S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 341–351 (2016) УДК 512.54
DOI 10.17377/semi.2016.13.029 MSC 20K01

ГРУППЫ ШУНКОВА, НАСЫЩЕННЫЕ ЛИНЕЙНЫМИ И УНИТАРНЫМИ ГРУППАМИ СТЕПЕНИ 3 НАД ПОЛЯМИ НЕЧЕТНЫХ ПОРЯДКОВ

А.А. ШЛЕПКИН

Abstract. We prove that a Shunkov group saturated with simple linear and unitary groups of dimension 3 over fields of odd orders has a periodic part isomorphic to $U_3(Q)$, or $L_3(Q)$ for some locally finite field Q of odd characteristic.

Keywords: Shunkov group, groups, saturated with the set of groups.

1. Введение

Говорят, что группа G насыщена группами из множества групп $\mathfrak{R}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфнолй некоторой группе из $\mathfrak{R}$ [1]. Группа G называется группой Шункова, если для любой ее конечной подгруппы H в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную подгруппу. Первоначально такая группа называлась сопряженно биримитивно конечной группой [5]. Класс групп Шункова очень обширен и включает в себя, в частности, все группы без кручения и некоторые смешанные группы. Поэтому для каждой данной группы Шункова G актуален следующий вопрос: обладает ли группа G периодической частью, т.е. состаляют ли периодические элементы в G подгруппу? Нетривиальность ответа на этот вопрос подчеркивается примерами разрешимых групп Шункова, не обладающих периодической частью (см.. например, [9]).

Shlepkin, A.A., About Shunkov groups, saturated with linear and unitary groups of dimension 3.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ Сибирскому федеральному университету а выполнение НИР в 2014 году (Задание № 1.1462.2014/К).

Поступила 30 января 2015 г., опубликована 12 мая 2016 г.

Теорема 1. *Пусть группа Шункова G насыщена группами из множества*

$$\mathfrak{M} = \{U_3(q), L_3(q) \mid q \text{ — степень простого нечетного числа}\}.$$

Тогда G обладает периодической частью $T(G)$, изоморфной $U_3(Q)$ или $L_3(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q.

Доказательство приведенной теоремы существенно использует идеи работы [11].

2. Предварительные результаты

Под символом e в данной работе понимается единица группы.

Определение 1. *Пусть G — группа, K – подгруппа G, $\mathfrak{X}$ — множество групп. Через $\mathfrak{X}_G(K)$ будем обозначать множество всех подгрупп группы G, содержащих K и изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. Если 1 — единичная подгруппа группы G, то $\mathfrak{X}_G(1)$ будет обозначать множество всех подгрупп группы G, изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. Если из контекста ясно о какой группе идет речь, то вместо $\mathfrak{X}_G(K)$ будем писать $\mathfrak{X}(K)$.*

Определение 2. *Пусть G — группа, $\mathfrak{X}$ — множество групп. Запись $G \simeq \mathfrak{X}$ означает, что G изоморфна некоторой группе из $\mathfrak{X}$.*

Определение 3. *Пусть G — группа. Если все элементы конечных порядков из G содержаться в периодической подгруппе $T(G)$, то она называется периодической частью группы G* [6, с. 90, 150].

Предложение 1. *Пусть $L = L_3(p^n) = SL_3(p^n)/Z(SL_3(p^n))$, где p – простое нечетное число. Под записью матрица*

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in L_3(p^n)$$

мы будем подразумевать элемент $aZ(SL_3(p^n)$. Тогда

1.
$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \gamma \in GF(p^n) \right\}$$

— силовская p-подгруппа группы L и $N_L(S) = S \leftthreetimes D$, где $D = \langle D_1 \rangle \times \langle D_2 \rangle, D_1 = \langle d_1 \rangle, D_2 = \langle d_2 \rangle$, и

$$d_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix}, d_2 = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix},$$

$|\beta| = p^n - 1$, $|d_1| = p^n - 1$, $|d_2| = (p^n - 1)/(3, p^n - 1)$.

2. *$N_L(D) = D \leftthreetimes V$, где $V = \langle b, w \rangle = \langle b, w \mid b^3 = w^2 = e, b^w = b^{-1} \rangle$,*

$$b = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

.

3. *Для любого элемента $d \in D$ выполняется равенство $|db| = 3$.*

4. *Пусть* $A = \langle i \rangle \times \langle j \rangle$, *где*

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \langle d_1 \rangle, \ j = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \langle d_2 \rangle.$$

Тогда A — *четверная группа, т. е. элементарная абелева группа порядка* 4, $N_L(A) = C_L(A) \leftthreetimes V$, *квадраты элементов, порядок которых не равен трём, содержатся в* $C_L(A)$ *и* $C_L(A) = D$.

5. $N_L(D) = N_L(A) = D \leftthreetimes V, d_1^w = d_1^{-1} d_2^{-1}, d_2^w = d_2$.

6. *Если* $(q-1, 3) = 1$, *то* $D = D_1 \times D_1^w$.

7. *Если* $(q-1, 3) = 3$, *то* $\langle d \rangle = D_1 D_1^w$, *где*

$$d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{q-1/3} & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{-(q-1)/3} \end{pmatrix}$$

и $|d| = 3$.

8. *Все инволюции в* L *сопряжены, все четверные подгруппы из* L *сопряжены с* A, *в* L *существует элемент порядка* 8.

9. *Существует* $v \in L$, *для которого* $j^v = j$, $i^v = w$, *в частности,* $B = \langle w, j \rangle$ — *абелева группа порядка* 4.

10. *Подгруппа* $\langle i, j, w \rangle$ *изоморфна группе диэдра порядка* 8.

11. *Если* $q \neq 3$, *то* $L = \langle N_L(A), C_L(B) \rangle$. *Если* $q = 3$, *то* $L = \langle N_L(A), N_L(B) \rangle$.

Доказательство. пп. (1)–(4), (8) см. в [13].

(5), (6), (7), (10) Проверяются прямыми вычислениями.

(9) Вытекает из пп. (1), (4) и (8).

(11) Непосредственно проверяется, что $C_{N_L(A)}(w) = C_{C_L(A)}\langle w \rangle$ и $C(w) \cap C_L(A)$ — циклическая группа порядка $(q-1)/(3, q-1)$. Так как $C(B) \simeq C(A)$ — прямое произведение циклической группы порядка $q-1$ на циклическую группу порядка $(q-1)/(3, q-1)$, то $C(B) \not\subset N_L(A)$ во всех случаях, кроме ситуации, когда $L \simeq L_3(3)$. Поскольку $N_L(A)$ — максимальная подгруппа в L (см. [2, стр. 378–379], то утверждение доказано. □

Предложение 2. *Пусть* $U = U_3(p^n)$, p — *нечётное простое число,* $SU_3(p^n)$ — *подгруппа унитарных матриц из* $SL_3(p^{2n})$, *т.е. таких матриц* $s \in SL_3(p^{2n})$, *для которых выполняется равенство* $s^{-1} = \bar{s}^T$, *где* $\bar{s}^T$ — *матрица, полученная из* s *транспонированием и заменой всех её элементов* s_{ij} *сопряжёнными им элементами* $\bar{s}_{ij} = \varphi(s_{ij})$ (φ — *автоморфизм порядка* 2 *поля* $GF(p^{2n})$). *Тогда*

1. $U_3(q) = SU_3(q)/Z(SU_3(q)) \subset L_3(q^2) = SL_3(q^2)/Z(SL_3(q^2))$, *и под записью матрица*

$$a = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \in U_3(q)$$

будет пониматься элемент $aZ(SU_3(q))$.

2. $|U| = (1/(3, q+1)) q^3 (1 + q^3)(q^2 - 1)$.

3. U содержит подгруппу $D = D_1 \times D_2$, где $D_1 = \langle d_1\rangle$, $D_2 = \langle d_2\rangle$ и

$$d_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix}, \quad d_2 = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix},$$

где β – элемент порядка $q+1$ из $GF(q^2)$, $|D_1| = q+1$, $|D_2| = (q+1)/(3, q+1)$.

4. U содержит подгруппу $V = \langle b, w | b^3 = w^2 = 1, b^w = b^{-1}\rangle$, где

$$b = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. U содержит подгруппу $A = \langle i\rangle \times \langle j\rangle$, где

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \langle d_1\rangle, \ j = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \langle d_2\rangle.$$

Тогда A — четверная группа, т.е. элементарная абелева группа порядка 4, $N_U(A) = C_U(A) \leftthreetimes V$, квадраты элементов из $N_U(A)$, порядок которых не равен трем, содержатся в $C_U(A)$ и $C_U(A) = D$.

6. $N_U(D) = N_U(A) = D \leftthreetimes V$, $d_1^w = d_1^{-1}d_2^{-1}$, $d_2^w = d_2$.

7. $(q+1, 3) = 1$, то $D = D_1 \times D_1^w$.

8. Если $(q+1, 3) = 3$, то $\langle d\rangle = D_1 D_1^w$, где

$$d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{q+1/3} & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{-(q+1)/3} \end{pmatrix}$$

и $|d| = 3$.

9. Все инволюции в U сопряжены, все четверные подгруппы из U сопряжены. U содержит элемент порядка 8, и любая 2-подгруппа из U порядка ≥ 32 содержит элемент порядка 8.

10. Существует $v \in L$, для которого $j^v = j$, $i^v = w$, в частности, $B = \langle w, j\rangle$ — абелева группа порядка 4.

11. $U = \langle N_U(A), C_U(B)\rangle$, если $q \neq 5$. Если $q = 5$, то $A_7 \simeq \langle N_U(A), N_U(B)\rangle$.

Доказательство. Пункты 1 – 5, 9 доказаны в [13]. Пункты 6–8 доказываются непосредственными вычислениями. Пункт 10 доказывается аналогично пункту 9 из предложения 1. Доказательство пункта 11 следует из списка максимальных подгрупп группы $U_3(q)$ [2, стр.379]. □

Предложение 3. *Группа Шункова с бесконечным числом элементов конечного порядка обладает бесконечной локально-конечной подгруппой* [7, *лемма 1*].

Предложение 4. *Пусть G — группа Шункова, a — элемент простого порядка из G, x — инволюция из G. Тогда $\langle x, a\rangle$ — конечная группа.*

Доказательство. Из определения группы Шункова вытекает, что $\langle a, a^x\rangle$ — конечная группа. Несложно заметить, что $x \in N_G(\langle a, a^x\rangle)$. Следовательно, $\langle a, a^x\rangle\langle x\rangle$ — конечная группа. Так как $\langle x, a\rangle$ является подгруппой $\langle a, a^x\rangle\langle x\rangle$, то $\langle x, a\rangle$ — также конечная группа. □

Предложение 5. *Пусть G — группа Шункова, H — конечная нормальная подгруппа группы G. Тогда фактор группа $\overline{G} = G/H$ — группа Шункова.*

Доказательство. Пусть $\overline{K}$ – конечная подгруппа в $\overline{G}$, $\overline{a}$ — элемент простого порядка из $N_{\overline{G}}(\overline{K})$, $\overline{g}$ — произвольный элемент из $\overline{G}$. Пусть $\overline{a} = aH$, $\overline{g} = gH, \overline{K} = KH$ для некоторых элементов $a, g \in G$ и конечной подгруппы $K \subset G$. Рассмотрим $N_G(KH)$. Очевидно, $a, g \in N_G(KH)$, а $a_1 = a(KH), a_1^{g_1} = b^g(KH)$ элементы фактор-группы $\overline{N} = N_G(KH)/KH$ имеют простой порядок и сопряжены в $\overline{N}$. Так как G — группа Шункова, то $\langle a_1, a_1^{g_1}\rangle$ — конечная группа. Следовательно, $\langle \overline{a}, \overline{a}^{\overline{g}}\rangle$ — конечная группа. □

Предложение 6. *Пусть G — группа Шункова, $H_1 < H_2 < \ldots < H_a < \ldots$ — цепочка ее нормальных подгрупп, такая, что для любой подгруппы из этой цепочки фактор-группа G/H_a является группой Шункова, и $H = \bigcup H_a$. Тогда G/H — группа Шункова* [4, *следствие 2.4.4*].

Предложение 7. *Группа Шункова G, в которой все конечные подгруппы абелевы, обладает абелевой периодической частью $T(G)$.*

Доказательство. Действительно, пусть a – произвольный элемент конечного порядка из G. Предположим, что $|a|$ – простое число. Тогда $\langle a, a^g\rangle$ – конечная абелева группа для любого $g \in G$. Следовательно, $N_1 = \langle a^g | g \in G\rangle$ – абелева нормальная подгруппа группы G. В силу произвольного выбора a, как элемента простого порядка, получим, что все элементы простых порядков из G порождают абелеву нормальную подгруппу N_2 группы G, и более того, любой элемент из N_2 перестановочен с любым элементом $g \in G$, имеющим конечный порядок. Пусть $R(G)$ – подгруппа группы G, порождённая всеми элементами конечных порядков группы G. Очевидно, $N_2 \leq Z(R(G))$, значит, группа $\overline{R} = R(G)/N_2$ – группа Шункова (предложения 5, 6). Ясно, что для $\overline{R}$ условие леммы выполняется, и поэтому можно считать, что для $\overline{R}$ лемма верна (индукция по порядку a). Отсюда получаем, что $R(G) = T(G)$ – периодическая часть группы G, и $T(G)$ – абелева группа ([6, теорема 23.1.1]). □

Предложение 8. *В бесконечной 2-группе T любая конечная подгруппа отлична от своего нормализатора. В частности, T содержит бесконечную локально-конечную подгруппу.* [3, *предложение 4*].

Предложение 9. *Если в группе Шункова G некоторая силовская 2-подгруппа конечна, то все силовские 2-подгруппы из G конечны и сопряжены.*

Доказательство. Предположим обратное и пусть R — конечная силовская 2-подгруппа группы G. Положим $\mathfrak{N} = \{R^g | g \in G\}$ и $\mathfrak{B}$ – множество всех силовских 2-подгрупп группы G, не сопряженных с R. Выберем такие $X \in \mathfrak{N}$ и $Y \in \mathfrak{B}$, что число $m = |X \cap Y|$ принимает максимально возможное значение. Используя нормализаторное условие в конечных 2-группах и предложение 8 выбираем элементы $x \in N_X(X \cap Y)$ и $y \in N_Y(X \cap Y)$ так, что $x^2, y^2 \in X \cap Y$. В конечной группе $\langle x, y, X \cap Y\rangle$ (предложение 4) все силовские 2-подгруппы сопряжены и пусть S одна из них. Так как $S \subseteq Z$ — некоторая силовская 2 – подгруппа из G, то $Z \in \mathfrak{N}$ или $Z \in \mathfrak{B}$. Но в первом случае для некоторого $g \in G, \langle x, X \cap Y\rangle \subseteq Z^g \cap Y$ и $|Z^g \cap Y| > m$, а во втором случае $\langle y, X \cap Y\rangle \subseteq Z^g \cap X$ и снова $|Z^g \cap Y| > m$. Противоречие с выбором m. □

3. Доказательство теоремы

Предположим, что теорема неверна, и пусть G — контрпример.

Лемма 1. *G содержит бесконечно много элементов конечного порядка.*

Доказательство. Действительно, в противном случае, по лемме Дицмана [8], мы получим, что все элементы конечных порядков образуют конечную подгруппу $T(G)$, которая по условию насыщенности изоморфна одной из групп множества $\mathfrak{M}(1)$, и утверждение теоремы имеет место. Противоречие с выбором G.

□

Лемма 2. *$\mathfrak{M}(1)$ содержит бесконечно много неизоморфных групп.*

Доказательство. По предложению 3 и лемме 1 G содержит бесконечную локально конечную подгруппу. Последнее означает , что порядки групп из множества $\mathfrak{M}(1)$ не ограничены в совокупности, т. е. $\mathfrak{M}(1)$ содержит бесконечно много неизоморфных подгрупп.

□

Лемма 3. *Все инволюции в G сопряжены. Все четверные подгруппы в G сопряжены.*

Доказательство. Пусть x, y – две различные инволюции из G. Так как G – группа Шункова, то $\langle x, y\rangle$ – конечная группа. По условию насыщенности и лемме 1 $\langle x, y\rangle \subset K \in \mathfrak{M}(1)$. Следовательно, $K \simeq \{U_3(q), L_3(q)\}$. По предложениям 1 (пункт 8), 2 (пункт 9) x, y сопряжены в K. Поскольку $K \subset G$, то x, y сопряжены в G.

Пусть A, B – две различные четверные подгруппы из G. По доказанному выше все инволюции из G сопряжены. Следовательно, для некоторого $g \in G$, $A \cap B^g \neq e$. Если $A = B^g$, то все доказано. Пусть $A \neq B^g$. Но тогда фактор-группа $\langle A, B^g\rangle/(A \cap B^g)$ – конечная группа, как подгруппа группы Шункова, порожденная двумя инволюциями (предложение 4). Следовательно, $\langle A, B^g\rangle$ – также конечная группа. По условию насыщенности и лемме 1 $\langle A, B^g\rangle \subset K \in \mathfrak{A}(1)$. Следовательно, $K \simeq \{U_3(q), L_3(q)\}$. По упомянутым выше предложениям 1, 2 группы A, B^g сопряжены в K. Поскольку $K \subset G$, то A, B^g сопряжены в G. Очевидно, в этом случае A, B также сопряжены в G.

□

По лемме 2 в $\mathfrak{M}(1)$ найдётся группа изоморфная $U_3(q)$, где $q > 5$ и нечётно, или $L_3(q)$, где $q > 3$ и нечётно. Отождествим указанную группу с L из предложения 1 или соответственно с U из предложения 2 и будем использовать обозначения этих предложений : i, j, w, b, A, V, B. Пусть $N = N_G(A)$, $C_A = C_G(A)$, $C_B = C_G(B)$.

Лемма 4. *$N = C_A \leftthreetimes V$.*

Доказательство. Очевидно $C_A \leftthreetimes V \subseteq N$. Докажем обратное включение. Пусть $g \in N$. Тогда для некоторого $v \in V, A^g = A^v$ и $a^g = a^v$ для любого $a \in A$. Следовательно, $a^{gv^{-1}} = a, gv^{-1} = c \in C_A, g = cv \in C_A \leftthreetimes V$.

□

Лемма 5. *C_A обладает периодической частью $T(C_A)$ которая является бесконечной абелевой счетной группой ранга 2.*

Доказательство. Пусть K — конечная подгруппа из C_A. По условию насыщенности $K \subseteq R \simeq \{L_3(q), U_3(q)\}$. По предложениям 1 (пункт 4), 2 (пункт 5) $C_R(A)$ – абелева группа ранга 2, следовантельно, K – абелева группа ранга не более 2. В силу произвольности выбора K как конечной подгруппы из C_A получаем, что все конечные подгруппы из C_A абелевы ранга не более 2. По предложению 7 C_A обладает периодической частью $T(C_A)$, которая является бесконечной (леммы 2, 3) абелевой группой ранга 2 и является счетной. □

Лемма 6. *N обладает периодической частью $T(N) = T(C_A) \leftthreetimes V$.*

Доказательство. Так как $T(C_A)$ характеристическая подгруппа в C_A, то по лемме 4 $T(C_A) \lhd N$. По лемме 5 и предложениям 5, 6 фактор-группа $\overline{N} = N/T(C_A)$ является группой Шункова. Покажем, что $\overline{V} \lhd \overline{N}$. Пусть $\bar{b}$ – элемент порядка 3 из $\overline{V}$. Тогда $\langle \bar{b}, \bar{b}^{\bar{g}} \rangle$ – конечная подгруппа для любого $\bar{g} \in \overline{N}$. Пусть K – некоторый ее конечный прообраз в N содержащий конечный подгруппу $\langle b, b^g, A\rangle$. По условию насыщенности $\langle b, b^g, A\rangle \subset K \subseteq R \in \mathfrak{M}(1)$ и $R \simeq \{L_3(q), U_3(q)\}$. Ясно, что $b^g \in N_R(A) \subset N$. По предложениям 1 (пункт 4), 2 (пункт 5) $b^g = cb^k$, где $c \in C_R(A) \subset T(C_A)$, $1 \leqslant k \leqslant 2$. Следовательно, $\langle \bar{b} \rangle = \langle \bar{b}^{\bar{g}} \rangle$ и $(T(C_A) \leftthreetimes \langle b \rangle) \lhd N$. По предложениям 5, 6 $N/(T(C_A) \leftthreetimes \langle b \rangle)$ – группа Шункова, все конечные подгруппы которой имеют порядок 2 и совпадают с $\langle \overline{w} \rangle$, где $\overline{w} = w(T(C_A) \leftthreetimes \langle b \rangle)$. По теореме Шмидта [6, теорема 23.1.1], $(T(C_A) \leftthreetimes V) = T(N)$. □

Лемма 7. *Если для любой конечной подгруппы K из $T(C_A)$ существует такая подгруппа R, что $K \subset R \in \mathfrak{M}(1)$ и*

$$R \simeq \{L_3(q), U_3(l) | (3, q-1) = 1, (3, l+1) = 1\},$$

то $T(C_A) = C \times C^w$, где C – локально циклическая группа.

Доказательство. Рассмотрим конечную подгруппу $K \subset T(C_A) \leftthreetimes \langle w \rangle$. По условию насыщенности $\langle A, K, w\rangle \subset R \in \mathfrak{M}(1)$, где R из условия леммы. По предложениям 1 (пункты 6), 2 (пункты 7) $K \subseteq C_R(A) \leftthreetimes \langle w \rangle = (\langle c \rangle \times \langle c^w \rangle) \leftthreetimes \langle w \rangle$ – сплетение циклической группы $\langle c \rangle$, при помощи группы $\langle w \rangle$. В силу произвольности выбора K, как конечной подгруппы из $T(C_A) \leftthreetimes \langle w \rangle$, получаем, что $T(C_A) \leftthreetimes \langle w \rangle$ насыщена сплетениями конечных циклических групп при помощи группы порядка два. По [10, Теорема 2], $T(C_A) \leftthreetimes \langle w \rangle = (C \times C^w) \leftthreetimes \langle w \rangle$ – сплетение бесконечной локально циклической группы C при помощи группы $\langle w \rangle$, $T(C_A) = C \times C^w$. □

Лемма 8. *Если в $T(C_A)$ существует конечная подгруппа K такая, что для любого R со свойством $K \subset R \in \mathfrak{M}(1)$ всегда*

$$R \simeq \{L_3(q), U_3(l) | (3, q-1) = 3, (3, l+1) = 3\},$$

то $T(C_A) = CC^w$, где C – бесконечная локально-циклическая группа, и $C \cap C^w = \langle d \rangle$ — циклическая группа порядка 3 такая, что фактор-группа

$$T(C_A)/\langle d \rangle = C/\langle d \rangle \times C^w/\langle d \rangle.$$

Доказательство. Пусть K – конечная подгруппа из условия леммы. По условию насыщенности $\langle A, K, w\rangle \subset R \in \mathfrak{M}(1)$. Из условия леммы и предложений 1 (пункт 7), 2 (пункт 8) вытекает, что $C_R(A) \leftthreetimes \langle w\rangle = (\langle c\rangle\langle c^w\rangle) \leftthreetimes \langle w\rangle$, где $C_R(A) = (\langle c\rangle\langle c^w\rangle)$, $\langle c\rangle \cap \langle c^w\rangle = \langle d\rangle$ – циклическая подгруппа порядка 3, $d^w = d^{-1}$ и фактор-группа $C_R(A)/\langle d\rangle = \langle c\rangle/\langle d\rangle \times \langle c^w\rangle/\langle d\rangle$. Поскольку $T(C_A)$ – абелева группа (лемма 5), то $\langle d\rangle$ – нормальная подгруппа в $T(C_A) \leftthreetimes \langle w\rangle$. Несложно видеть, что фактор-группа $(T(C_A) \leftthreetimes \langle w\rangle)/\langle d\rangle$ насыщена сплетениями конечных циклических групп при помощи группы порядка 2. По [10, Теорема 2], $(T(C_A) \leftthreetimes \langle w\rangle)/\langle d\rangle = (\overline{C} \times \overline{C}^{\overline{w}}) \leftthreetimes \overline{\langle w\rangle}$, где $\overline{C}$ – бесконечная локально циклическая группа. Следовательно, $T(C_A)\leftthreetimes\langle w\rangle = (CC^w)\leftthreetimes\langle w\rangle$, где $T(C_A) = CC^w$, C — бесконечная локально циклическая группа, и $C \cap C^w = \langle d\rangle$. □

Лемма 9. *В G существует бесконечная последовательность групп*

$$M_1, M_2, \cdots, M_n, \cdots$$

со следующими свойствами:

1. $A \subset M_n \in \mathfrak{M}(1)$ *для любого* $n = 1, 2, 3, \ldots$.
2. $N_{M_1}(A) \subset N_{M_2}(A) \subset \cdots \subset N_{M_n}(A) \subset \ldots$.
3. $T(N) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_{M_n}(A)$.

Доказательство. Так как $T(C_A)$ – счетная группа (лемма 5), то $C_G(A) = \{c_1, c_2, ..., c_m, ...\}$. По лемме 6 $T(N_A)$ – локально конечная группа. Следовательно, $\langle A, c_1, V\rangle$ – конечная группа. По условию насыщенности $\langle A, c_1, V\rangle \subset M_1 \in \mathfrak{M}(1)$. По предложениям 1 (пункт 4), 2 (пункт 5)

$$N_{M_1}(A) = D^{(1)} \leftthreetimes V,$$

где $D^{(1)} = C_{M_1}(A)$. Возьмем элемент $c_{m_1} \in \{T(C_A) \setminus C_{M_1}(A)\}$ с минимально возможным значением номера m_1. Поскольку $T(N)$ – локально конечная группа (лемма 7), то $\langle N_{M_1}(A), c_{m_1}\rangle$ – конечная группа. По условию насыщенности

$$\langle N_{M_1}(A), c_{m_1}\rangle \subset M_2 \in \mathfrak{M}(1).$$

По предложениям 1 (пункт 4), 2 (пункт 5)

$$N_{M_2}(A) = D^{(2)} \leftthreetimes V,$$

где $D^{(2)} = C_{M_2}(A)$. Ясно, что $N_{M_1}(A) \subset N_{M_2}(A)$.

Предположим, что для $n \geqslant 2$ группа $M_n \in \mathfrak{M}(1)$ построена. Возьмем элемент $c_{m_{n-1}} \in \{T(C_A) \setminus C_{U^{(n)}}(A)\}$ с минимально возможным значением номера m_{n-1}. По лемме 7 $T(N)$ – локально конечная группа. Следовательно, $\langle N_{M_n}(A), c_{m_{n-1}}\rangle$ – конечная группа. По условию насыщенности

$$\langle N_{M_n}(A), c_{m_{n-1}}\rangle \subset M_{n+1} \in \mathfrak{M}(1).$$

По предложениям 1 (пункт 4), 2 (пункт 5)

$$N_{M_{n+1}}(A) = D^{(n+1)} \leftthreetimes V,$$

где $D^{(n+1)} = C_{M_{n+1}}(A)$. Ясно, что $N_{M_n}(A) \subset N_{M_{n+1}}(A)$. Действуя подобным образом мы получаем последовательность

$$M_1, M_2, \cdots, M_n, \cdots,$$

обладающую свойством 1 из условия леммы. По построению

$$N_{M_1}(A) \subset N_{M_2}(A) \subset \dots \subset N_{M_n}(A) \subset \dots$$

и свойство 2 также выполняется. Поскольку $c_m \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_{M_n}(A)$ для любого m, и $V \subset N_{M_n}(A)$ для любого n, то $T(N) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_{M_n}(A)$ и свойство 3 доказано. □

Зафиксируем последовательность групп $\{M_1, M_2, \cdots M_n, \cdots\}$ из леммы 9.

Лемма 10. *Пусть $T(C_A)$ из леммы 7. Тогда*

1. Для любой конечной подгруппы $K = \langle f\rangle \times \langle g\rangle$ из $T(C_A)$ такой, что $|f| = |g| = m$, $K = H$, где $H = \langle r\rangle \times \langle r^w\rangle$ – подгруппа из $T(C_A)$, $r \in C$ и $|r| = m$.

2. Без ограничения общности можно считать, что для любой

$$M_k \in \{M_1, M_2, \cdots M_n, \cdots\},$$
$$M_k \simeq \{L_3(q), U_3(l) | (3, q-1) = 1, (3, l+1) = 1\}.$$

Доказательство. 1. По лемме 7 $T(C_A) = C \times C^w$, где C – локально-циклическая группа. Следовательно, $f = c_1 c_2$ для некоторых $c_1 \in C$ и $c_2 \in C^w$, значит, $e = f^m = c_1^m c_2^m$. Так как $C \cap C^w = e$, то $c_1^m = c_2^m = e$, $c_1 \in \langle r\rangle, c_2 \in \langle r^w\rangle$ и $f \in H$. Точно также показывается, что $g \in H$. Так как $|H| = |K|$, то $H = K$. Положим $r = c_1$.

2. Дословное повторение рассуждений леммы 9 с учетом того факта. что M_n выбирается согласно условия леммы 7.

Лемма доказана. □

Лемма 11. *Пусть $T(C_A)$ из леммы 8. Тогда*

1. Для любой конечной подгруппы $K = \langle f\rangle\langle g\rangle$ из $T(C_A)$ такой, что $|f| = |g| = m$, и $\langle d\rangle = \langle f\rangle \cap \langle g\rangle$ имеет место равенство $H = K$, где $H = \langle r\rangle\langle r^w\rangle$ – конечная подгруппа из $T(C_A)$, $r \in C$, $|r| = m$ и $\langle d\rangle = \langle r\rangle \cap \langle r^w\rangle$.

2. Без ограничения общности можно считать, что для любой

$$M_k \in \{M_1, M_2, \cdots M_n, \cdots\},$$
$$M_k \simeq \{L_3(q), U_3(l) | (3, q-1) = 3, (3, l+1) = 3\}.$$

Доказательство. 1. По лемме 8 $T(C_A) = CC^w$, где C – локально-циклическая группа , фактор-группа $T(C_A)/\langle d\rangle = C/\langle d\rangle \times C^w/\langle d\rangle$ – прямое произведение двух изоморфных локально-циклических групп. Так как $d \in H \cap K$, то $H/\langle d\rangle \simeq K/\langle d\rangle$. Далее, рассуждая как в предыдущей лемме получаем , что $H/\langle d\rangle = K/\langle d\rangle$, значит, $H = K$.

2. Дословное повторение рассуждений леммы 9 с учетом того факта. что M_n выбирается согласно условия леммы 8.

Лемма доказана. □

Лемма 12. *В G существует подгруппа M такая, что*

1. $M \simeq \{L_3(Q), U_3(Q)\}$ для подходящего бесконечного локально конечного поля Q нечетной характеристики.

2. $A \subset M$.

3. Для любой четверной подгруппы $F \subset M$, $N_G(F)$ обладает периодической частью $T(N_G(F)) = N_M(F)$.

Доказательство. По построению $B = \langle w\rangle \times \langle j\rangle \subset M_n$ для любого n.

Из лемм 3 – 6 вытекает, что для любого n $N_{M_n}(B) \subset T(N_G(B)) = T(C_G(B))\leftthreetimes V_1$, где V_1 изоморфна группе V .

Покажем, что

$$C_{M_1}(B) \subset C_{M_2}(B) \subset \dots \subset C_{M_n}(B) \subset \dots .$$

Действительно, $C_{M_n}(A) \subset C_{M_{n+1}}(A) \subset T(C_G(A))$ для любого n. По лемме 3, $A^g = B$ для некоторого $g \in G$. Поскольку

$$(C_{M_n}(A))^g \subset (C_{M_{n+1}}(A))^g \subset (T(C_G(A)))^g,$$
$$(C_{M_n}(A))^g = C_{M_n^g}(A^g) = C_{M_n^g}(B),$$
$$(C_{M_{n+1}}(A))^g = C_{M_{n+1}^g}(A^g)) = C_{M_{n+1}^g}(B)$$
$$(T(C_G(A)))^g = T(C_{G^g}(A^g) = T(C_G(B)),$$

то

$$C_{M_n^g}(B) \subset C_{M_{n+1}^g}(B) \subset T(C_G(B)).$$

Так как $C_{M_n}(B) \simeq C_{M_n}(A) \simeq C_{M_n^g}(B)$ и $C_{M_n}(B) \subset T(C_G(B))$, то по леммам 10, 11 $C_{M_n}(B) = C_{M_n^g}(B)$ для любого n. Следовательно, $C_{M_n}(B) \subset C_{M_{n+1}}(B)$ для любого n, что и требовалось. В силу бесконечности последовательности $\{M_1, M_2, ...M_n, ...\}$ можно считать, что для любого n, M_n не изоморфна ни одной из групп множества $\{U_3(5), L_3(3)\}$. Следовательно, $M_n = \langle N_{M_n}(A), C_{M_n}(B)\rangle$ (предложения 1 (пункт 8), 2 (пункт 13) и с учетом леммы 9 (пункт 2)

$$M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_n \subset \cdots .$$

По [12] $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \simeq U_3(Q)$ для подходящего бесконечного локально-конечного поля Q нечетной характеристики, и пункт 1 доказан. Пункт 2 очевиден. Поскольку A и F сопряжены в M, то для некоторого $x \in M$, $A = F^x$ и $N_M(A) = N_M(F^x) = (N_M(F))^x$. Из равенства $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ и леммы 9 (свойство 3) поучаем $N_M(A) = T(N)$. Следовательно, $T(N) = (N_M(F))^x$,

$$N_M(F) = T(N)^{x^{-1}} = \langle a^{x^{-1}} \mid a \in T(N)\rangle = T(N_G(F)).$$

Пункт 3 доказан.

□

Лемма 13. $M = T(G)$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует подгруппа $P \in \mathfrak{M}(1)$, не лежащая в M и содержащая j. Покажем, что P можно выбрать так, чтобы $P \cap M$ содержала четверную подгруппу. Действительно, в противном случае $i \notin P$, и в $C_P(j) \setminus M$ найдётся инволюция $m \notin M$, и можно заменить P на подгруппу $P_1 \in \mathfrak{M}(1)$, содержащую $\langle i, j, m\rangle$. Не нарушая общности, можно считать, что P содержит A. По предложениям 1 (пункт 4) и 2 (пункты 5), $N_P(A)$ содержит четверную подгруппу B, отличную от A. По лемме 12 (пункт 3) $B \subset N_P(B) \subset T(N_M(B)) \subset M$.

Таким образом, $S = \langle N_P(A), N_P(B)\rangle \subset M$ и поскольку $S \neq P$, то $P \simeq U_3(5)$ и $S \simeq A_7$ — максимальная подгруппа в P (предложения 1 (пункт 8), 2(пункт 13). Пусть теперь T – силовская 2-подгруппа из S, содержащая A, B. Поскольку T является группой порядка 8, а силовская 2 - подгруппа из P является группой порядка 16, то возьмем $x \in (N_P(T) \setminus T)$ со свойством $x \notin M$, но $x^2 \in T$.

Поскольку силовская 2-подгруппа из M имеет порядок больше 8 (предложения 1 (пункт 8), 2 (пункт 9)), то возьмем $y \in (N_M(T) \setminus T)$ со свойством $y^2 \in T$ (предложение 9). Так как G — группа Шункова, то $\langle x, y, T\rangle$ — конечная группа (предложение 4). По условию насыщенности $\langle x, y, T\rangle \subset R \in \mathfrak{M}(1)$. Поскольку $x \in R$, но $x \notin M$, то R не лежит в M. Если R не изоморфна $U_3(5)$, то $R = \langle N_R(B), N_R(A)\rangle \subset M$ (лемма 12 (пункт 3)), что невозможно. Следовательно, $R \simeq U_3(5)$, $S_1 = \langle N_R(A), N_R(B)\rangle \subset M$ и $S_1 \simeq A_7$ — максимальная подгруппа в R (предложение 2 (пункт 13)). Как отмечалось выше, силовская 2-подгруппа из S_1 имеет порядок 8, следовательно, $y \notin S_1$, но $T\langle y\rangle \subset M \cap R$, и $R = \langle y, S_1\rangle \subset M$, что невозможно. $\square$

Лемма 13 завершает доказательство теоремы.

References

[1] A.K. Shlepkin,*Conjugate double-primitive finite groups, contains finite unsolvable subgroups*, Materials of third international conference on algebra, Krasnoyarsk, 1993, c. 369.

[2] John N. Bray, Derek F. Holt, Colva M, Ronty - Dougal, *The Maximal Subgroups of the Low - Dimensional Finite Classical groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 2013. Zbl 1303.20053

[3] D.V. Lytkina, L.R. Tuhvatullina, K.A. Filippov, *Periodic groups, saturated with finite simple groups*, Algebra and logic, **47**:3, (2008), 288–306. Zbl 1154.20037

[4] A.K. Shlepkin, *Shunkov groups with additional restrictions*, Doctor dissertation, Krasnoyarsk, 1998.

[5] V.P. Shunkov, *About one class of p – groups*, Algebra and logic, **4** (1970), 484–496.

[6] M.I. Kargapolov, Y.I. Merzlyakov, *Group theory foundations,* Moscow: Science, 1982. Zbl 0508.20001

[7] A.K. Shlepkin *About conjugate double-primitive finite groups with primarity minimal condition*, Algebra and logic, **22** (1983), 226–231. Zbl 0568.20038

[8] A.P. Dicman, *About p– groups*, reports AS USSR, **15** (1937), 71–76. Zbl 0016.29402

[9] A.A. Cherep, *About finite order elements in double-primitive finite groups*, Algebra and Logic, **26**:4 (1987), 518–521. Zbl 0663.20029

[10] A.A. Shlepkin, *Periodic groups, saturated with wreathed groups*, Siberian electronic mathematical reports, **10** (2013), 56–64. Zbl 1330.20058

[11] D.V. Lytkina, A.A. Shlepkin, *Periodic groups, saturated with finite simple groups type L_3, U_3*, Algebra and Logic, in print.

[12] V.V. Belyaev, *Locally finite Shevalle groups*, Explorations in group theory, Ural science centre AS USSR, Sverdlovsk, 1984, 39–50. Zbl 0587.20019

[13] D.V. Lytkina, L.R. Tuhvatullina, K.A. Filippov, *About periodic groups, saturated with finite set of finite simple groups*, Sib. math. journal, **49**:2 (2008), 394–399. Zbl 1154.20037

Alexey Anatolevich Shlepkin
Siberian Federal University,
pr. Svobodny, 79,
660041, Krasnoyarsk, Russia
E-mail address: shlyopkin@gmail.com