМАНТИКИ РАВЕНСТВА НА ЧАСТИЧНЫХ АЛГЕБРАХ СООТВЕТСТВУЮТ БАЗОВЫМ ОПЕРАТОРАМ

М.С. ШЕРЕМЕТ

Abstract. For partial algebras, we demonstrate a natural correspondence between the main semantics of equality and the basic operators of homomorphic images and sub-algebras.

Keywords: partial algebras, semantics of equality.

Известно, что для частичных алгебр существуют различные варианты понятий равенства, морфизма, вложения. В данной работе мы показываем (теорема 1 ниже), что четыре основных понятия равенства частичных функций характеризуются определенным образом с помощью четырех алгебраических операторов. Следует отметить, что из четырех утверждений теоремы 1 три уже доказаны в работе [1] (автора совместно с В.А. Горбуновым). Непосредственно же в настоящей работе мы доказываем четвертое утверждение, а также показываем, что в теореме 1 участвуют в точности те операторы гомоморфных образов и под-алгебр, которые не сохраняют произвольное равенство частичных функций. Таким образом, мы получаем завершенную картину взаимосвязей между основными операторами и семантиками равенства.

Содержание данной работы существенно опирается на определения и результаты из [1]. Поэтому мы не пытаемся сделать данную работу независимой от [1] и будем предполагать знакомство читателя с последней. В частности, все не определяемые здесь понятия относительно частичных алгебр понимаются в соответствии с [1].

Итак, известны четыре основных понятия равенства для частичных функций: слабое равенство, равенство Эванса, равенство Клини и сильное равенство (подробнее см., например, [2]). Для создания некоего единого контекста

Sheremet, M.S., The main semantics of equality for partial algebras correspond to the basic operators.

© 2016 Шеремет М.С.

Поступила 6 ноября 2015 г., опубликована 10 мая 2016 г.

изучения различных определений равенства в [1] было введено понятие произвольной семантики.

С другой стороны, кроме обычных понятий подалгебры и гомоморфизма, для частичных алгебр рассматриваются также понятия слабой, частичной и начальной подалгебры, а также замкнутого гомоморфизма. Напомним последние два понятия, остальные встречаются в [1, стр. 25, 35].

Частичная подалгебра $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$ называется *начальной*, если для любых элементов $b_0, \dots, b_{n-1} \in B$ и функционального символа f имеем: если значение $f^{\mathcal{B}}(b_0, \dots, b_{n-1})$ определено и принадлежит A, то $b_0, \dots, b_{n-1} \in A$.

Гомоморфизм φ из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$ называется *замкнутым*, если для любых $a_0, \dots, a_n$ из A и функционального символа f имеем: $f^{\mathcal{B}}(\varphi(a_0), \dots, \varphi(a_{n-1})) = \varphi(a_n)$ влечет $f^{\mathcal{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) = a_n$. Здесь и далее подразумевается, что запись вида $f^{\mathcal{A}}(a, \dots, b) = c$ означает, что значение операции $f^{\mathcal{A}}$ определено на аргументах $a, \dots, b$ и равно c.

Отметим, что мы не рассматриваем здесь встречающиеся также в литературе сильные гомоморфизмы, поскольку они не замкнуты относительно композиции. Чтобы понять, какие из перечисленных выше операторов сохраняют равенство в произвольной семантике, напомним из [1] определение последней.

Пусть всюду далее X — счетное множество переменных, Ω — сигнатура без нульместных функциональных символов, T — множество всех Ω-термов от переменых из X, а $\downarrow t$ обозначает множество всех не принадлежащих X подтермов терма t. Под *алгеброй* понимается частичная Ω-алгебра.

Семантикой называется функция, сопоставляющая каждой паре $(s, t) \in T^2$ замкнутое относительно подтермов подмножество в $\downarrow s \cup \downarrow t$. Соответственно, говорим, что в семантике F равенство $(s \approx t)$ *выполняется* на алгебре $\mathcal{A}$ при означивании $\sigma : X \to A$, если значения $s^{\mathcal{A}}[\sigma]$ и $t^{\mathcal{A}}[\sigma]$ определены и равны, когда все термы из $F(s, t)$ или все термы из $F(t, s)$ определены в $\mathcal{A}$ при означивании σ; обозначение: $\mathcal{A} \vDash (s \approx_F t)[\sigma]$. В частности, функция $Kl(s, t) = \downarrow s$ задает *семантику Клини*, неформальный смысл которой “если одна часть равенства определена, то определена и вторая, и они равны”.

В предложении 2.4 [1] было также доказано, что семантика F *слабее* семантики G (т. е. выполнимость в F следует из выполнимости в G) в точности тогда, когда для всех $s, t \in T$ выполняется $F(s, t) \supseteq G(s, t)$ или $F(s, t) \supseteq G(t, s)$.

Пусть F — произвольная семантика, рассмотрим следующие две ситуации:

1) $\mathcal{B}$ — подалгебра в $\mathcal{A}$, $\tau : X \to B$ и $\sigma = \tau$;

2) $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — замкнутый гомоморфизм, $\sigma : X \to A$ и $\tau = \varphi\sigma$.

Тогда нетрудно видеть, что в каждой из них $\mathcal{B} \vDash (s \approx_F t)[\tau]$ следует из $\mathcal{A} \vDash (s \approx_F t)[\sigma]$. Следовательно, мы имеем четыре основных оператора (слабые, частичные и начальные подалгебры, а также произвольные гомоморфные образы), которые не сохраняют, вообще говоря, выполнимость равенства в произвольной семантике. Следующая теорема показывает, что каждый из них характеризует одну из известных семантик равенства.

Теорема 1. *Для произвольной семантики F верны следующие утверждения.*

1) *Выполнимость равенств в F сохраняется при переходе к слабым подалгебрам тогда и только тогда, когда F эквивалентна слабой семантике.*

2) *Выполнимость равенств в F сохраняется при переходе к частичным подалгебрам тогда и только тогда, когда F слабее семантики Эванса.*

3) *Выполнимость равенств в F сохраняется при переходе к начальным подалгебрам тогда и только тогда, когда F слабее семантики Клини.*

4) *Выполнимость равенств в F сохраняется при переходе к гомоморфным образам тогда и только тогда, когда F эквивалентна сильной семантике, исключая, возможно, некоторые равенства вида $(t \approx t)$, которые считаются тождественно истинными в F.*

Доказательство. В силу предложений 2.9, 2.10 и 2.11 из [1], доказательства требует только пункт 3).

Предположим сначала, что F слабее Kl. Это означает, что для любых $p, q \in T$ хотя бы один из p и q входит в $F(p, q) \cup X$. Докажем, что выполнимость равенства в F сохраняется при переходе к начальным подалгебрам.

Пусть $\mathcal{A}$ — начальная подалгебра в $\mathcal{B}$, и $\mathcal{B} \models (p \approx_F q)[\sigma]$ для некоторых $p, q \in T$ и $\sigma : X \to A$. Пусть также в $\mathcal{A}$ при означивании σ определены все термы из $F(p, q)$. Тогда то же верно и для $\mathcal{B}$, следовательно, определены и равны $p^{\mathcal{B}}[\sigma]$ и $q^{\mathcal{B}}[\sigma]$. С другой стороны, поскольку F слабее Kl, получаем, что определено хотя бы хотя бы одно из $p^{\mathcal{A}}[\sigma]$ и $q^{\mathcal{A}}[\sigma]$. В любом случае получаем $p^{\mathcal{B}}[\sigma] = q^{\mathcal{B}}[\sigma] \in A$, поскольку $\mathcal{B}$ расширяет $\mathcal{A}$; а так как $\mathcal{A}$ — именно начальная подалгебра в $\mathcal{B}$, значения $p^{\mathcal{B}}[\sigma]$ и $q^{\mathcal{B}}[\sigma]$ вычисляются, фактически, внутри $\mathcal{A}$, т. е. $p^{\mathcal{A}}[\sigma] = p^{\mathcal{B}}[\sigma] = q^{\mathcal{B}}[\sigma] = q^{\mathcal{A}}[\sigma]$, что и требовалось.

Обратно, предположим, что F не слабее Kl. Это означает, что найдутся $p, q \in T$, такие, что ни один из p и q не принадлежит $F(p, q) \cup X$. Пусть $A = F(p, q) \cup X$ и $C = {\downarrow}p \cup {\downarrow}q \cup X$. Пусть $\mathcal{T}$ — (обычная) алгебра всех термов на множестве T, а $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$ — частичные подалгебры в $\mathcal{T}$ на множествах A и C соответственно. Рассмотрим конгруэнцию θ на $\mathcal{T}$, порожденную парой (p, q). Тогда ограничение θ на C отождествляет только p и q. Следовательно, если $\mathcal{B}$ — алгебра, полученная из $\mathcal{C}$ отождествлением p и q, то $\mathcal{A}$ — начальная подалгебра в $\mathcal{B}$ (как она была в $\mathcal{C}$). Таким образом, для тождественного отображения σ из X в A имеем $\mathcal{B} \models (p \approx_F q)[\sigma]$, но $\mathcal{A} \not\models (p \approx_F q)[\sigma]$, что и требовалось. $\square$

В заключение, автор выражает признательность рецензенту за замечания по улучшению статьи.

References

[1] V.A. Gorbunov, M.S. Sheremet, *Horn classes of predicate systems and varieties of partial algebras*, Algebra and Logic, **39**:1 (2000), 12–25. Zbl 0953.08003

[2] M.S. Sheremet, *Completeness theorem for the Evans logic of identities*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **1** (2004), 24–34. [Russian, English abstract] Zbl 1079.08004

Mikhail Sergeevich Sheremet
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: sheremet@math.nsc.ru

Siberian Institute of Management RANEPA,
ul. Nizhegorodskaya, 6,
630102, Novosibirsk, Russia
E-mail address: sheremetms@yandex.ru