

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 13, стр. 375–387 (2016)

УДК 519.1+519.173

DOI 10.17377/semi.2016.13.033

MSC 05C12

СТРОЕНИЕ ВЕКТОРА РАЗНООБРАЗИЯ ШАРОВ
ТИПИЧНОГО ГРАФА ЗАДАННОГО ДИАМЕТРА

Т.И. ФЕДОРЯЕВА

ABSTRACT. For labeled n -vertex graphs with fixed diameter $d \geq 1$, the diversity vectors of balls (the i th component of the vector is equal to the number of different balls of radius i) are studied asymptotically. An explicit description of the diversity vector of balls of a typical graph with given diameter is obtained. A set of integer vectors $\Lambda_{n,d}$ consisting of $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ different vectors for $d \geq 5$ and a unique vector for $d < 5$ is found. It is proved that almost all labeled n -vertex graphs of diameter d have the diversity vector of balls belonging to $\Lambda_{n,d}$. It is established that this property is not valid after removing any vector from $\Lambda_{n,d}$. A number of properties of a typical graph of diameter d is proved. In particular, it is obtained that such a graph for $d \geq 3$ does not possess the local 2-diversity of balls and at the same time has the local 1-diversity of balls, but has the full diversity of balls if $d = 1, 2$.

Keywords: graph, labeled graph, distance, metric ball, number of balls, diversity vector of balls, typical graph.

ВВЕДЕНИЕ

В работе изучается разнообразие шаров в метрическом пространстве обыкновенного графа. Пусть $\tau_i(G)$ — число всех различных шаров радиуса i в метрическом пространстве конечного графа $G = (V, E)$ с обычным расстоянием пути между его вершинами. Для связного графа G расстояние $\rho_G(u, v)$ между вершинами $u, v \in V$ определяется как длина кратчайшей цепи, соединяющей эти вершины, при этом $d(G) = \max_{u, v \in V} \rho_G(u, v)$ есть его диаметр.

FEDORYAeva, T.I., STRUCTURE OF THE DIVERSITY VECTOR OF BALLS OF A TYPICAL GRAPH WITH GIVEN DIAMETER.

© 2016 ФЕДОРЯЕВА Т.И.

Работа поддержана РФФИ (грант 14-01-00507).

Поступила 5 мая 2016 г., опубликована 18 мая 2016 г.

Определение 1 [5, 6]. Пусть G — связный граф и $d = d(G)$. Вектор $\tau(G) = (\tau_0(G), \tau_1(G), \dots, \tau_d(G))$ называется *вектором разнообразия шаров* графа G .

Различные свойства векторов разнообразия шаров и их компонент установлены в [2–14, 18, 19] для связных обыкновенных графов, а в [14] для несвязных графов, где понятие вектора разнообразия шаров естественным образом распространено на общий случай (включая несвязные графы). В [6] автором описаны векторы разнообразия шаров для деревьев. В [7] детально исследовались компоненты вектора разнообразия шаров и соотношения между ними в графах (деревьях) с дополнительными ограничениями на число вершин и диаметр. В частности, получены необходимые и достаточные условия реализуемости целочисленных векторов специального вида графическим разнообразием шаров. В [18] К.Л.Рычковым найден богатый класс целочисленных векторов, являющихся графическим разнообразием шаров. В [7, 8] автором установлены точные верхние оценки и точные нижние оценки числа различных шаров радиуса i в n -вершинных графах диаметра d . Эти оценки дают широкий класс целочисленных векторов, не являющихся графическим разнообразием шаров. Кроме того, для графического разнообразия шаров $(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_d)$ результаты из [11] показывают нетривиальные взаимосвязи его компонент τ_i , принимающих наибольшие возможные значения. На основе полученных точных верхних и нижних оценок числа различных шаров [7, 8] в [3] описаны векторы разнообразия шаров графов малого диаметра.

Нетрудно заметить, что для связного графа G справедлива следующая система соотношений:

$$\tau_0(G) = |V(G)| \geq \dots \geq \tau_i(G) \geq \tau_{i+1}(G) \geq \dots \geq \tau_d(G) = 1,$$

где $d = d(G)$ и $V(G)$ — множество вершин графа G . Поэтому среди всех графов естественным образом выделяются графы со специальным разнообразием шаров.

Определение 2 [2]. Граф G обладает *локальным t -разнообразием шаров*, если $|V(G)| = \tau_0(G) = \tau_1(G) = \dots = \tau_t(G)$. Граф G с локальным t -разнообразием шаров при $t = d(G) - 1$ называется графом *полного разнообразия шаров*.

Таким образом, вектор разнообразия шаров графа G с полным разнообразием шаров имеет вид $(|V(G)|, \dots, |V(G)|, 1)$. Классы графов с полным (локальным) разнообразием шаров исследованы в [6, 7, 9–13]. В [6] показано, что класс деревьев с полным разнообразием шаров является бедным, так как состоит лишь из звезды $K_{1, n-1}$, и получена характеристика деревьев с локальным разнообразием шаров. Наименьший порядок графов диаметра d с локальным t -разнообразием шаров (полным разнообразием шаров) найден в [7], а в [9] все такие графы наименьшего порядка явно описаны с точностью до изоморфизма и вычислены их векторы разнообразия шаров. В [7] также установлены все возможные значения параметров n , d и t , при которых существует n -вершинный граф диаметра d с полным разнообразием шаров (локальным t -разнообразием шаров). В [11] изучен вопрос единственности n -вершинного графа диаметра d с полным разнообразием шаров. Только при $n = 2d \geq 6$ или $d \leq 1$ существует единственный такой граф — $2d$ -вершинный цикл при $d \geq 3$ и полный граф K_n при $d \leq 1$. В [12, 13] свойство полного разнообразия шаров изучалось для помеченных n -вершинных графов в асимптотике.

В настоящей работе исследуется строение вектора разнообразия шаров типичного n -вершинного графа заданного диаметра и асимптотическое поведение числа n -вершинных графов с полным (локальным) разнообразием шаров. Заметим, что для очевидных случаев $d = 1, 2$ вектор разнообразия шаров типичного графа диаметра d имеет вид $(\tau_0, \dots, \tau_{d-1}, 1)$, где $\tau_0 = \dots = \tau_{d-1}$. В связи с этим для графов заданного диаметра $d \geq 3$ в [12] были поставлены следующие вопросы:

- а) обладает ли полным разнообразием шаров типичный граф диаметра d ?
- б) если не обладает, то какое строение имеет вектор разнообразия шаров типичного графа диаметра d ?

Для графов диаметра 3 эти вопросы решены в [12]. В настоящей работе получен ответ для произвольного диаметра d . В разд. 2 строится класс помеченных n -вершинных графов диаметра $d \geq 3$ (теорема 4) и далее устанавливается ряд свойств типичного графа. В разд. 3 исследуется разнообразие шаров типичного графа диаметра d . Для произвольных $d \geq 1$ и $n \in \mathbb{N}$ определен набор целочисленных векторов $\Lambda_{n,d}$ длины $d+1$, состоящий из $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ различных векторов при $d \geq 5$ и единственного вектора при $d < 5$. Доказано, что почти все помеченные n -вершинные графы диаметра d имеют вектор разнообразия шаров из $\Lambda_{n,d}$ (теорема 5). Установлено, что при удалении любого вектора из $\Lambda_{n,d}$ это свойство не выполняется (теорема 6), и в этом смысле теорема 5 не улучшаема. Таким образом, получено явное описание вектора разнообразия шаров типичного графа заданного диаметра d . Кроме того, при исследовании графов фиксированного диаметра с большим числом вершин выяснено расположение центров всех различных шаров заданного радиуса в типичном графе. Как следствие доказано, что такой граф при $d \geq 3$ не обладает локальным 2-разнообразием шаров и, в частности, не является графом полного разнообразия шаров, но при этом обладает локальным 1-разнообразием шаров (следствие 4). Однако, как уже отмечалось, в случае $d = 1, 2$ типичный граф есть граф полного разнообразия шаров.

В статье используются общепринятые понятия и обозначения теории графов [1, 17], а также стандартные понятия комбинаторного анализа, применяемые в теории графов [1]. Рассматриваются только конечные обыкновенные (без петель и кратных рёбер) графы $G = (V, E)$ с множеством вершин $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Как обычно, через $B_i^G(v) = \{u \in V \mid \rho_G(v, u) \leq i\}$ обозначим шар радиуса i с центром в вершине $v \in V$ в метрическом пространстве графа G с метрикой пути ρ_G , $\deg_G v$ — степень вершины v графа G . Вершина v графа G называется *висячей*, если $\deg_G v = 1$, кратчайшая цепь длины $d(G)$ — *диаметральной цепью* графа G , а её концы — *диаметральными вершинами*. Будем писать $f(n) \lesssim g(n)$, если существует такое $N \in \mathbb{N}$, что $f(n) \leq g(n)$ для всех $n \geq N$. Запись $f(n) \sim g(n)$ означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$, т.е. функции $f(n)$ и $g(n)$ асимптотически равны при $n \rightarrow \infty$.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В [14] понятие вектора разнообразия шаров распространено на случай несвязных графов (полагаем $\rho_G(x, y) = \infty$, если в графе G не существует цепи, соединяющей вершины x, y). Пусть $k(G)$ — число компонент связности графа G и d_G — наибольшая длина кратчайших цепей графа G . Очевидно, что $d_G = d(G)$ в случае связного графа G . Вектор $\tau(G) = (\tau_0(G), \tau_1(G), \dots, \tau_d(G))$

называется *вектором разнообразия шаров* графа G (не обязательно связного). Будем использовать следующие свойства шаров, полученные в [14].

Лемма 1 [14]. Пусть $\tau(G) = (\tau_0, \dots, \tau_{d_G})$ — вектор разнообразия шаров графа G и $G_1, \dots, G_{k(G)}$ — компоненты связности G . Тогда

- (i) $\tau_0 = |V(G)| \geq \tau_1 \geq \dots \geq \tau_i \geq \tau_{i+1} \geq \dots \geq \tau_{d_G} = k(G)$;
- (ii) $d_G = \min\{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \tau_i = k(G)\}$.

Условие совпадения шаров с различными центрами произвольного графа G дает критерий, найденный в [14] и использующий определенную следующим образом матрицу $\mathcal{E}(G) = (\varepsilon_{uv}^G)_{u,v \in V(G)}$. Если $u = v$ или $\rho_G(u, v) = \infty$, считаем $\varepsilon_{uv}^G = \rho_G(u, v)$. При $0 < \rho_G(u, v) < \infty$ полагаем

$$V_{uv}^G = \{w \in V(G) \mid \rho_G(u, w) \neq \rho_G(v, w), \rho_G(u, w) < \infty, \rho_G(v, w) < \infty\},$$

$$\varepsilon_{uv}^G = \max\{\rho_G(u, w) - 1, \rho_G(v, w) - 1 \mid w \in V_{uv}^G\}.$$

Теорема 1 [14] (критерий совпадения шаров). Пусть u, v — вершины графа G и $i \in \mathbb{Z}_{>0}$. Тогда выполняется следующая эквивалентность

$$B_i^G(u) = B_i^G(v) \Leftrightarrow \varepsilon_{uv} < i.$$

В [6] введен вектор $\Delta_d = (\Delta_0^d, \Delta_1^d, \dots, \Delta_d^d)$, где

$$\Delta_i^d = \begin{cases} d+1, & \text{при } 0 \leq i \leq \lfloor d/2 \rfloor, \\ 2(d-i)+1, & \text{при } \lfloor d/2 \rfloor < i < d, \\ 1, & \text{при } i \geq d, \end{cases}$$

и вычислен вектор разнообразия простой цепи.

Лемма 2 [6]. Пусть P — простая цепь длины d . Тогда

- (i) вектор разнообразия шаров цепи P равен $\Delta_d = (\Delta_0^d, \Delta_1^d, \dots, \Delta_d^d)$;
- (ii) если $x, y \in V(P)$, $x \neq y$ и $B_l^P(x) = B_l^P(y)$, то $B_l^P(x) = V(P)$.

Нам потребуется следующее

Определение 3 [4]. Граф $V_k(u, v)$, изображенный на рис. 1а, называется *воланом на вершинах u, v* . Граф G имеет *волан*, если в G есть подграф $V_k(u, v)$ и $\deg_G u = \deg_G v = k+1$ (рис. 1б).

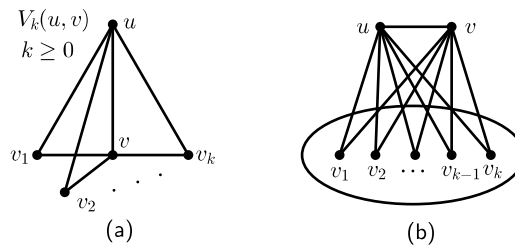


Рис. 1. Волан

Замечание 1 [4]. В произвольном графе G шары радиуса 1 с различными центрами u, v совпадают тогда и только тогда, когда G имеет волан на u, v .

Пусть \mathcal{J}_n — класс помеченных n -вершинных графов с фиксированным множеством вершин $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Через $\mathcal{J}_{n,d}$ обозначим класс всех графов из \mathcal{J}_n диаметра d . В [12] при исследовании разнообразия шаров в графах автором рассмотрен класс \mathcal{T}_n всех графов из $\mathcal{J}_{n,3}$, которые не содержат воланов и имеют единственную пару диаметральных вершин. Очевидно, что \mathcal{T}_n есть объединение подклассов $\mathcal{T}_n(x, y)$ по всем $x, y \in V$, где $\mathcal{T}_n(x, y)$ — класс всех графов из \mathcal{T}_n , в которых x, y являются диаметральными вершинами. В настоящей работе будем использовать полученные в [12] оценки числа графов из $\mathcal{T}_n(x, y)$, а также следующего подкласса помеченных n -вершинных графов:

$$a_n = |\{G \in \mathcal{J}_n \mid B_1^G(x) \cap B_1^G(y) = \emptyset\}| = 2^{\binom{n}{2}} \frac{8}{9} \left(\frac{3}{4}\right)^n, \text{ где } x, y \in V \text{ и } x \neq y \text{ [12].}$$

Лемма 3 [12]. Пусть x, y — различные вершины из V и $c > 0$, $0 < \varepsilon < 1$ — произвольные константы, не зависящие от n . Тогда

$$|\mathcal{T}_n(x, y)| \gtrsim a_n \left(1 - c \left(\frac{5 + \varepsilon}{6}\right)^{n-2}\right).$$

Нам потребуется асимптотика (только верхняя оценка с таким асимптотическим приближением) числа помеченных n -вершинных графов заданного диаметра $d \geq 3$, приведенная в теореме 2. Пусть $(n)_d$ есть число упорядоченных размещений из n элементов по d , т.е. $(n)_d = n(n-1) \cdots (n-d+1)$, и

$$\xi_{n,d} = q_d (n)_{d-1} \left(\frac{3}{2^{d-1}}\right)^{n-d+1}, \quad q_d = \frac{1}{2} (d-2) 2^{-\binom{d-1}{2}},$$

при этом считаем $(n)_d = 0$ при $n < d$ и $(n)_0 = (0)_0 = 1$.

Теорема 2 [15, 16]. Пусть $d \geq 3$. Тогда $|\mathcal{J}_{n,d}| = 2^{\binom{n}{2}} \xi_{n,d} (1 + r(n))$, где погрешность асимптотического приближения $r(n)$ есть $o(1)$ при $n \rightarrow \infty$.

Отметим, что асимптотика $2^{\binom{n}{2}} \xi_{n,d}$ числа помеченных n -вершинных графов диаметра $d \geq 3$ впервые была установлена в [16], а в [15] найдено более точное асимптотическое приближение этого числа $|\mathcal{J}_{n,d}|$ с погрешностью приближения $|r(n)| \leq c_k \left(\frac{5+\varepsilon}{6}\right)^n$, где $0 < \varepsilon < 1$ — произвольная наперед выбранная ошибка и $c_k > 0$ — константа, не зависящая от n и указанная явно.

2. КЛАСС ГРАФОВ $\mathcal{F}_{n,d}$

В этом разделе рассмотрим подкласс $\mathcal{F}_{n,d}$ класса помеченных n -вершинных графов фиксированного диаметра $d \geq 3$. Для определения этого класса сначала рассмотрим графы диаметра 3. Пусть $x, y \in V$ и $\mathcal{F}_{n,3}(x, y)$ — класс всех графов $F \in \mathcal{J}_n$, обладающих следующими свойствами:

- а) вершины x, y не являются висячими в F ;
- б) $\rho_F(z, x) = \rho_F(z, y) = 2$ для некоторой вершины $z \in V$;
- с) граф $F \in \mathcal{J}_{n,3}$ не содержит воланов и имеет единственную пару диаметральных вершин x, y .

Заметим, что $\mathcal{F}_{n,3}(x, y) = \emptyset$ при $n < 7$ и $\mathcal{F}_{n,3}(x, y) \neq \emptyset$ при $n \geq 7$, $x \neq y$. Простейший пример графа класса $\mathcal{F}_{n,3}(x, y)$ изображен на рис. 2. Отметим, что графы, обладающие только свойством с) образуют класс $\mathcal{T}_n(x, y)$, рассмотренный автором в [12]. Оценим число графов класса $\mathcal{F}_{n,3}(x, y)$.

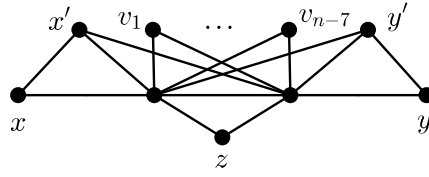


Рис. 2. Граф F_n класса $\mathcal{F}_{n,3}(x, y)$

Лемма 4. Пусть $x, y \in V, x \neq y$ и $c > 0, 0 < \varepsilon < 1$ — произвольные константы, не зависящие от n . Тогда

$$|\mathcal{F}_{n,3}(x, y)| \gtrsim a_n \left(1 - c \left(\frac{5 + \varepsilon}{6}\right)^{n-2}\right).$$

Доказательство. Будем использовать следующее тождество биномиальных коэффициентов:

$$\binom{n - m}{2} = \binom{n}{2} - nm + \frac{m(m + 1)}{2}.$$

Очевидно, что число помеченных n -вершинных графов, имеющих фиксированную висячую вершину, равно

$$(n - 1) 2^{\binom{n-1}{2}} = a_n \frac{9}{4} (n - 1) \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Рассмотрим класс $\mathcal{K}_n(x, y)$ всех графов из \mathcal{J}_n , в которых шары $B_1^G(x), B_1^G(y)$ образуют разбиение множества вершин V , т.е.

$$\mathcal{K}_n(x, y) = \{G \in \mathcal{J}_n \mid B_1^G(x) \cap B_1^G(y) = \emptyset, B_1^G(x) \cup B_1^G(y) = V\}.$$

Подсчитаем число графов класса $\mathcal{K}_n(x, y)$. Выберем произвольное подмножество $X \subseteq V \setminus \{x, y\}$ и соединим ребром вершину x с каждой вершиной из X , а вершину y с каждой вершиной из $V \setminus (X \cup \{x, y\})$. На вершинах множества $V \setminus \{x, y\}$ определим произвольный граф. Таким образом построим все графы класса $\mathcal{K}_n(x, y)$. Поэтому

$$|\mathcal{K}_n(x, y)| = 2^{n-2} 2^{\binom{n-2}{2}} = a_n \frac{9}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Следовательно, используя лемму 3, получаем

$$|\mathcal{F}_{n,3}(x, y)| \geq |\mathcal{T}_n(x, y)| - a_n \frac{9}{2} n \left(\frac{2}{3}\right)^n \gtrsim a_n \left(1 - c \left(\frac{5 + \varepsilon}{6}\right)^{n-2}\right).$$

□

Теперь при $d \geq 3$ определим подкласс класса $\mathcal{J}_{n,d}$ следующим образом. Пусть $u = (u_0, u_1, \dots, u_{d-2})$ — произвольная упорядоченная последовательность различных вершин из множества V . Для выбора такой последовательности имеется $(n)_{d-1}$ возможностей. Зафиксируем произвольную пару соседних элементов u_s и u_{s+1} , это можно сделать $d - 2$ способами. На множестве $V \setminus \{u_0, \dots, u_{s-1}, u_{s+2}, \dots, u_{d-2}\}$ из $n - d + 3$ вершин определим произвольный граф F из класса $\mathcal{F}_{n-d+3,3}(u_s, u_{s+1})$. Наконец, соединим ребрами вершины u_i, u_{i+1} при $i \neq s$ и $0 \leq i < d - 2$. Полученный граф обозначим через $G(u, s, F)$. В дальнейшем будем использовать это обозначение для графа, построенного при заданных u, s и F , без указания на свойства самих u, s, F .

Лемма 5 (свойства графа $G(u, s, F)$). Пусть $d \geq 3$ и $G = G(u, s, F)$. Тогда выполняются следующие свойства:

- (i) $G \in \mathcal{J}_{n,d}$;
- (ii) граф G не содержит воланов;
- (iii) $\rho_G(z, u_s) = \rho_G(z, u_{s+1}) = 2$ для некоторой вершины $z \in V(F)$;
- (iv) вершины u_s, u_{s+1} не являются висячими в F ;

(v) u_0, u_{d-2} — единственная пара диаметральных вершин графа G и для любой его диаметральной цепи P имеем $u_0, u_1, \dots, u_{d-2} \in V(P)$.

Доказательство. Непосредственно из построения и свойства с) графа F вытекает (i). В силу замечания 1 и свойства с) графа F в G нет воланов. Из свойств а), б) графа F получаем (iii), (iv). В силу свойства с) граф F имеет единственную пару диаметральных вершин, поэтому таким же свойством обладают диаметральные вершины графа G . \square

Пусть $\mathcal{F}_{n,d}$ — класс всех построенных графов $G(u, s, F)$ при условии $0 \leq s \leq \lfloor \frac{d-3}{2} \rfloor$ (отметим, что это условие далее будет существенным образом использоваться при исследовании разнообразия шаров). Графы класса $\mathcal{F}_{n,d}$ являются модификацией графов, рассмотренных в [15]. Класс всех графов $G(u, s, F)$, где $\lceil \frac{d-3}{2} \rceil \leq s \leq d-3$ или эквивалентно $d-3-s \leq s \leq d-3$, обозначим через $\mathcal{F}_{n,d}^*$. Подсчитаем число графов в $\mathcal{F}_{n,d}$.

Лемма 6. Пусть $d \geq 3$ и x, y — различные вершины из V . Тогда

- (i) $\mathcal{F}_{n,d} \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{F}_{n-d+3,3}(x, y) \neq \emptyset \Leftrightarrow n \geq d+4$;
- (ii) $|\mathcal{F}_{n,d}| = \frac{1}{2}(d-2)(n)_{d-1} |\mathcal{F}_{n-d+3,3}(x, y)|$.

Доказательство. Используя условие, при котором класс $\mathcal{F}_{n,3}(x, y)$ не является пустым, и построение графов $G(u, s, F)$, получаем утверждение (i).

В силу леммы 5(v) графы класса $\mathcal{F}_{n,d}$ имеют единственную пару диаметральных вершин. Более того, часть диаметральной цепи графа $G(u, s, F)$ от заданной диаметральной вершины до первой встречающейся вершины v из F можно однозначно восстановить, зная ребра графа $G(u, s, F)$, поскольку $\deg_F v \geq 2$ по лемме 5(iv). Следовательно, вышеописанный способ построения графов класса $\mathcal{F}_{n,d}$ может привести к повтору помеченного графа $G(u, s, F)$ только в случае построения графа $G(u', s', F')$, где u' — последовательность u , записанная в обратном порядке, $s' = d-3-s$ и F' — "перевернутый" граф F . Заметим, что в случае использования класса $\mathcal{T}_n(x, y)$ вместо $\mathcal{F}_{n,3}(x, y)$ это свойство не выполняется, и возникают дополнительные повторы графов (это одна из причин рассмотрения класса $\mathcal{F}_{n,3}(x, y)$ в настоящей работе, важны также другие свойства, необходимые для исследования разнообразия шаров). Кроме того, для каждой повторяющейся пары графов $G(u, s, F) = G(u', s', F')$ имеем $s + s' = d-3$. Поэтому этот помеченный граф принадлежит классу $\mathcal{F}_{n,d}$ и $\mathcal{F}_{n,d} = \mathcal{F}_{n,d}^*$. Для подсчета числа графов в $\mathcal{F}_{n,d}$ остается обратиться к построению графа $G(u, s, F)$ и учесть число всех указанных возможностей. \square

Рассмотрим класс $\mathcal{F}_{n,d}^s$ всех графов $G(u, s, F)$, построенных при фиксированном $s \leq d-3$. Непосредственно из доказательства леммы 6 получаем следующее следствие.

Следствие 1. Пусть $d \geq 3$ и $0 \leq s \leq d - 3$. Тогда

$$|\mathcal{F}_{n,d}^s| = \frac{\delta(s)}{d-2} |\mathcal{F}_{n,d}|, \text{ где}$$

$$\delta(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } s = \frac{d-3}{2}, \\ 2, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Теорема 3. Пусть $d \geq 3$ и $0 < \varepsilon < 1$. Тогда существует такая константа $c > 0$, не зависящая от n и d , что для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливы следующие неравенства:

$$|\mathcal{J}_{n,d}| \geq |\mathcal{F}_{n,d}| \geq 2^{\binom{n}{2}} \xi_{n,d} \left(1 - c \left(\frac{5+\varepsilon}{6}\right)^{n-d+1}\right).$$

Доказательство. По лемме 5(i) имеем $|\mathcal{J}_{n,d}| \geq |\mathcal{F}_{n,d}|$. В силу леммы 4 существует такое $N > 0$, не зависящее от n и d , что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|\mathcal{F}_{n,3}(x,y)| \geq a_n \left(1 - \left(\frac{5+\varepsilon}{6}\right)^{n-2}\right).$$

Полагаем $c = \left(\frac{6}{5+\varepsilon}\right)^{N-1}$. Тогда, учитывая лемму 6, для любого $n > N + d - 3$ получаем

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_{n,d}| &\geq \frac{1}{2} (d-2) (n)_{d-1} 2^{\binom{n-d+3}{2}} \frac{8}{9} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-d+3} \left(1 - \left(\frac{5+\varepsilon}{6}\right)^{n-d+1}\right) \\ &= 2^{\binom{n}{2}} q_d (n)_{d-1} \left(\frac{3}{2^{d-1}}\right)^{n-d+1} \left(1 - \left(\frac{5+\varepsilon}{6}\right)^{n-d+1}\right) \\ &\geq 2^{\binom{n}{2}} \xi_{n,d} \left(1 - c \left(\frac{5+\varepsilon}{6}\right)^{n-d+1}\right). \end{aligned}$$

Пусть теперь $n \leq N + d - 3$. Тогда $c \left(\frac{5+\varepsilon}{6}\right)^{n-d+1} > 1$. Следовательно, требуемое неравенство очевидно. \square

В [12] изложен подход к определению класса типичных комбинаторных объектов и абстрактного типичного комбинаторного объекта для заданного класса объектов, допускающих понятие размерности. Приведем его для графов, когда под размерностью графа понимается число его вершин (в настоящей работе придерживаемся именно такого определения, разумеется возможны другие определения размерности графа). Пусть Ω — произвольный класс графов такой, что $\Omega_n \neq \emptyset$ для всех достаточно больших n , где $\Omega_n = \Omega \cap \mathcal{J}_n$. Подкласс $\Omega^* \subseteq \Omega$ есть класс типичных графов класса Ω , если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\Omega_n^*|}{|\Omega_n|} = 1$. Примечательно, что пересечение классов типичных графов Ω^* и Ω^{**} для класса Ω снова будет классом типичных графов, а доля графов из $\Omega^* \setminus \Omega^{**}$ и $\Omega^{**} \setminus \Omega^*$ асимптотически мала. Поэтому если Ω^i , $i = 1, \dots, m$, — классы типичных графов для Ω , и при любом i все графы из Ω^i обладают некоторым свойством, то графы из пересечения $\bigcap_{1 \leq i \leq m} \Omega^i$ этих классов также будут обладать указанным свойством и образовывать класс типичных графов для Ω . Именно поэтому можно говорить об абстрактном типичном графе класса Ω и его свойствах, опуская указание на наличие самого класса Ω^* (типичных для Ω) графов с этими свойствами. Таким образом, типичный граф класса Ω обладает заданным свойством, если этим свойством будут обладать все графы некоторого класса Ω^* и при этом Ω^* — класс типичных графов для Ω .

Теорема 4. Пусть $d \geq 3$. Тогда $\mathcal{F}_{n,d}$ — класс типичных n -вершинных графов диаметра d .

Доказательство. Используя верхнюю оценку числа $\mathcal{J}_{n,d}$ из теоремы 2 и нижнюю оценку числа $\mathcal{F}_{n,d}$ из теоремы 3 при $n \rightarrow \infty$ получаем

$$\frac{|\mathcal{F}_{n,d}|}{|\mathcal{J}_{n,d}|} \geq \frac{1 - o(1)}{1 + o(1)}.$$

□

Непосредственно из теорем 2, 4 и леммы 5(v) вытекают следующие следствия.

Следствие 2. Пусть $d \geq 3$. Тогда $|\mathcal{F}_{n,d}| \sim 2^{\binom{n}{2}} \xi_{n,d}$.

Следствие 3. Пусть $d \geq 3$. Тогда типичный граф диаметра d имеет единственную пару диаметральных вершин.

3. РАЗНООБРАЗИЕ ШАРОВ ТИПИЧНОГО ГРАФА

Исследуем свойства шаров в графах $G(u, s, F)$, построенных в разд. 2, где $u = (u_0, \dots, u_{d-2})$ — упорядоченная последовательность различных вершин из V , $0 \leq s \leq \lfloor \frac{d-3}{2} \rfloor$ и $F \in \mathcal{F}_{n-d+3,3}(u_s, u_{s+1})$. Для обозначения кратчайшей цепи P с концами v_1, v_k и последовательно проходящей через вершины v_1, v_2, \dots, v_k будем использовать запись $P = (v_1, v_2, \dots, v_k)$.

Лемма 7 (свойства шаров графа $G(u, s, F)$). Пусть $d \geq 3$, $G = G(u, s, F) \in \mathcal{F}_{n,d}$ и $P = (u_0, \dots, u_s, u'_s, u'_{s+1}, u_{s+1}, \dots, u_{d-2})$ — диаметральный цепь графа G . Тогда справедливы следующие свойства:

- (i) если $x \in V(F)$ и $\rho_F(x, u_s) = 1$, то $B_i^G(x) = B_i^G(u'_s)$ для любого $i \geq 2$;
- (ii) если $x \in V(F)$ и $\rho_F(x, u_{s+1}) = 1$, то $B_i^G(x) = B_i^G(u'_{s+1})$ для любого $i \geq 2$;
- (iii) если $x, y \in V(F)$ и $\rho_F(x, u_s) = \rho_F(x, u_{s+1}) = \rho_F(y, u_s) = \rho_F(y, u_{s+1}) = 2$, то выполняются следующие соотношения:

$$B_i^G(x) = B_i^G(y) \text{ при } i \geq 2,$$

$$B_i^G(x) = B_i^G(u'_s) \text{ при } i \geq s + 2,$$

$$B_{s+1}^G(x) \neq B_{s+1}^G(u), \text{ если } u \in V(P);$$

- (iv) если $x, y \in V(P)$ и $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, то выполняется эквивалентность:

$$B_i^P(x) = B_i^P(y) \Leftrightarrow B_i^G(x) = B_i^G(y).$$

Доказательство. Очевидно, что F — изометричный подграф графа G и выполняются равенства $\rho_G(u_0, u_s) = s$, $\rho_G(u_{s+1}, u_{d-2}) = d - 3 - s$.

Докажем утверждение (i). Пусть $\rho_F(x, u_s) = 1$. Тогда $\rho_G(x, u_{s+1}) = 2$ в силу свойства с) графа F и неравенства треугольника. Поэтому $V_{xu'_s}^G \subseteq V(F)$. Следовательно, используя свойство с) графа F , получаем $\varepsilon_{xu'_s}^G \leq 1$. По теореме 1 заключаем $B_i^G(x) = B_i^G(u'_s)$ для любого $i \geq 2$. Утверждение (ii) доказывается аналогично.

Пусть вершины $x, y \in V(F)$ удовлетворяют условию утверждения (iii). Различные расстояния от x и y до одной вершины w могут быть реализованы только при условии $w \in V(F)$. Поэтому $V_{xy}^G \subseteq V(F)$. Как в (i) получаем $\varepsilon_{xy}^G \leq 1$. Следовательно, $B_i^G(x) = B_i^G(y)$ при $i \geq 2$ по теореме 1.

Очевидно, что

$$V_{xu'_s}^G \subseteq V \setminus \{u_{s+1}, u_{s+2}, \dots, u_{d-2}\}.$$

Следовательно, используя свойство с) графа F , получаем $\rho_G(x, w) \leq s + 2$ и $\rho_G(u'_s, w) \leq s + 2$ для любой вершины $w \in V_{xu'_s}^G$, причем $u_0 \in V_{xu'_s}^G$. Тогда

$$\varepsilon_{xu'_s}^G = \rho_G(x, u_0) - 1 = s + 1.$$

По теореме 1 имеем $B_i^G(x) = B_i^G(u'_s)$ при $i \geq s + 2$.

Пусть теперь $u \in V(P)$. Поскольку $0 \leq s \leq \lfloor \frac{d-3}{2} \rfloor$, имеем $\rho_G(u_0, u_s) \leq \rho_G(u_{s+1}, u_{d-2})$. Нетрудно понять, что если $\rho_G(x, u) \leq s + 2$, то

$$v \in B_{s+1}^G(u) \setminus B_{s+1}^G(x), \text{ где } v \in \{u_0, u_{2s+1}\}.$$

Докажем утверждение (iv). Пусть $B_i^P(x) = B_i^P(y)$ и $x \neq y$. В силу леммы 2(ii) имеем $B_i^P(x) = V(P)$. Поскольку $d \geq 3$, выполняется неравенство $i \geq 2$. Тогда, используя свойство с) графа F , получаем $B_i^G(x) = V(G)$. Аналогично, имеем равенство $B_i^G(y) = V(G)$. Обратное утверждение следует из изометричности подграфа P графа G . \square

Для произвольных $d \geq 1$ и $n \in \mathbb{N}$ определим набор $\Lambda_{n,d}$ из целочисленных векторов длины $d + 1$. Для $d = 1, 2$ этот набор содержит единственный вектор $\Lambda_{n,1}^0 = (n, 1)$ и $\Lambda_{n,2}^0 = (n, n, 1)$ соответственно. При $d \geq 3$ набор $\Lambda_{n,d}$ состоит из векторов $\Lambda_{n,d}^s$, $s = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{d-3}{2} \rfloor$, где $\Lambda_{n,d}^s = (\Lambda_{n,d,0}^s, \Lambda_{n,d,1}^s, \dots, \Lambda_{n,d,d}^s)$ и

$$\Lambda_{n,d,i}^s = \begin{cases} n, & \text{если } i = 0, 1, \\ d + 2, & \text{если } 2 \leq i < s + 2, \\ \Delta_i^d, & \text{если } s + 2 \leq i \leq d. \end{cases}$$

Например, в случае $d = 3, 4$ набор $\Lambda_{n,d}$ также состоит из единственного вектора $\Lambda_{n,3}^0 = (n, n, 3, 1)$ и $\Lambda_{n,4}^0 = (n, n, 5, 3, 1)$ соответственно.

Лемма 8. Пусть $d \geq 3$, $n \geq d + 2$ и $0 \leq s \leq \lfloor \frac{d-3}{2} \rfloor$. Тогда

(i) выполняются следующие соотношения:

$$n = \Lambda_{n,d,0}^s = \Lambda_{n,d,1}^s \geq \dots \geq \Lambda_{n,d,i}^s \geq \dots \geq \Lambda_{n,d,d-1}^s = 3 > \Lambda_{n,d,d}^s = 1;$$

(ii) $\Lambda_{n,d}^s$, $s = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{d-3}{2} \rfloor$, — различные векторы.

Доказательство. Очевидно, что $2 \leq s + 2 \leq d - 1$. Из формулы для Δ_i^d получаем $\Lambda_{n,d,d-1}^s = \Delta_{d-1}^d = 3$ и $\Lambda_{n,d,d}^s = \Delta_d^d = 1$, а все неравенства из (i) вытекают из лемм 1, 2.

Докажем утверждение (ii). Пусть $0 \leq s < s' \leq \lfloor \frac{d-3}{2} \rfloor$. Тогда

$$\Lambda_{n,d,s+2}^s = \Delta_{s+2}^d = d + 1 < d + 2 = \Lambda_{n,d,s+2}^{s'}.$$

Поэтому $\Lambda_{n,d}^s \neq \Lambda_{n,d}^{s'}$. \square

Лемма 9. Пусть $d \geq 3$ и $G = G(u, s, F) \in \mathcal{F}_{n,d}$. Тогда $n \geq d + 4$ и $\tau(G) = \Lambda_{n,d}^s$.

Доказательство. По лемме 6(i) получаем $n \geq d + 4$. В силу леммы 5(ii) в G нет воланов. По замечанию 1 имеем $\tau_i(G) = n$ при $i = 0, 1$.

Пусть теперь $i \geq 2$ и P — диаметральная цепь графа G . Тогда $u_s, u_{s+1} \in V(P)$ в силу леммы 5(v). По лемме 5(iii) существует вершина $z \in V(F)$ такая, что $\rho_G(z, u_s) = \rho_G(z, u_{s+1}) = 2$. Если $x \in V(F) \setminus \{u_s, u_{s+1}\}$, то в силу свойства с) графа F и утверждений (i)–(iii) леммы 7 получаем $B_i^G(x) = B_i^G(u)$ для

некоторой вершины $u \in V(P) \cup \{z\}$. Поэтому центры всех различных шаров радиуса i графа G можно выбрать из множества $V(P) \cup \{z\}$. По утверждениям (iii),(iv) леммы 7 и лемме 1 получаем $\tau_i(G) = \tau_i(P) + 1$ при $2 \leq i \leq s + 1$ и $\tau_i(G) = \tau_i(P)$ при $s + 2 \leq i \leq d$. Заметим, что $s + 1 \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$. Остается применить лемму 2(i) и формулу вычисления Δ_i^d для $\tau_i(P)$. \square

Замечание 2. Если $d \geq 3$, $n \geq d + 4$, $0 \leq s \leq \lfloor \frac{d-3}{2} \rfloor$ и F_{n-d+3} — граф, изображенный на рис. 2, то вектор разнообразия шаров графа $G(u, s, F_{n-d+3})$ равен $\Lambda_{n,d}^s$.

Теорема 5. Вектор разнообразия шаров типичного n -вершинного графа фиксированного диаметра d принадлежит $\Lambda_{n,d}$.

Доказательство. Для $d = 1, 2$ справедливость теоремы замечена в [12]. При $d \geq 3$ в силу теоремы 4 достаточно показать, что вектор разнообразия шаров произвольного графа из класса $\mathcal{F}_{n,d}$ равен $\Lambda_{n,d}^s$ для некоторого $s \leq \lfloor \frac{d-3}{2} \rfloor$. Пусть $G \in \mathcal{F}_{n,d}$. Тогда $G = G(u, s, F)$ и $s \leq \lfloor \frac{d-3}{2} \rfloor$. По лемме 9 получаем $\tau(G) = \Lambda_{n,d}^s$. \square

Отметим, что значения компонент вектора разнообразия шаров типичного графа заданного диаметра при больших радиусах были ранее анонсированы в [13] (теорема 4).

Заметим, что при $d \geq 3$, $n \geq d + 4$ и $s \leq \lfloor \frac{d-3}{2} \rfloor$ в силу леммы 8(i) выполняется неравенство $\Lambda_{n,d,0}^s > \Lambda_{n,d,d-1}^s$. Следовательно, типичный граф диаметра $d \geq 3$ не обладает полным разнообразием шаров. Более того, справедливо следующее следствие.

Следствие 4. Пусть $d \geq 3$. Тогда типичный граф диаметра d не обладает локальным 2-разнообразием шаров и, в частности, не является графом полного разнообразия шаров, при этом обладает локальным 1-разнообразием шаров.

Доказательство. Поскольку $\Lambda_{n,d,0}^s = \Lambda_{n,d,1}^s$ для любого $s \leq \lfloor \frac{d-3}{2} \rfloor$, то типичный граф диаметра d обладает локальным 1-разнообразием шаров.

Пусть, от противного, для класса графов фиксированного диаметра $d \geq 3$ существует класс типичных графов Ω такой, что любой граф из Ω обладает локальным 2-разнообразием шаров. В силу теоремы 5 в Ω найдется подкласс Ω^* такой, что Ω^* — также класс типичных графов диаметра d , и вектор разнообразия шаров любого графа из Ω_n^* принадлежит набору $\Lambda_{n,d}$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\Omega_n^*|}{|\mathcal{J}_{n,d}|} = 1.$$

Следовательно, $\Omega_n^* \neq \emptyset$ для всех достаточно больших n . Поэтому существует граф $G \in \Omega_n^*$ такой, что $\tau_2(G) = n \geq d + 3$ в силу свойства 2-разнообразия шаров. С другой стороны, для некоторого $s \leq \lfloor \frac{d-3}{2} \rfloor$ имеем $\tau_2(G) = \Lambda_{n,d,2}^s \leq d + 2$. Пришли к противоречию. \square

Следствие 5. Типичный граф диаметра $d \leq 2$ обладает полным разнообразием шаров.

Таким образом, набор векторов $\Lambda_{n,d}$ дает все векторы разнообразия шаров типичного графа фиксированного диаметра d . Следующая теорема показывает,

что при удалении любого вектора $\Lambda_{n,d}^m$ из набора $\Lambda_{n,d}$ это свойство нарушается, т.е. в этом смысле теорема 5 не улучшаема. При $d = 1, 2$ это очевидно. Для $d \geq 3$ рассмотрим класс графов

$$\tilde{\mathcal{F}}_d^m = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\mathcal{F}}_{n,d}^m, \text{ где}$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_{n,d}^m = \{G \in \mathcal{J}_{n,d} \mid \tau(G) = \Lambda_{n,d}^s \text{ для некоторого } s \leq \lfloor (d-3)/2 \rfloor \text{ и } s \neq m\}.$$

Теорема 6. Пусть $d \geq 3$ и $0 \leq m \leq \lfloor \frac{d-3}{2} \rfloor$. Тогда любой подкласс класса графов $\tilde{\mathcal{F}}_d^m$ не является классом типичных графов диаметра d .

Доказательство. Рассмотрим произвольный граф $G \in \mathcal{F}_{n,d}^m$. Тогда имеем $G = G(u, m, F)$, причем $m \leq \lfloor \frac{d-3}{2} \rfloor$. Следовательно, $G \in \mathcal{F}_{n,d}$. По лемме 9 получаем $\tau(G) = \Lambda_{n,d}^m$ и $n \geq d+4$. В силу леммы 8(ii) все векторы набора $\Lambda_{n,d}$ различны, поэтому заключаем $G \notin \tilde{\mathcal{F}}_{n,d}^m$. Кроме того, по лемме 5(i) имеем $G \in \mathcal{J}_{n,d}$. Таким образом, доказали следующее включение

$$\mathcal{F}_{n,d}^m \subseteq \mathcal{J}_{n,d} \setminus \tilde{\mathcal{F}}_{n,d}^m.$$

Далее по теореме 4 и следствию 1 получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\mathcal{F}_{n,d}^m|}{|\mathcal{J}_{n,d}|} = \frac{\delta(m)}{d-2} \neq 0.$$

Следовательно, класс $\tilde{\mathcal{F}}_d^m$, а значит, и любой его подкласс, не является классом типичных графов диаметра d . \square

В заключение автор выражает признательность рецензенту за ценные замечания и поддержку.

REFERENCES

- [1] V.A. Emelichev, O.I. Melnikov, V.I. Sarvanov, and R.I. Tyshkevich, *Lectures on Graph Theory*, B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1994.
- [2] A.A. Evdokimov, *Locally isometric embeddings of graphs and the metric prolongation property*, Discrete Anal. and Oper. Research, **1** (1995), 7–14, translated from Sibirsk. Zhur. Issled. Oper., **1**:1 (1994), 5–12. Zbl 0839.05036 MR1292833
- [3] A.A. Evdokimov, T.I. Fedoryaeva, *On the problem of characterizing the diversity vectors of balls*, J.Appl.Ind.Math., **8**:2 (2014), 190–195, translated from Diskretn. Anal. Issled. Oper., **21**:1 (2014), 44–52. DOI: 10.1134/S1990478914020057 MR3288380
- [4] T.I. Fedoryaeva, *Operations and isometric embeddings of graphs related to the metric prolongation property*, Oper. Research and Discrete Anal., **2**:3 (1997), 31–49, translated from Diskretn. Anal. Issled. Oper., **2**:3 (1995), 49–67. Zbl 0857.05031 MR1445104 90-06
- [5] T.I. Fedoryaeva, *On the diversity of metrical balls in graphs*, Abstracts of XIV the Intern. Conference, Publ. MSU (2005), 159. http://new.math.msu.su/department/dm/dmmc/CONF/14k_tez.pdf
- [6] T.I. Fedoryaeva, *Diversity of balls in the metric spaces of trees*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **12**:3 (2005), 74–84. Zbl 1249.05090 MR2197796
- [7] T.I. Fedoryaeva, *Diversity vectors of balls in graphs and estimates of the components of the vectors*, J.Appl.Ind.Math., **2**:3 (2008), 341–357, translated from Diskretn. Anal. Issled. Oper., **14**:2 (2007), 47–67. DOI: 10.1134/S1990478908030058 MR2368731
- [8] T.I. Fedoryaeva, *Exact upper estimates of the number of different balls of given radius in graphs with fixed number of vertices and diameter*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **16**:6 (2009), 74–92. Zbl 1249.05092 MR2649144

- [9] T.I. Fedoryaeva, *On the graphs with given diameter, number of vertices, and local diversity of balls*, J.Appl.Ind.Math., **5**:1 (2011), 44–50, translated from Diskretn. Anal. Issled. Oper., **17**:1 (2010), 65–74. DOI: 10.1134/S1990478911010054 MR2667014
- [10] T.I. Fedoryaeva, *Diversity of balls in graphs with fixed number of vertices and diameter*, Probl. of Theoret.Cybern., Publ. NNSU, N.Novgorod (2011), 491–495.
- [11] T.I. Fedoryaeva, *Majorants and minorants for the classes of graphs with fixed diameter and number of vertices*, J.Appl.Ind.Math., **7**:2 (2013), 153–165, translated from Diskretn. Anal. Issled. Oper., **20**:1 (2013), 58–76. DOI: 10.1134/S199047891302004X MR3088149
- [12] T.I. Fedoryaeva, *The diversity vector of balls of a typical graph of small diameter*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **22**:6 (2015), 43–54. DOI: 10.17377/daio.2015.22.512
- [13] T.I. Fedoryaeva, *On the diversity of balls of a typical graph with given diameter*, Appl. Discrete Math., **8** (2015), 127–128. DOI: 10.17223/2226308X/8/48
- [14] T.I. Fedoryaeva, *Computing the diversity vectors of balls of a given graph*, Siber. Electr. Math. Reports, **13** (2016), 122–129. DOI 10.17377/semi.2016.13.010
- [15] T.I. Fedoryaeva, *Asymptotic approximation for the number of n -vertex graphs with given diameter*, Abstracts of Intern. Conference and PhD-Master Sum. School on Graphs and Groups, Spectra and Symmetries, to appear, Novosibirsk (2016).
- [16] Z. Füredi, Y. Kim, *The number of graphs of given diameter*, arXiv:1204.4580v [math.CO], (2012).
- [17] F. Harary, *Graph Theory*, Addison–Wesley, London, 1969.
- [18] K.L. Rychkov, *Sufficient conditions for the existence of a graph with a given variety of balls*, J.Appl.Ind.Math., **1**:3 (2007), 380–385, translated from Diskretn. Anal. Issled. Oper., **13**:1 (2006), 99–108. DOI: 10.1134/S1990478907030131 MR2258906
- [19] K.L. Rychkov, *Conditions for the existence of a graph with given diameter, connectivity, and ball diversity vector*, J.Appl.Ind.Math., **3**:1 (2009), 107–116, translated from Diskretn. Anal. Issled. Oper., **14**:4 (2007), 43–56. DOI: 10.1134/S1990478909010128 Zbl 1249.05101

TATIANA IVANOVNA FEDORYAeva
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
PR. KOPTYUGA, 4,
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
E-mail address: fti@math.nsc.ru