S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 366–374 (2016) УДК 512.57
DOI 10.17377/semi.2016.13.032 MSC 08A99

РАЗМЕРНОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛОНОВ, МЕТРИКА НА ИХ СОВОКУПНОСТИ

А.Г. ПИНУС

Abstract. We introduce and study a series of concepts of dimensions of functional clones as well as natural metric on the class of all clones on any fixed set.

Keywords: functional clone, metric, dimension.

Одним из основных понятий алгебраической геометрии (как классической, так и геометрии универсальных алгебр, см., к примеру [1] – [3]) являются понятия алгебраического множества и образованных этими множествами решеток. Напомним, что для универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ множество $B \subseteq A^n$ называется алгебраическим, если B есть совокупность решений в $\mathfrak{A}$ некоторой (возможно бесконечной) системы

$$\mathfrak{F}(\overline{x}) = \{t_i^1(x_1, \dots, x_n) = t_i^2(x_1, \dots, x_n) \mid i \in I\}$$

термальных уравнений сигнатуры σ:

$$B = \{\overline{a} \in A^n \mid \mathfrak{A} \models t_i^1(\overline{a}) = t_i^2(\overline{a}) \,\text{для любого}\, i \in I\}.$$

При этом B называется n–мерным алгебраическим множеством алгебры $\mathfrak{A}$. Совокупность $\mathrm{Alg}_n\mathfrak{A}$ всех n–мерных алгебраических множеств алгебры $\mathfrak{A}$ образует решетку $L_n^{\mathfrak{A}} = \langle \mathrm{Alg}_n\mathfrak{A}; \wedge, \vee \rangle$ (на самом деле полную) относительно теоретико–множественного включения $\subseteq$. При этом в роли операции $\wedge$ выступает операция теоретико–множественного пересечения $\cap$. Под *алгебраической геометрией универсальной алгебры* $\mathfrak{A}$ будем понимать последовательность $L^{\mathfrak{A}} = \langle L_1^{\mathfrak{A}}, \dots, L_n^{\mathfrak{A}}, \dots \rangle$.

Pinus, A.G., Dimension of functional clons, metric on its collection.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, гос. задание № 2014/138, проект 1052.

Поступила 29 апреля 2016 г., опубликована 16 мая 2016 г.

Таким образом, алгебраическая геометрия алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ определяется не столько совокупностью $\sigma_{\mathfrak{A}}$ ее сигнатурных функций сколько порожденным этой совокупностью клоном $\mathrm{Tr}(\mathfrak{A})$ термальных функций алгебры $\mathfrak{A}$. Это обстоятельство приводит к соблазну изучения алгебраической геометрии любого функционального клона F на произвольном множестве A. Напомним, что функциональный клон на A — это совокупность функций на множестве A, замкнутая относительно суперпозиций и включающая в себя все определенные на A селекторные функции $e_i^n(x_1, \dots, x_n)$, где $e_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$. Заметим, при этом, что для любого функционального клона F на A имеет место равенство $F = \mathrm{Tr}(\mathfrak{A}_F)$, где $\mathfrak{A}_F = \langle A; F \rangle$; здесь в роли сигнатурных функций алгебры $\mathfrak{A}_F$ выступают все функции из F. Впредь для любого клона F через $F^{(n)}$ будем обозначать совокупность всех n–местных функций из F.

За счет наличия в F селекторных функций (а значит возможности добавления фиктивных аргументов для функций из F) очевидно, что для любых натуральных $n \leq m$ и любых клонов F_1, F_2 из равенства $F_1^{(m)} = F_2^{(m)}$ вытекает равенство $F_1^{(n)} = F_2^{(n)}$. Итак, мы приходим к следующему определению.

Определение 1. *Для любого функционального клона F на множестве A под алгебраической геометрией клона F будем понимать последовательность решеток*

$$L^F = \left\langle L_1^F, \dots, L_n^F, \dots \right\rangle,$$

где $L_n^F = \left\langle \mathrm{Alg}_n^F; \wedge, \vee \right\rangle$ — решетки относительно теоретико–множественного включения $\subseteq$ и

$$\begin{aligned} \mathrm{Alg}_n^F \quad = \quad & \{B \subseteq A^n \mid B = \{\overline{a} \in A^n \mid f_i^1(\overline{a}) = f_i^2(\overline{a}),\ i \in I\},\ \textit{для некоторой} \\ & \textit{совокупности пар } \{f_i^1(\overline{x}), f_i^2(\overline{x}) \mid i \in I\} \textit{ функций из } F^{(n)}\}. \end{aligned}$$

Множества B из Alg_n^F будем называть *n–мерными F–алгебраическими множествами.*

Иначе говоря алгебраическая геометрия функционального клона F на множестве A это алгебраическая геометрия универсальной алгебры $\mathfrak{A}_F = \langle A; F \rangle$ и алгебр ей рационально эквивалентных. В этой работе нас будет интересовать насколько совокупность функций $F^{(n)}$ или (что то же самое в силу замеченного выше) насколько начальный интервал $\left\langle F^{(1)}, \dots, F^{(n)} \right\rangle$ последовательности $\left\langle F^{(1)}, \dots, F^{(n)}, \dots \right\rangle$ может определять клон F, а так же насколько начальный интервал $\left\langle L_1^F, \dots, L_n^F \right\rangle$ алгебраической геометрии клона F может определять всю эту геометрию $\left\langle L_1^F, \dots, L_n^F, \dots \right\rangle$ в целом или даже сам клон F.

В связи с этим представляются оправданными следующие определения.

Определение 2. *Два функциональных клона F_1 и F_2 на множестве A назовем алгебраически эквивалентными ($F_1 \sim_{ag} F_2$), если совпадают их алгебраические геометрии, т.е если $L^{F_1} = L^{F_2}$.*

В качестве простейшего примера двух алгебраически эквивалентных, но отличных друг от друга клонов F_1 и F_2 на любом более чем двухэлементном множестве A укажем на следующий. Пусть F_A это единичный клон (т.е. клон всех функций) на множестве A, а для любого $B \subseteq A$ пусть F^B будет клоном состоящим из всех функций на A, принимающих значения во множестве B, и селекторных функций. Тогда, очевидно, если $|B| \geq 2$, то $\mathrm{Alg}_n F^B = \mathrm{Alg}_n F_A = P(A^n)$, где $P(A^n)$ – совокупность всех подмножеств множества A^n. То есть, действительно, если $B \subset A$ и $|B| \geq 2$, то $F_A \neq F^B$, но $F_A \sim_{ag} F^B$.

Вопрос существования двух отличных друг от друга, но алгебраически эквивалентных клонов на двухэлементном множестве $2 = \{0, 1\}$ остается открытым.

Определение 3. *Для любого функционального клона F на множестве A под его размерностью* $\dim_F$ *будем понимать наименьшее натуральное число n (если подобное существует) такое, что для любого клона F_1 на A равенство $F_1^{(n)} = F^{(n)}$ влечет совпадение самих клонов F_1 и F. В противном случае (в случае отсутствия подобного n) будем говорить, что размерность клона равна бесконечности.*

Очевидно, что эта размерность клона (наряду с минимальным числом порождающих F функций) и порядком клона является одной из возможных естественных характеристик сложности клона F.

Напомним (см., к примеру, [5]), что порядком клона F называется минимум порядков конечных базисов клона F (если он конечно базируем), а, в свою очередь, порядок конечного множества функций — это максимум порядков входящих в него функций, и порядок функции — это число ее существенных (не фиктивных) аргументов. Обозначим в дальнейшем порядок конечно порожденного клона F как $O(F)$.

Заметим, что для любых конечно порожденных клонов F_1 и F_2 на множестве A, если $m = \max(O(F_1), O(F_2))$ и $F_1^{(m)} = F_2^{(m)}$, то $F_1 = F_2$. Действительно, в этом случае $F_1^{(O(F_1))} \subseteq F_1^{(m)} = F_2^{(m)} \subseteq F_2$ и значит, $F_1 \subseteq F_2$. Симметричным образом $F_2 \subseteq F_1$, т.е., действительно $F_1 = F_2$.

С другой стороны, для любого конечно порожденного клона F на множестве A имеет место неравенство $O(F) \leq \dim F$.

В качестве примера реализации строгого неравенства $O(F) < \dim F$ укажем на клон F порожденный всеми одноместными функциями на любом конечном не менее чем трехэлементном множестве A. Действительно в этом случае $O(F) = 1$ и $F^{(1)} = F_A^{(1)}$ в то время как $F \neq F_A$ в силу, к примеру, критерия Слупецкого (см., к примеру, [6]).

Определение 4. *Для любого функционального клона F на множестве A под его алгебраической (строгой алгебраической) размерностью* $\text{alg-dim}\, F$ *(соответственно* $\text{st.alg-dim}\, F$*) будем понимать наименьшее натуральное число n (если подобное существует) такое, что для любого клона F_1 на A равенство $L_n^{F_1} = L_n^F$ влечет совпадение алгебраических геометрий $L^{F_1} = L^F$ клонов F_1 и F (совпадение клонов F_1 и F). В противном случае (в случае отсутствия подобного n) будем говорить о бесконечности алгебраической размерности (строгой алгебраической размерности) клона F.*

В качестве иллюстрации вычислений размерности и (строгой) алгебраической размерности клонов приведем наброски подобных вычислений для клона F_2 всех функций на множестве $2 = \{0, 1\}$. Поскольку F_2 максимален на $\{0, 1\}$, порождается функциями $\neg$ и $\vee$ и не порождается своей совокупностью одноместных функций, то $\dim F_2 = 2$.

Покажем теперь, что $\text{alg-dim}\, F_2 = \text{st.alg-dim}\, F_2 = 3$. Так как F_2 содержит все функции на $\{0, 1\}$, то алгебраическими множествами размерности n для F_2 являются любые подмножества n–ой степени множества $\{0, 1\}$. Покажем теперь, что для любого клона F на $\{0,1\}$ отличного от F_2, для любого $n \leq 3$ найдется n–мерное алгебраическое для F_2 множество не являющееся таковым для F. Очевидно, что достаточно показать это для пяти предполных на $\{0,1\}$ клонов: клонов функций сохраняющих 0 (1), самодвойственных, линейных, монотонных. Если F клон функций на $\{0,1\}$ сохраняющих 0 (1), то непосредственно замечается, что уже $\mathrm{Alg}_1 F \neq \mathrm{Alg}_1 F_2$. Совокупности решений уравнений вида $f(x,y) = g(x,y)$, где f, g самодвойственные функции, замкнуты относительно отображения φ такого, что $\varphi(0) = 1$ и $\varphi(1) = 0$, в то время как для совокупностей решений подобных уравнений для любых $f, g \in F_2$ это не так, т.е. $\mathrm{Alg}_2 F \neq \mathrm{Alg}_2 F_2$ для клона F самодвойственных функций.

Так же, непосредственная проверка совокупностей решений для уравнений вида $f(x,y) = g(x,y)$, где f, g линейные на $\{0,1\}$ функции убеждает, что в этом случае отсутствуют совокупности трехэлементных множеств решений этих уравнений (в то время как для $f, g \in F_2$ существуют уравнения вида $f(x,y) = g(x,y)$ с трехэлементным множеством решений). Тем самым совокупность алгебраических множеств размерности два и для клона линейных функций не совпадает с подобной совокупностью для F_2. Иначе обстоит ситуация для клона F_m монотонных на $\{0,1\}$ функций. Непосредственная работа с уравнениями вида $f(x,y) = g(x,y)$ убеждает в том, что $\mathrm{Alg}_2 F_m = \mathrm{Alg}_2 F_2$. В то же время, поскольку совокупность решений уравнений вида $f(x,y,z) = g(x,y,z)$ на $\{0,1\}$ есть множество вида $\{\langle a,b,c\rangle \in \{0,1\}^3 \mid f(a,b,c) = g(a,b,c)\} = \{\langle a,b,c\rangle \in \{0,1\}^3 \mid f(a,b,c) = 0\} \cap \{\langle a,b,c\rangle \in \{0,1\}^3 \mid g(a,b,c) = 0\} \cup \{\langle a,b,c\rangle \in \{0,1\}^3 \mid f(a,b,c) = 1\} \cap \{\langle a,b,c\rangle \in \{0,1\}^3 \mid g(a,b,c) = 1\}$, то для монотонных f и g эта совокупность является объединением некоторых начального и финитного интервалов частично упорядоченной совокупности $\{0,1\}^3$. Поскольку, очевидно, что далеко не все подмножества множества $\{0,1\}^3$ таковы, то $\mathrm{Alg}_3 F_m \neq \mathrm{Alg}_3 F_2$, что и означает равенства $\text{alg-dim}\, F_2 = \text{st.alg-dim}\, F_2 = 3$.

Отметим, что для любого клона F имеет место неравенство $\text{alg-dim}\, F \leq \text{st.alg-dim}\, F$.

В связи с определениями 2 — 4 (и замеченным вслед за определением 2 существованием алгебраически эквивалентных отличных друг от друга клонов на более чем двухэлементных множествах) возникает ряд естественных открытых вопросов:

1) Существуют ли отличные друг от друга алгебраически эквивалентные клоны на множестве $2 = \{0,1\}$?
2) Каковы возможности для мощностей классов эквивалентности $F/\sim_{ag}$ для клонов F на различных множествах A? (Понятно, в силу замеченного вслед за определением 2, что для любого не менее чем трехэлементного A $|F_A/\sim_{ag}| \geq 2^{|A|} - |A| - 2$).
3) Каковы возможные значения параметров $\dim F$, $\text{alg-dim}\, F$ и $\text{st.alg-dim}\, F$ для клонов F на различных множествах A?
4) Каковы взаимосвязи этих трех размерностей для клонов?

Частичным ответам на эти и близкие к ним вопросы и посвящена эта работа.

Прежде всего рассмотрим случай двухэлементного множества $A = 2 = \{0,1\}$, т. е. случай клонов булевых функций. Решетка которых L_2 (решетка Поста) счетна и досконально описана в работе [4] (см. так же, к примеру, [5]). В этой решетке L_2 каждый клон F из L_2 имеет конечное число покрытий в

L_2 и некоторую систему порождающих состоящую из не более чем четырех функций.

Более того для любого клона F из решетки L_2, кроме клонов $F_1^\infty, F_2^\infty, F_3^\infty, F_4^\infty, F_5^\infty, F_6^\infty, F_7^\infty, F_8^\infty$ (в обозначениях работы [5]) и любого его собственного расширения $F' \in L_2$ существует некоторое покрытие F'' клона F в решетке L_2 такое, что $F \subseteq F'' \subseteq F'$.

Предложение 1. *Если клон F на множестве A имеет конечную систему порождающих, в L_A существует лишь конечное число покрывающих клон F клонов $F_1, \dots, F_k$, и для любого клона F' на A, строго включающего в себя F, для некоторого $i \leq k$ имеет место включение $F_i \subseteq F'$ и все клоны $F_1, \dots, F_k$ конечно порождены, то клон F имеет конечную размерность.*

Доказательство. Действительно, пусть функции $f_1, \dots, f_s$ порождают клон F и n это максимальная арность этих функций. Тогда для любого клона F' на множестве A равенство $(F')^{(n)} = F^{(n)}$ влечет включение $F \subseteq F'$. Пусть $F_1, \dots, F_k$ покрытия клона F в решетке L_A удовлетворяющие условиям предложения 1. Пусть $e_1, \dots, e_k$ максимальные арности функций входящих в некоторые конечные системы функций порождающие клоны $F_1, \dots, F_k$ соответственно. Пусть, наконец $m = \max\{n, e_1, \dots, e_k\}$ тогда, если F' функциональный клон на A такой, что $(F')^{(m)} = (F)^{(m)}$, то в силу равенства $(F')^{(n)} = (F)^{(n)}$ имеет место включение $F \subseteq F'$. То есть либо $F' = F$, либо $F' \supseteq F_i$ для некоторого $i \leq k$. Заметим, что последнее невозможно. Действительно, иначе $F^{(m)} = (F')^{(m)} \supseteq F_i^{(m)}$ и, в частности, $F^{(e_i)} \supseteq F_i^{(e_i)}$ т.е. $F \supseteq F_i$ что невозможно. Предложение 1 доказано. □

Из замеченного выше по поводу решетки Поста L_2 и данного предложения 1 вытекает

Следствие 1. *Все клоны на множестве $2 = \{0, 1\}$ за исключением клонов F_i^∞ $(i = 1, 2, \dots 8)$ имеют конечную размерность.*

Причем, исходя из доказательства предложения 1, известных (см., к примеру [5]) порядков клонов на $\{0, 1\}$ и отношения «покрытия» в решетке L_2, все клоны F на множестве $\{0, 1\}$, кроме клонов вида F_i^m (где $i \in \{1, 2, \dots 8\}$, а $m \in \{2, 3, \dots, n, \dots\} \cup \{\infty\}$), имеют размерность $\dim F$ не превосходящую 3. Те же факторы, включая то, что $O(F_i^m) = m + 1$; (для $i \in \{1, 2, \dots 8\}$ и $m \in \{2, 3, \dots, n, \dots\}$), влекут то,что $\dim F_i^m = m + 1$.

Наконец, в силу известных равенств $(F_i^m)^{(n)} = (F_i^\infty)^{(n)}$ для $n \leq m$ и $i = 1, 2, \dots 8$ (см., к примеру, Следствие 1 §1 главы 4 в [5]) получаем равенства $\dim F_i^\infty = \infty$ (для $i = 1, 2, \dots 8$).

Клоны бесконечной размерности существуют и на любом не менее чем трехэлементном множестве A.

Это связано с доказанным Яновым [7] существованием на множестве $3 = \{0, 1, 2\}$ клона F не имеющего базиса (наименьшей, по включению, порождающей его системы функций).

Предложение 2. *На любом не менее чем трехэлементном множестве A существует клон бесконечной размерности.*

Доказательство. Пусть A некоторое не менее чем трехэлементное множество. Фиксируем на A некоторое отношение эквивалентности θ с трехэлементным фактором $A/\theta = \{B_1, B_2, B_3\}$. Для каждого $B \in A/\theta$ фиксируем некоторый элемент $a_B \in B$. Для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ определенной на множестве $\{0, 1, 2\}$ и отличной от селекторов e_i^n на A определим функцию f^θ на A следующим образом: для любых $b_1, \ldots, b_n \in A$ полагаем $f^\theta(b_1, \ldots, b_n) = a_{B_{f(jb_1, \ldots, jb_n)}}$, где $j(b_i) = 0(1, 2)$ тогда и только тогда, когда $b_i/\theta = B_{0(1,2)}$ соответственно.

Для любого клона F на множестве $\{0, 1, 2\}$ через F^θ обозначим совокупность функций на множестве A, состоящую из селекторов e_i^n на A и функций f^θ где $f \in F$. Непосредственно замечается, что совокупность F^θ является функциональным клоном на A. Кроме того столь же непосредственно показывается, что для любого клона F на $\{0, 1, 2\}$ и любой совокупности $G \subseteq F$, не содержащей селекторных функций, G порождает клон F тогда и только тогда, когда $G^\theta = \{g^\theta \mid g \in G\}$ порождает клон F^θ.

Пусть теперь F — клон на $\{0, 1, 2\}$, не имеющий конечного базиса (существующий по теореме Янова), и, значит, в частности, не являющийся конечно порожденным. Допустим, что $\dim F^\theta = n$. Совокупность $(F^\theta)^{(n)}$ конечна, так же как и совокупность $F^{(m)}$ для любого $m \in \omega$. Тем самым, для любого $n \in \omega$ клон F_n^θ порожденный совокупностью $(F^\theta)^{(n)}$ будет строго меньше клона F^θ в то время как имеет место равенство $(F_n^\theta)^{(n)} = (F^\theta)^{(n)}$. Полученное противоречие и доказывает требуемое предложение. □

Традиционно, при изучении совокупности C_A функциональных клонов на множестве A эта совокупность рассматривается как решетка L_A относительно теоретико-множественного отношения включения $\subseteq$. Введенное выше понятие размерности клонов $\dim F$ позволяет рассматривать совокупность всех клонов на множестве A как некоторое естественное метрическое пространство, метрика которого основана на арности функций которыми отличаются два клона на множестве A. Для любых клонов F, F' на множестве A определим расстояние между ними следующим естественным образом:

$$d(F, F') \quad = \quad \begin{cases} \left(\min\{n \in \omega' \mid F^{(n)} \neq (F')^{(n)}\right)^{-1}, & \text{если } F \neq F', \\ 0, & \text{в случае когда } F = F'. \end{cases}$$

Здесь $\omega' = \omega \setminus \{0\}$.

Непосредственно замечается, что $\langle C_A; d\rangle$ является метрическим пространством и системой окрестностей клона F служат множества $O_F^n = \{F' \in C_A \mid (F')^{(n)} = F^{(n)}\}$, $n \in \omega'$. В силу этого, изолированными точками пространства $\langle C_A; d\rangle$ являются клоны конечной размерности и только они. Прежде всего заметим, что, естественным образом, сложность пространства $\langle C_A; d\rangle$ возрастает с ростом A.

Предложение 3. *Для любых $B \subseteq A$ пространство $\langle C_B; d\rangle$ изометрически вложимо в пространство $\langle C_A; d\rangle$.*

Доказательство. Фиксируем произвольный элемент $b \in B$. Для любой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на множестве B определим функцию $f^\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на множестве A следующим образом: для любых $c_1, \ldots, c_n \in A$

$$f^\varphi(c_1, c_2, \ldots, c_n) \quad = \quad \begin{cases} f(c_1, c_2, \ldots, c_n), & \text{если } c_i \in B \text{ для всех } i \leq n, \\ f(c_1', c_2', \ldots, c_n'), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь

$$c_i' \quad = \quad \begin{cases} c_i, \text{ если } c_i \in B \\ b, \text{ если } c_i \notin B. \end{cases}$$

Очевидно, что для любых функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ на множестве B имеет место равенство $[f(g(x_1, x_2, \ldots, x_m), x_{m+1}, \ldots, x_{m+n-1})]^\varphi = f^\varphi(g^\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m), x_{m+1}, \ldots, x_{m+n-1})$.

Для любой совокупности G функций на B пусть $G^\varphi = \{f^\varphi \mid f \in G\}$. Непосредственно замечается, что для любого клона F на множестве B совокупность $F^* = F^\varphi \cup E_A$, где E_A — совокупность всех селекторов на A, является клоном на A. Столь же непосредственно проверяется, что для любых клонов F_1, F_2 на B имеет место равенство $d(F_1^*, F_2^*) = d(F_1, F_2)$ т. е. отображение $F \to F^*$ является изометрическим вложением пространства $\langle C_B; d\rangle$ в пространство $\langle C_A; d\rangle$.

Как было показано выше, из хорошо известного Постовского [4] описания клонов на двухэлементном множестве $2 = \{0, 1\}$ все эти клоны кроме клонов $F_1^\infty, \ldots, F_8^\infty$ (в обозначениях работы [5]) имеют конечную размерность и, значит, являются изолированными точками пространства $\langle C_2; d\rangle$ и, при этом, для любого $i \in \{1, \ldots, 8\}$ выполнено $F_i^\infty = \lim\limits_{m\to\infty} F_i^m$ (т.к. $(F_i^m)^{(n)} = (F_i^\infty)^{(n)}$ для $n \le m$ в силу, к примеру, следствия 1 параграфа 1 главы 4 из [5]). Отсюда, очевидным образом, т.к. вне любых открытых окрестностей клонов $F_1^\infty, \ldots, F_8^\infty$ в пространстве $\langle C_2; d\rangle$ всегда оказывается лишь конечное число клонов, вытекает компактность пространства $\langle C_2; d\rangle$. □

В предложении 2 доказано существование клонов бесконечной размерности (а значит предельных точек в пространстве $\langle C_A; d\rangle$) на любом неодноэлементном множестве A, что так же следует из доказанной в предложении 3 вложимости пространства $\langle C_2; d\rangle$ с предельными точками в подобные пространства $\langle C_A; d\rangle$. Докажем теперь, что для любого бесконечного множества A пространства не компактны.

Прежде всего сформулируем некоторое хорошо известное достаточное условие не компактности топологического пространства.

Лемма 1. *Если в топологическом пространстве существует замкнутая бесконечная совокупность изолированных точек, то это пространство не компактно.*

Докажем теперь, что имеет место

Предложение 4. *Для любого бесконечного множества A пространство $\langle C_A; d\rangle$ не компактно.*

Доказательство. Пусть множество A бесконечно и $0_i, 1_i$ $(i \in \omega)$ — некоторая совокупность попарно различных элементов из A. Для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ на множестве $2 = \{0, 1\}$ определим функцию $f^i(x_1, \ldots, x_n)$ на множестве A следующим образом. Пусть $a \in A$. Положим

$$\overline{a}^i \quad = \quad \begin{cases} 1, \text{ если } a = 1_i \\ 0, \text{ если } a \neq 1_i. \end{cases}$$

Тогда для любых $a_1, \ldots, a_n \in A$

$$f^i(a_1, \ldots, a_n) \quad = \quad \begin{cases} 1_i, \text{ если } f(\overline{a}_1^i, \ldots, \overline{a}_n^i) = 1, \\ 0_i, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Пусть E_A, как и ранее, будет совокупностью всех селекторных функций на множестве A. Для любого клона G на множестве $\{0,1\}$ через G^i обозначим совокупность $\{f^i \mid f \in G\} \cup E_A$ функций на A. Непосредственно замечается, что G^i — функциональный клон на A. Более того, для любых клонов G, G_n $(n \in \omega)$ на множестве $2 = \{0,1\}$ $G = \lim\limits_{n\to\infty} G_n$ тогда и только тогда, когда $G^i = \lim\limits_{n\to\infty}(G_n)^i$. Опять воспользуемся обозначениями из работы [5]. Напомним, что через C_1 там обозначен клон всех функций на множестве $2 = \{0,1\}$, являющийся изолированной точкой пространства $< C_2; d >$. Очевидно так же, что $C_A \setminus \bigcup\limits_{i\in\omega}(C_1)^i$ — открытое в $\langle C_A; d\rangle$ множество и, значит, $\{(C_1)^i \mid i \in \omega\}$ — бесконечное замкнутое множество изолированных точек пространства $\langle C_A; d\rangle$. Тем самым, в силу утверждения леммы 1, пространства $\langle C_A; d\rangle$ не компактны для бесконечных множеств A. □

Вопрос о компактности пространств $\langle C_A; d\rangle$ для более чем двухэлементных конечных множеств A остается открытым.

Отметим, наконец, полноту любого из пространств вида $\langle C_A; d\rangle$. Действительно, пусть $F_0, \dots, F_m, \dots$ $(m \in \omega)$ — некоторая последовательность Коши из пространства $\langle C_A; d\rangle$. Таким образом для любого $n \in \omega$ существует $k_n \in \omega$ такое, что для $l, m \geq k_n$ $d(F_l, F_m) < \frac{1}{n}$, иначе говоря $(F_l)^{(n)} = (F_m)^{(n)}$. В силу того, что для любых клонов F, F' и любых $p < q \in \omega$ имеет место импликация $F^{(q)} = (F')^{(q)} \Rightarrow F^{(p)} = (F')^{(p)}$, совокупность $\bigcup\limits_{n\in\omega}(F_{k_n})^{(n)}$ очевидным образом является клоном на A и $\bigcup\limits_{n\in\omega}(F_{k_n})^{(n)} = \lim\limits_{m\to\infty} F_m$, что и доказывает полноту пространства $\langle C_A; d\rangle$. Заметим так же, что при этом

$$(*) \qquad \lim_{m\to\infty} F_m = \overset{*}{\bigcap_{m\in\omega}} F_m,$$

где $\overset{*}{\bigcap\limits_{m\in\omega}} F_m$ — совокупность тех функций, которые входят в каждое, за исключением быть может конечного числа, клонов вида F_m, $m \in \omega$. Таким образом, формула $(*)$ устанавливает взаимосвязь оператора замыкания на совокупности клонов на множестве A (в пространстве $\langle C_A; d\rangle$), с решеткой L_A.

Наконец заметим, что решеточные операции $\wedge$ и $\vee$ на пространстве $\langle C_A; d\rangle$ являются непрерывными и, значит, можно рассматривать решетку клонов L_A как топологическую решетку.

References

[1] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, 1977. Zbl 0367.14001

[2] B. I. Plotkin, *Some concepts of algebraic geometry in universal algebra*, Algebra i Analiz, **9**:4 (1997), 249–256 (in Russian). Zbl 0920.08002

[3] E. Daniyarova, A. Myasnikov, V. Remeslennikov, *Unification theorems in algebraic geometry*, In “Aspects of infinite group”, Hadensack, NY, World Sci., 2008. Zbl 1330.08003

[4] E. Post, *Two–valued iterative systems of mathematical logic*, Annals of Math. studies, **5**, Prinseton, Univ. Press, Princeton–London, 1941. Zbl 0063.06326

[5] S. V. Jablonsky, G. P. Gavrilov, V. B. Kudrjavcev, *Functions of algebra of logic and classes of Post*, M.: Nauka, 1966 (in Russian).

[6] S. V. Jablonsky, *Introduction to Discrete Mathematic*, M.: Nauka, 1979 (in Russian).

[7] Ju. I. Janov, A. A. Muchnik, *Existence of k–valued closed classes having no finite basis*, Doklady Akad. Nauk SSSR, 1959, **127**:1 (1959), 44–46 (in Russian). Zbl 0100.01001

Pinus Alexandr Georgievich
Novosibirsk State Technical University,
Prospekt K. Marksa, 20
630073, Novosibirsk, Russia
E-mail address: ag.pinus@gmail.com