S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 38–48 (2016) УДК 512.552.7+511.622
DOI 10.17377/semi.2016.13.004 MSC 16S34

ГРУППЫ ЕДИНИЦ КЛАССОВЫХ КОЛЕЦ ХАРАКТЕРОВ СПОРАДИЧЕСКИХ ГРУПП. КВАДРАТИЧНЫЙ СЛУЧАЙ

М.И. МОЛОДОРИЧ

Abstract. We study the unit groups of class character rings of sporadic groups. More exactly, let K be a class character ring of sporadic group. Suppose that K is a subring of real quadratic field. Then we descibe unit group of K.

Keywords: sporadic group, character, group ring, unit.

1. Введение

Пусть G — конечная группа, $X(G)$ — множество представителей всех классов сопряжённости в G, $Irr(G)$ — множество всех неприводимых характеров группы G и $\chi \in Irr(G)$. Положим

$$\mathbf{Z}[cl,\chi] = \Big\{ \frac{1}{\deg\chi} \sum_{x\in X(G)} |x^G|\chi(x)\gamma(x) \;\Big|\; \gamma(x) \in \mathbf{Z}\ \forall x \in X(G) \Big\}.$$

$\mathbf{Z}[cl,\chi]$ называется *классовым кольцом характера* χ.

Классовые кольца характеров спорадических групп были найдены в работе [4], непосредственным продолжением которой является данная работа. Здесь будут изучаться единицы классовых колец характеров, которые лежат в действительных квадратичных полях.

Пусть u — фундаментальная единица поля действительного квадратичного поля $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$. Тогда любая единица из классового кольца характеров имеет вид $(-1)^m u^k$.Таким образом, чтобы определить единицу, нужно найти m и k. Так как элементы $\langle -1\rangle$ всегда обратимы, то достаточно найти k.

Molodorich, M.I., The unit groups of class character rings of sporadic groups. Quadratic case.

Поступила 1 марта 2015 г., опубликована 8 февраля 2016 г.

Будем искать лежащие в классовом кольце характера единицы из $\langle u \rangle$ (порождение понимается в групповом смысле). Они будут образовывать подгруппу в циклической группе $\langle u \rangle$. Следовательно, такие единицы будут в циклической подгруппе $\langle u^k \rangle$, где k — наименьшее натуральное число с условием, что u^k принадлежит классовому кольцу характера.

Для натурального свободного от квадратов n обозначим, как в [3]:

$$\omega_n = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{n}}{2} & \text{при } n \equiv 1 \pmod 4, \\ \sqrt{n} & \text{при } n \equiv 2, 3 \pmod 4). \end{cases}$$

Пусть $u = \alpha + \beta\omega_d$. Тогда $u^k = \alpha_k + \beta_k\omega_d$ для натуральных α_k и β_k. Поскольку, согласно [4], $\mathbf{Z}[cl, \chi] = \mathbf{Z} + B\mathbf{Z}[\omega_d]$, где B — натуральное число, то для того, чтобы $u^k \in \mathbf{Z}[cl, \chi]$, достаточно определить наименьшее $k = T_B$, для которого B делит β_k.

Пусть K — ассоциативное кольцо с единицей. Тогда через $\mathbf{U}(K)$ обозначим его группу единиц.

2. Основной результат

Поскольку для поиска классовых колец характеров спорадических групп использовались таблицы характеров, полученные с помощью GAP, то нумерация характеров соответствует нумерации в GAP [5].

Теорема 1. *Пусть G — спорадическая конечная простая группа, которая имеет нецелый характер, значения которого содержатся в действительном квадратичном поле. Тогда G — одна из следующих групп*:

$$J_1, J_2, J_3, J_4, Ly, O'N, Ru, He, Suz, HN, Fi_{22}, Fi_{23}, Fi'_{24}, B.$$

Более того, группы единиц классовых колец нецелых характеров спорадических групп, которые содержатся в квадратичных полях, описываются следующим образом.

Группа J_1:

1) *Для характеров χ_2 и χ_3 имеем*
$$\mathbf{U}(\mathbf{Z} + 11 \cdot 19\omega_5\mathbf{Z}) = \langle -1 \rangle \times \left\langle \omega_5^{90} \right\rangle,$$
2) *для характеров χ_7 и χ_8*
$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z} + 2^2 \cdot 19\omega_5\mathbf{Z}\right) = \langle -1 \rangle \times \left\langle \omega_5^{18} \right\rangle,$$
3) *для характеров χ_{13} и χ_{14}*
$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z} + 2^2 \cdot 11\omega_5\mathbf{Z}\right) = \langle -1 \rangle \times \left\langle \omega_5^{30} \right\rangle.$$

Группа J_2:

1) *Для характеров χ_2 и χ_3 имеем*
$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z} + 2^4 \cdot 3^3\omega_5\mathbf{Z}\right) = \langle -1 \rangle \times \left\langle \omega_5^{36} \right\rangle,$$
2) *для характеров χ_4 и χ_5*
$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z} + 2^5 \cdot 3\omega_5\mathbf{Z}\right) = \langle -1 \rangle \times \left\langle \omega_5^{24} \right\rangle,$$

3) *для характеров* χ_8 *и* χ_9

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^4\cdot 3^2\omega_5\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle \omega_5^{12}\right\rangle,$$

4) *для характеров* χ_{14} *и* χ_{15}

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^5\omega_5\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle \omega_5^{24}\right\rangle,$$

5) *для характеров* χ_{16} *и* χ_{17}

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^2\cdot 3^2\omega_5\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle \omega_5^{12}\right\rangle.$$

Группа J_3**:**

1) *Для характеров* χ_4, χ_5, χ_7 *и* χ_8 *имеем*

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^6\cdot 3^4\omega_5\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle \omega_5^{432}\right\rangle,$$

2) *для характеров* χ_{11} *и* χ_{12}

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^7\cdot 19\omega_{17}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle \omega_{17}^{144}\right\rangle,$$

3) *для характеров* χ_{17} *и* χ_{18}

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^5\cdot 3^3\omega_5\mathbf{Z},\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle \omega_5^{72}\right\rangle.$$

Группа J_4**:**

1) *Для характеров* χ_{19} *и* χ_{20} *имеем*

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{20}\cdot 3\cdot 11\cdot 29\cdot 37\omega_{33}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (19+8\omega_{33})^{90832896}\right\rangle,$$

2) *для характеров* χ_{23} *и* χ_{24}

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{12}\cdot 3\cdot 11^3\cdot 23\cdot 37\omega_3\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle \omega_3^{11151360}\right\rangle,$$

3) *для характеров* χ_{33} *и* χ_{34}

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{20}\cdot 5\cdot 11\cdot 29\omega_{33}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (19+8\omega_{33})^{30277632}\right\rangle,$$

4) *для характеров* χ_{36} *и* χ_{37}

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{11}\cdot 11^3\cdot 29\cdot 31\omega_3\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle \omega_3^{6504960}\right\rangle,$$

5) *для характеров* χ_{38} *и* χ_{39}

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{11}\cdot 3^3\cdot 11^3\cdot 29\omega_5\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle \omega_3^{19514880}\right\rangle.$$

Группа Ly**:**

1) *Для характеров* χ_{21} *и* χ_{22} *имеем*

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^6\cdot 5^6\cdot 67\omega_{21}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (2+\omega_{21})^{825000}\right\rangle,$$

2) *для характеров* χ_{24} *и* χ_{25}

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^6\cdot 3^7\cdot 7\cdot 67\omega_{37}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (5+2\omega_{37})^{128304}\right\rangle,$$

3) *для характеров* χ_{29} *и* χ_{30}

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^3\cdot 3^3\cdot 5^5\cdot 67\omega_{21}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (2+\omega_{21})^{371250}\right\rangle,$$

4) *для характеров* χ_{31} *и* χ_{32}

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2\cdot 3^3\cdot 5^5\cdot 7\cdot 67\omega_6\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (5+2\omega_6)^{247500}\right\rangle,$$

5) *для характеров* χ_{47} *и* χ_{48}

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2\cdot 3^7\cdot 5^2\cdot 7\cdot 37\omega_{10}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (3+\omega_{10})^{145800}\right\rangle.$$

Группа $\mathrm{O'N}$**:**

1) *Для характеров* χ_{16} *и* χ_{17} *имеем*

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^4\cdot 3^4\cdot 7^3\omega_2\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (1+\omega_2)^{21168}\right\rangle,$$

2) *для характеров* χ_{21} *и* χ_{22}

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^4\cdot 7^3\cdot 31\omega_2\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (1+\omega_2)^{11760}\right\rangle,$$

3) *для характеров* χ_{23} *и* χ_{24}

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+3^3\cdot 11\cdot 19\cdot 31\omega_5\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle \omega_5^{180}\right\rangle,$$

4) *для характеров* χ_{29} *и* χ_{30}

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^2\cdot 3^4\cdot 7\cdot 31\omega_7\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (8+3\omega_7)^{1890}\right\rangle.$$

Группа Ru**:**

1) *Для характеров* χ_{15} *и* χ_{16} *имеем*

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^4\cdot 3\cdot 5^3\cdot 29\omega_6\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (5+2\omega_6)^{4200}\right\rangle,$$

2) *для характеров* χ_{30} *и* χ_{31}

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{10}\cdot 5\cdot 29\omega_5\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle \omega_5^{26880}\right\rangle,$$

3) *для характеров* χ_{34} *и* χ_{35}

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^2\cdot 5^3\cdot 7\cdot 13\omega_{29}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (2+\omega_{29})^{150}\right\rangle.$$

Группа He**:**

1) *Для характеров* χ_7 *и* χ_8 *имеем*

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{10}\cdot 3^2\cdot 5^2\omega_{17}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (3+2\omega_{17})^{9600}\right\rangle,$$

2) *для характеров* χ_{30} *и* χ_{31}

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 17\omega_{21}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (2+\omega_{21})^{840}\right\rangle.$$

Группа Suz**:**

1) *Для характеров* χ_{13} *и* χ_{14} *имеем*

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{13}\cdot 3^5\omega_5\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle \omega_5^{165888}\right\rangle,$$

2) *для характеров* χ_{25} *и* χ_{26}

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{12}\cdot 3^4\omega_{21}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (2+\omega_{21})^{41472}\right\rangle,$$

3) *для характеров* χ_{31} *и* χ_{32}

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{13}\cdot 3^{2}\cdot 5\omega_{13}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle(1+\omega_{13})^{6144}\right\rangle.$$

Группа HN**:**

1) *Для характеров* χ_{2} *и* χ_{3} *имеем*

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{11}\cdot 3^{5}\cdot 5^{3}\cdot 11\omega_{5}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle\omega_{5}^{5184000}\right\rangle,$$

2) *для характеров* χ_{6} *и* χ_{7}

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{10}\cdot 3^{4}\cdot 5^{3}\omega_{5}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle\omega_{5}^{864000}\right\rangle,$$

3) *для характеров* χ_{13} *и* χ_{14}

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{11}\cdot 3^{3}\cdot 5^{3}\omega_{5}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle\omega_{5}^{576000}\right\rangle,$$

4) *для характеров* χ_{21} *и* χ_{22}

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{5}\cdot 3^{5}\cdot 5^{3}\omega_{5}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle\omega_{5}^{81000}\right\rangle,$$

5) *для характеров* χ_{27} *и* χ_{28}

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{8}\cdot 3^{2}\cdot 5^{2}\cdot 11\omega_{5}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle\omega_{5}^{4800}\right\rangle,$$

6) *для характеров* χ_{30} *и* χ_{31}

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{12}\cdot 5^{3}\omega_{5}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle\omega_{5}^{384000}\right\rangle.$$

Группа Fi_{22}**:**

1) *Для характеров* χ_{22} *и* χ_{23} *имеем*

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{14}\cdot 3^{7}\omega_{13}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle(1+\omega_{13})^{2985984}\right\rangle.$$

Группа Fi_{23}**:**

1) *Для характеров* χ_{62} *и* χ_{63} *имеем*

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{10}\cdot 3^{9}\cdot 17\omega_{13}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle(1+\omega_{13})^{1679616}\right\rangle,$$

2) *для характеров* χ_{80} *и* χ_{81}

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{10}\cdot 3^{11}\omega_{13}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle(1+\omega_{13})^{15116544}\right\rangle,$$

3) *для характеров* χ_{94} *и* χ_{95}

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+3^{12}\cdot 17\cdot 23\omega_{13}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle(1+\omega_{13})^{15588936}\right\rangle.$$

Группа Fi'_{24}**:**

1) *Для характеров* χ_{70} *и* χ_{71} *имеем*

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{13}\cdot 3^{15}\cdot 29\omega_{13}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle(1+\omega_{13})^{68568643584}\right\rangle,$$

2) *для характеров* χ_{147}, χ_{148}, χ_{149} *и* χ_{150}

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{21}\cdot 3^{5}\cdot 17\cdot 29\omega_{33}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle(19+8\omega_{33})^{148635648}\right\rangle,$$

3) *для характеров* χ_{155} *и* χ_{156}

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{6}\cdot 3^{16}\cdot 7\cdot 29\omega_7\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (8+3\omega_7)^{803538792}\right\rangle,$$

4) *для характеров* χ_{166}, χ_{167}, χ_{168} *и* χ_{169}

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+3^{15}\cdot 17\cdot 23\cdot 29\omega_{13}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (1+\omega_{13})^{2946308904}\right\rangle.$$

Группа B**:**

1) *Для характеров* χ_{137} *и* χ_{138} *имеем*

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{30}\cdot 7^{2}\cdot 17\cdot 23\cdot 31\cdot 47\omega_2\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (1+\omega_2)^{28523951554560}\right\rangle,$$

2) *для характеров* χ_{169} *и* χ_{170}

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{40}\cdot 13\cdot 19\cdot 47\omega_{17}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (3+2\omega_{17})^{514438470}\right\rangle,$$

3) *для характеров* χ_{178} *и* χ_{179}

$$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{22}\cdot 3^{13}\cdot 19\cdot 47\omega_7\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (8+3\omega_7)^{6408447197184}\right\rangle.$$

Доказательство. Список спорадических групп, имеющих нужные характеры, легко может быть найден при анализе таблиц характеров этих групп. Более детальное исследование классовых колец характеров сделано в [4].

Рассмотрим единицы классовых колец нецелых характеров спорадических групп, которые содержатся в квадратичных полях, для каждой спорадической группы в последующих леммах. □

Для поиска единиц нетривиальных классовых колец характеров необходимо знать фундаментальные единицы, их значения можно найти в [3, Таблица 1, с. 472].

Лемма 1. *Для группы* J_1 *группы единиц нетривиальных классовых колец характеров, которые содержатся в квадратичных полях*:
$\mathbf{U}(\mathbf{Z}+11\cdot 19\omega_5\mathbf{Z})=\langle -1\rangle\times\langle \omega_5^{90}\rangle$,
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^2\cdot 19\omega_5\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\langle \omega_5^{18}\rangle$,
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^2\cdot 11\omega_5\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\langle \omega_5^{30}\rangle$.

Доказательство. Поскольку

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m=f_{m-1}+f_m\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

где $\{f_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ — последовательность чисел Фибоначчи, то будем искать такое число m, что f_m делит $11\cdot 19$.

1) По лемме 8 из [2], что если $z=\Pi_{p\in\pi(z)}p^{i_p}$, то $T_z=\text{НОК}\{T_{p^{i_p}}|p\in\pi(z)\}$.

По модулю 11 последовательность Фибоначчи будет такова:

$$0,1,1,2,3,5,8,13\equiv 2\pmod{11},10,12\equiv 1\pmod{11},11\equiv 0\pmod{11},\ldots.$$

Таким образом, $T_{11}=10$. В других случаях вычисления последовательностей Фибоначчи по модулям проводятся аналогично.

По модулю 19 последовательность Фибоначчи такова:

$$0,1,1,2,3,5,8,13,2,15,17,13,11,5,16,2,18,1,0,\ldots,$$

то есть $T_{19} = 18$ и $T_{11 \cdot 19} = \text{НОК}\{10, 18\} = 90$.

2) По модулю 4 последовательность Фибоначчи такова:

$$0, 1, 1, 2, 3, 1, 0 \dots.$$

Таким образом, $T_{2^2} = 6$.

Поскольку $T_{19} = 18$, тогда $T_{2^2 \cdot 19} = \text{НОК}\{6, 18\} = 18$.

3) $T_{2^2 \cdot 11} = \text{НОК}\{6, 10\} = 30$.

□

Лемма 2. *Для группы* J_2 *группы единиц нетривиальных классовых колец характеров, которые содержатся в квадратичных полях*:

$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z} + 2^4 \cdot 3^3 \omega_5 \mathbf{Z}\right) = \langle -1 \rangle \times \left\langle (\omega_5)^{36} \right\rangle,$

$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z} + 2^5 \cdot 3 \omega_5 \mathbf{Z}\right) = \langle -1 \rangle \times \left\langle (\omega_5)^{24} \right\rangle,$

$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z} + 2^4 \cdot 3^2 \omega_5 \mathbf{Z}\right) = \langle -1 \rangle \times \left\langle (\omega_5)^{12} \right\rangle,$

$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z} + 2^5 \omega_5 \mathbf{Z}\right) = \langle -1 \rangle \times \left\langle (\omega_5)^{24} \right\rangle,$

$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z} + 2^2 \cdot 3^2 \omega_5 \mathbf{Z}\right) = \langle -1 \rangle \times \left\langle (\omega_5)^{12} \right\rangle.$

Доказательство.

1) По модулю 16 последовательность Фибоначчи такова:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 5, 2, 7, 9, 0, \dots.$$

Значит $T_{16} = 12$.

Последовательность Фибоначчи по модулю 27:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 7, 1, 8, 9, 17, 26, 16, 15, 4, 19, 23, 15, 11, 26, \\ 10, 9, 19, 1, 20, 21, 14, 8, 22, 3, 25, 1, 26, 0, \dots.$$

Следовательно, $T_{27} = 36$.

Таким образом, $T_{2^4 \cdot 3^3} = \text{НОК}\{12, 36\} = 36$.

2) По модулю 32 последовательность Фибоначчи выглядит следующим образом:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 2, 23, 25, 16, 9, 25, 2, 27, 29, 24, 21, 13, 2, 15, 17, 0, \dots.$$

Поэтому $T_{32} = 24$.

Последовательность Фибоначчи по модулю 3:

$$0, 1, 1, 2, 0, \dots$$

Итак, $T_3 = 4$ и $T_{2^5 \cdot 3} = \text{НОК}\{24, 4\} = 24$.

3) Ранее найдено, что $T_{16} = 12$.

По модулю 9 последовательность Фибоначчи такова:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 4, 3, 7, 1, 8, 0, \dots.$$

Таким образом, $T_9 = 12$.

Значит $T_{2^4 \cdot 3^2} = \text{НОК}\{12, 12\} = 12$.

4) Известно, что $T_{32} = 24$.

5) В доказательстве леммы 1 было найдено, что $T_4 = 6$. Поскольку $T_9 = 12$, то $T_{2^2 \cdot 3^2} = \text{НОК}\{6, 12\} = 12$.

□

Лемма 3. *Для группы* J_3 *группы единиц нетривиальных классовых колец характеров, которые содержатся в квадратичных полях*:
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^6\cdot 3^4\omega_5\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle(\omega_5)^{432}\right\rangle$,
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^7\cdot 19\omega_{17}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle(\omega_{17})^{144}\right\rangle$,
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^5\cdot 3^3\omega_5\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle(\omega_5)^{72}\right\rangle$.

Доказательство.

1) По модулю 64 последовательность Фибоначчи такова:

$$0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,25,16,41,57,34,27,61,24,21,45,2,47,49,32,17,49,\\ 2,51,53,40,29,5,34,39,9,48,57,41,34,11,45,56,37,29,2,31,33,0,\dots.$$

Тогда $T_{64}=48$.

Последовательность Фибоначчи по модулю 81:

$$0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,8,63,71,53,43,15,58,73,50,42,11,53,64,36,19,55,\\ 74,48,41,8,49,57,25,1,26,27,53,80,52,51,22,73,14,6,20,26,46,72,37,28,65,\\ 12,77,8,4,12,16,28,44,72,35,26,61,6,67,73,59,51,29,80,28,27,55,1,56,57,\\ 32,8,40,48,7,55,62,36,17,53,70,42,31,73,23,15,38,53,10,63,73,55,47,21,68,\\ 8,76,3,79,1,80,0,\dots.$$

Значит $T_{81}=108$.

Таким образом, $T_{2^6\cdot 3^4}=\text{НОК}\{48,108\}=432$.

2) Согласно [3, Таблица 1, с. 472] фундаментальная единица для поля $\mathrm{Q}(\sqrt{17})$ имеет вид: $\epsilon=3+2\frac{1+\sqrt{17}}{2}$,

$$\left(3+2\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)^m=r_m+p_m\cdot\frac{1+\sqrt{17}}{2},$$

где $\{p_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ — последовательность, которая строится по правилу:

$$p_{i+2}=8p_{i+1}+p_i, p_0=0, p_1=2.$$

Данная последовательность по модулю 128 имеет вид:

$$0,2,16,2,32,2,48,2,64,2,80,2,96,2,112,2,0,\dots.$$

Тогда $T_{128}=16$.

Данная последовательность по модулю 19 имеет вид:

$$0,2,16,16,11,9,7,8,14,6,5,8,12,9,8,16,3,2,0,\dots.$$

Следовательно, $T_{19}=18$.

Итак, $T_{2^7\cdot 19}=\text{НОК}\{16,18\}=144$.

3) В доказательстве леммы 2 было найдено, что $T_{32}=24$ и $T_{27}=36$, тогда $T_{2^5\cdot 3^3}=\text{НОК}\{24,36\}=72$.

$\square$

Ввиду трудоемкости вычисления в дальнейшем периоды последовательностей вычислялись программно [6].

Лемма 4. *Для группы* J_4 *группы единиц нетривиальных классовых колец характеров, которые содержатся в квадратичных полях*:
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{20}\cdot 3\cdot 11\cdot 29\cdot 37\omega_{33}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (19+8\omega_{33})^{90832896}\right\rangle,$
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{12}\cdot 3\cdot 11^3\cdot 23\cdot 37\omega_{3}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (\omega_{3})^{11151360}\right\rangle,$
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{11}\cdot 11^3\cdot 29\cdot 31\omega_{5}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (\omega_{5})^{6504960}\right\rangle,$
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{11}\cdot 3^3\cdot 11^3\cdot 29\omega_{5}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (\omega_{5})^{19514880}\right\rangle,$
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{20}\cdot 5\cdot 11\cdot 29\omega_{33}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (19+8\omega_{33})^{30277632}\right\rangle.$

Лемма 5. *Для группы* Ly *группы единиц нетривиальных классовых колец характеров, которые содержатся в квадратичных полях*:
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{6}\cdot 5^6\cdot 67\omega_{21}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (2+\omega_{21})^{825000}\right\rangle,$
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{6}\cdot 3^7\cdot 7\cdot 67\omega_{37}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (5+2\omega_{37})^{128304}\right\rangle,$
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{3}\cdot 3^3\cdot 5^5\cdot 67\omega_{21}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (2+\omega_{21})^{371250}\right\rangle,$
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2\cdot 3^3\cdot 5^5\cdot 7\cdot 67\omega_{6}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (5+2\omega_{6})^{247500}\right\rangle,$
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2\cdot 3^7\cdot 5^2\cdot 7\cdot 37\omega_{10}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (3+\omega_{10})^{145800}\right\rangle.$

Лемма 6. *Для группы* $\mathrm{O'N}$ *группы единиц нетривиальных классовых колец характеров, которые содержатся в квадратичных полях*:
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{4}\cdot 3^4\cdot 7^3\omega_{2}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (1+\omega_{2})^{21168}\right\rangle,$
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{4}\cdot 7^3\cdot 31\omega_{2}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (1+\omega_{2})^{11760}\right\rangle,$
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+3^{3}\cdot 11\cdot 19\cdot 31\omega_{5}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (\omega_{5})^{180}\right\rangle,$
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{2}\cdot 3^4\cdot 7\cdot 31\omega_{7}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (8+3\omega_{7})^{1890}\right\rangle.$

Лемма 7. *Для группы* Ru *группы единиц нетривиальных классовых колец характеров, которые содержатся в квадратичных полях*:
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{4}\cdot 3\cdot 5^3\cdot 29\omega_{6}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (5+2\omega_{6})^{4200}\right\rangle,$
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{10}\cdot 5\cdot 29\omega_{5}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (\omega_{5})^{26880}\right\rangle,$
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{2}\cdot 5^3\cdot 7\cdot 13\omega_{29}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (2+\omega_{29})^{150}\right\rangle.$

Лемма 8. *Для группы* He *группы единиц нетривиальных классовых колец характеров, которые содержатся в квадратичных полях*:
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{10}\cdot 3^2\cdot 5^2\omega_{17}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (3+2\omega_{17})^{9600}\right\rangle,$
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+3\cdot 5^2\cdot 7\cdot 17\omega_{21}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (2+\omega_{21})^{840}\right\rangle.$

Лемма 9. *Для группы* Suz *группы единиц нетривиальных классовых колец характеров, которые содержатся в квадратичных полях*:
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{13}\cdot 3^5\omega_{5}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (\omega_{5})^{165888}\right\rangle,$
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{12}\cdot 3^4\omega_{21}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (2+\omega_{21})^{41472}\right\rangle,$
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{13}\cdot 3^2\cdot 5\omega_{13}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle (1+\omega_{13})^{6144}\right\rangle.$

Лемма 10. *Для группы* HN *группы единиц нетривиальных классовых колец характеров, которые содержатся в квадратичных полях*:
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{11}\cdot 3^5\cdot 5^3\cdot 11\omega_5\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle(\omega_5)^{5184000}\right\rangle$,
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{10}\cdot 3^4\cdot 5^3\omega_5\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle(\omega_5)^{864000}\right\rangle$,
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{11}\cdot 3^3\cdot 5^3\omega_5\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle(\omega_5)^{576000}\right\rangle$,
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{5}\cdot 3^5\cdot 5^3\omega_5\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle(\omega_5)^{81000}\right\rangle$,
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{8}\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 11\omega_5\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle(\omega_5)^{4800}\right\rangle$,
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{12}\cdot 5^3\omega_5\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle(\omega_5)^{384000}\right\rangle$.

Лемма 11. *Для группы* Fi_{22} *группы единиц нетривиальных классовых колец характеров, которые содержатся в квадратичных полях*:
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{14}\cdot 3^7\omega_{13}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle(1+\omega_{13})^{2985984}\right\rangle$.

Лемма 12. *Для группы* Fi_{23} *группы единиц нетривиальных классовых колец характеров, которые содержатся в квадратичных полях*:
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{10}\cdot 3^9\cdot 17\omega_{13}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle(1+\omega_{13})^{1679616}\right\rangle$,
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{10}\cdot 3^{11}\omega_{13}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle(1+\omega_{13})^{15116544}\right\rangle$,
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+3^{12}\cdot 17\cdot 23\omega_{13}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle(1+\omega_{13})^{15588936}\right\rangle$.

Лемма 13. *Для группы* Fi_{24}' *группы единиц нетривиальных классовых колец характеров, которые содержатся в квадратичных полях*:
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{13}\cdot 3^{15}\cdot 29\omega_{13}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle(1+\omega_{13})^{68568643584}\right\rangle$,
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{6}\cdot 3^{16}\cdot 7\cdot 29\omega_{7}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle(8+3\omega_{7})^{803538792}\right\rangle$,
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{21}\cdot 3^{5}\cdot 17\cdot 29\omega_{33}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle(19+8\omega_{33})^{148635648}\right\rangle$,
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+3^{15}\cdot 17\cdot 23\cdot 29\omega_{13}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle(1+\omega_{13})^{2946308904}\right\rangle$.

Лемма 14. *Для группы* B *группы единиц нетривиальных классовых колец характеров, которые содержатся в квадратичных полях*:
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{30}\cdot 7^{2}\cdot 17\cdot 23\cdot 31\cdot 47\omega_{2}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle(1+\omega_{2})^{28523951554560}\right\rangle$,
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{40}\cdot 13\cdot 19\cdot 47\omega_{17}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle(3+2\omega_{17})^{514438470}\right\rangle$,
$\mathbf{U}\left(\mathbf{Z}+2^{22}\cdot 3^{13}\cdot 19\cdot 47\omega_{7}\mathbf{Z}\right)=\langle -1\rangle\times\left\langle(8+3\omega_{7})^{6408447197184}\right\rangle$.

References

[1] R.Zh. Aleev, *Central Elements of Integral Group Rings*, Algebra and Logic, **39**:5 (2000), 293–300. Zbl 0979.20004

[2] R.Zh. Aleev, *Higman numbers of finite groups*, Siberian Advances of Mathematics, **11**:2 (2001), 1–24. Zbl 0993.16023

[3] Z.I. Borevich, I.R. Shafarevich, *Teoriya chisel: 3-e izd.*, M: Nauka, 1985. Zbl 0592.12001

[4] M.I. Molodorich, *The class character rings of sporadic groups*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **11** (2014), 878–886. Zbl 06510935

[5] The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms and Programming. Ver. 4.5.6. 2012. http://www.gap-system.org.

[6] https://github.com/Molodorich/UnitInQuadraticField.

Margarita Ivanovna Molodorich
South Ural State University,
Lenin avenue, 76,
454080, Chelyabinsk, Russia
E-mail address: molodorich.margarita@gmail.com