S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 388–394 (2016) УДК 512.56
DOI 10.17377/semi.2016.13.034 MSC 08C15

О СЛОЖНОСТИ РЕШЕТОК КВАЗИМНОГООБРАЗИЙ ДЛЯ МНОГООБРАЗИЙ УНАРНЫХ АЛГЕБР. II

А. В. КРАВЧЕНКО

Abstract. We show that some minimal $\mathcal{Q}$-universal variety of unary algebras is complicated in the sense of other measures of complexity for lattices of quasivarieties.

Keywords: quasivariety, lattice of quasivariesties, unary algebra, basis of quasi-identities.

Известны различные формализации понятия сложности для решеток квазимногообразий конечной сигнатуры. Одной из них является понятие $\mathcal{Q}$-универсальности, введенное М. Сапиром [7].

Для любого класса $\mathbf{K}$ пусть $\mathrm{L_q}(\mathbf{K})$ обозначает решетку $\mathbf{K}$-квазимногообразий (т. е. классов, определенных в $\mathbf{K}$ множествами квазитождеств) относительно включения. Квазимногообразие $\mathbf{K}$ алгебраических систем конечной сигнатуры называется *$\mathcal{Q}$-универсальным*, если для любого квазимногообразия $\mathbf{K}'$ алгебраических систем конечной сигнатуры решетка $\mathrm{L_q}(\mathbf{K}')$ является гомоморфным образом некоторой подрешетки решетки $\mathrm{L_q}(\mathbf{K})$. Если $\mathbf{K}$ — $\mathcal{Q}$-универсальное квазимногообразие, то решетку $\mathrm{L_q}(\mathbf{K})$ также будем называть $\mathcal{Q}$-универсальной.

Приведенное определение характеризует $\mathcal{Q}$-универсальные решетки как наиболее сложные с точки зрения их решеточного строения. Обсуждению достаточных условий $\mathcal{Q}$-универсальности посвящен раздел монографии В. А. Горбунова [3, § 5.4.5].

Недавно А. М. Нуракунов [6] предложил другую меру сложности для решеток квазимногообразий. Он привел первый пример квазимногообразия $\mathbf{K}$ такого, что множество типов изоморфизма конечных подрешеток решетки $\mathrm{L_q}(\mathbf{K})$

Kravchenko, A. V., Complexity of quasivariety lattices for varieties of unary algebras. II.

Поступила 10 мая 2016 г., опубликована 19 мая 2016 г.

вычислимо перечислимое, но не вычислимое. М. В. Швидефски [8] установила связь между некоторыми достаточными условиями $\mathcal{Q}$-универсальности и алгоритмической сложностью множества типов изоморфизма конечных подрешеток решетки квазимногообразий.

В работах В. А. Горбунова [2] и В. К. Карташова [4] приведены примеры квазимногообразий $\mathbf{K}$ таких, что решетка $\mathrm{L_q}(\mathbf{K})$ содержит 2^ω элементов, не имеющих покрытий (и, следовательно, существует 2^ω подквазимногообразий $\mathbf{K}' \subseteq \mathbf{K}$, не имеющих независимого базиса квазитождеств). Такое свойство также можно считать показателем сложности решеточного строения $\mathrm{L_q}(\mathbf{K})$.

В настоящей работе мы рассматриваем минимальное $\mathcal{Q}$-универсальное многообразие $\mathbf{K}_3$ унарных алгебр, описанное автором в [5]. Мы покажем, что существуют 2^ω подклассов $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}_3$ таких, что множество конечных подрешеток решетки $\mathrm{L_q}(\mathbf{K})$ не является вычислимо перечислимым, и 2^ω подквазимногообразий $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}_3$, не имеющих независимого базиса квазитождеств.

1. Основные определения и обозначения

Мы используем стандартные обозначения и терминологию по теории квазимногообразий из [3]. Так, через $\mathbf{Q}(\mathbf{X})$ обозначаем наименьшее квазимногообразие, содержащее класс $\mathbf{X}$, а через $\mathbf{L_s}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{P_s}$, $\mathbf{S}$ и $\mathbf{H}$ — операторы взятия надпрямых пределов, прямых произведений, подпрямых произведений, подалгебр и гомоморфных образов. Запись $\mathcal{A} \leq \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ означает, что система $\mathcal{A}$ представляется подпрямым произведением систем $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$. Для любых классов $\mathbf{A}$, $\mathbf{X}$ и любого оператора $\mathbf{O}$ через $(\mathbf{O} \cap \mathbf{A})(\mathbf{X})$ обозначаем класс $\mathbf{O}(\mathbf{X}) \cap \mathbf{A}$.

Пусть $\mathbf{K}$ — произвольный класс алгебраических систем. Класс $\mathbf{K}'$ называется $\mathbf{K}$-*квазимногообразием*, если $\mathbf{K}' = \mathbf{K} \cap \mathbf{Q}(\mathbf{K}')$. Очевидно, что класс $\mathbf{K}'$ является $\mathbf{K}$-квазимногообразием тогда и только тогда, когда он определяется в $\mathbf{K}$ некоторым множеством квазитождеств. Решетка $\mathbf{K}$-квазимногообразий обозначается $\mathrm{L_q}(\mathbf{K})$.

Пусть $\mathbf{K}_3$ — многообразие унарных алгебр сигнатуры $\sigma = \{f, g\}$, определенное тождествами

$$
\begin{aligned}
&\forall x \forall y [f(f(x)) = f(f(y)) = f(g(y))],\\
&\forall x \forall y [g(g(x)) = g(g(y)) = g(f(y))],\\
&\forall x [f(f(x)) = g(g(x))].
\end{aligned}
$$

В [5] доказано, что $\mathbf{K}_3$ является минимальным $\mathcal{Q}$-универсальным многообразием унарных алгебр сигнатуры σ. Из доказательства следует, что $\mathcal{Q}$-универсальными являются собственное подквазимногообразие $\mathbf{V} \subsetneq \mathbf{K}_3$, определенное квазитождествами

$$
\begin{aligned}
&\forall x [f(x) = f(f(x)) \to f(x) = g(x)],\\
&\forall x [g(x) = g(g(x)) \to f(x) = g(x)],\\
&\forall x [f(x) = g(x) \to f(x) = f(f(x))],\\
&\forall x \forall y [f(x) = f(y) \to g(x) = g(y)],\\
&\forall x \forall y [g(x) = g(y) \to f(x) = f(y)],
\end{aligned}
$$

а также решетка $\mathbf{W}$-квазимногообразий, где $\mathbf{W}$ — аксиоматизируемый подкласс, определенный в $\mathbf{V}$ предложениями

$$\forall x \forall y[g(x) = g(y) \,\&\, x \neq y \to g(x) = g(g(x))], \tag{1}$$

$$(\forall x[g(x) = g(g(x))] \to \forall x \forall y[x = y]). \tag{2}$$

При доказательстве использовались достаточные условия из [3]. Похожее достаточное условие $\mathcal{Q}$-универсальности предложено в работе М. Адамса и В. Дзебяка [1].

Определение 1. Пусть I обозначает множество всех конечных подмножеств счетного множества и пусть семейство $\mathbf{A} = \{\mathcal{A}_X : X \in I\}$ конечных алгебраических систем удовлетворяет следующим условиям:

(P_1) $\mathcal{A}_\varnothing$ является тривиальной системой;
(P_2) если $X \in I$ и $X = Y \cup Z$, то $\mathcal{A}_X \in \mathbf{Q}(\mathcal{A}_Y, \mathcal{A}_Z)$;
(P_3) если $X, Y \in I$, $X \neq \varnothing$ и $\mathcal{A}_X \in \mathbf{Q}(\mathcal{A}_Y)$, то $X = Y$;
(P_4) если $X \in I$, $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ — конечные системы из $\mathbf{Q}(\mathbf{A})$ и $\mathcal{A}_X \leq \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$, то существуют $Y_1, Y_2 \in I$ такие, что $A_{Y_1} \in \mathbf{Q}(\mathcal{B}_1)$, $A_{Y_2} \in \mathbf{Q}(\mathcal{B}_2)$ и $X = Y_1 \cup Y_2$.

Тогда $\mathbf{A}$ называется AD-*семейством*.

Следующие два утверждения показывают, что для квазимногообразия $\mathbf{K}$, содержащего AD-семейство, решетка $\mathrm{L_q}(\mathbf{K})$ является сложной в смысле и решеточного строения, и алгоритмических свойств.

Предложение 1 (М. Адамс и В. Дзебяк [1]). *Если квазимногообразие $\mathbf{K}$ конечной сигнатуры содержит* AD-*семейство, то $\mathbf{K}$ — $\mathcal{Q}$-универсальное квазимногообразие.*

Предложение 2 (М. В. Швидефски [8]). *Если квазимногообразие $\mathbf{K}$ конечной сигнатуры содержит* AD-*семейство, то существует 2^ω подклассов $\mathbf{K}' \subseteq \mathbf{K}$ таких, что множество типов изоморфизма конечных подрешеток решетки $\mathrm{L_q}(\mathbf{K}')$ не является вычислимо перечислимым.*

Мы докажем две теоремы о сложности решетки $\mathrm{L_q}(\mathbf{V})$.

Теорема 1. *Существует 2^ω подклассов $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{V}$ таких, что множество типов изоморфизма конечных подрешеток решетки $\mathrm{L_q}(\mathbf{K})$ не является вычислимо перечислимым.*

Теорема 2. *Существует 2^ω элементов решетки $\mathrm{L_q}(\mathbf{V})$, не имеющих покрытий. Следовательно, существует 2^ω подквазимногобразий $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{V}$, не имеющих независимого базиса квазитождеств.*

При доказательстве мы будем использовать системы, определенные для доказательства $\mathcal{Q}$-универсальности в [5].

Определение 2. Пусть $\mathcal{C}_1$ — тривиальная алгебра. Для $n \geqslant 2$ через $\mathcal{C}_n$ обозначим алгебру с носителем

$$C_n = \{0\} \cup A_n \cup B_n, \quad A_n = \{a_0^n, \dots, a_{n-1}^n\},\ B_n = \{b_0^n, \dots, b_{n-1}^n\},$$

где $f(0) = g(0) = f(a_i^n) = g(a_i^n) = 0$ и $g(b_i^n) = a_i^n$ для всех $0 \leqslant i \leqslant n-1$, $f(b_i^n) = a_{i+1}^n$ при $0 \leqslant i \leqslant n-2$, $f(b_{n-1}^n) = a_0^n$.

Очевидно, $\mathcal{C}_n \in \mathbf{W}$ для любого $n \geqslant 1$.

Приведем формулировку свойства таких систем, установленного и использованного в [5], которое нам потребуется в дальнейшем:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{X}) \cap \mathbf{C}_n = (\mathbf{L_s} \cap \mathbf{C}_n)(\mathbf{P_s} \cap \mathbf{C}_n)(\mathbf{S} \cap \mathbf{C}_n)(\mathbf{X}) \tag{3}$$

для любого $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{V}$ и любого $n < \omega$, где $\mathbf{C}_n = \mathbf{H}(\mathcal{C}_n) \cap \mathbf{W}$.

2. Предварительные результаты

При доказательстве $\mathcal{Q}$-универсальности квазимногообразия $\mathbf{V}$ важную роль играли системы $\mathcal{C}_p$, где p — простое число. Эти же системы будут существенно использованы для построения AD-семейства.

Лемма 1. *Пусть $n > 1$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

(а) *Если m делит n, то существует гомоморфизм из $\mathcal{C}_n$ на $\mathcal{C}_m$. Ядра всех таких гомоморфизмов совпадают и описываются следующим образом:*

$$\ker\varphi = \{(x,x) : x \in C_n\} \cup \{(a_i,a_j),(b_i,b_j) : i \equiv j \pmod m\}.$$

(б) *Если $\mathcal{A} \in \mathbf{W}$ и существует гомоморфизм из $\mathcal{C}_n$ на $\mathcal{A}$, то $\mathcal{A}$ изоморфна $\mathcal{C}_m$ для некоторого делителя m числа n.*

(в) *Если $\mathcal{A} \in \mathbf{V}$ и существует гомоморфизм φ из $\mathcal{C}_n$ в $\mathcal{A}$, то выполняется одно из условий*

(1) *выполняются условия случая* (б);

(2) *в $\ker\varphi$ есть пара вида $(0,a_i^n)$, $(0,b_i^n)$, (a_i^n,b_j^n) или (a_i^n,a_j^n), где разность $i-j$ не кратна никакому делителю числа n, и в системе $\mathcal{A}$ выполняется посылка предложения* (2);

(3) *в $\ker\varphi$ есть пара (a_i^n,a_{i+k}^n), где k — наименьшее положительное число с таким свойством, k делит n и нет пары (b_i^n,b_{i+k}^n). В последнем случае в системе $\mathcal{A}$ выполняется посылка предложения* (1)*, но ложно его заключение, т. е. $\mathcal{C}_k$ является подсистемой $\mathcal{A}$ и $|g^{-1}(\varphi(a_i^n))| > 1$.*

Доказательство. Утверждения (а) и (б) доказаны в [5, лемма 3]. Утверждение (в) не сформулировано явно, но установлено при доказательстве этой же леммы. □

Пусть $\mathbb{P}$ обозначает множество простых чисел, а I — множество его конечных подмножеств. Для любого $X \in I$ пусть $p(X) = \prod_{p\in X} p$ и пусть

$$\mathcal{A}_X = \mathcal{C}_{p(X)}.$$

При этом считаем, что $p(\varnothing) = 1$ и $\mathcal{A}_\varnothing$ — тривиальная система.

Следующие свойства систем $\mathcal{A}_X$ получаются из леммы 1.

Лемма 2. *Пусть $X,Y,Z \in I$ и $n > 1$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

(а) *Гомоморфизм из $\mathcal{A}_X$ на $\mathcal{A}_Y$ существует тогда и только тогда, когда $Y \subseteq X$.*

(б) *Гомоморфизм из $\mathcal{A}_X$ на $\mathcal{A}_Y \times \mathcal{A}_Z$ существует тогда и только тогда, когда $Y \cup Z \subseteq X$.*

(в) *Имеем $\mathcal{A}_X \leq \mathcal{A}_Y \times \mathcal{A}_Z$ тогда и только тогда, когда $X = Y \cup Z$.*

(г) *Если $\mathcal{C}_n \leq \mathcal{C}_m \times \mathcal{C}_k$, то любой простой делитель числа n делит либо m, либо k.*

Доказательство. Утверждения (а) и (б) непосредственно следуют из утверждений (а) и (б) леммы 1.

Докажем утверждение (в). Если $X = Y \cup Z$, то из утверждения (а) леммы 1 сразу следует, что $\mathcal{A}_X \leq \mathcal{A}_Y \times \mathcal{A}_Z$.

Если $\mathcal{A}_X \leq \mathcal{A}_Y \times \mathcal{A}_Z$, то в силу условия (3) можно считать, что существуют гомоморфизмы из $\mathcal{A}_X$ на $\mathcal{A}_Y$ и $\mathcal{A}_Z$. В силу утверждения (а) получаем $Y \cup Z \subseteq X$. Если это включение строгое, то рассмотрим непустое множество $T = X \setminus (Y \cup Z)$. Сравнения $x \equiv 0 \pmod{p(Y)}$ и $x \equiv 0 \pmod{p(Z)}$ выполняются тогда и только тогда, когда $x \equiv 0 \pmod{p(Y \cup Z)}$. Так как $T \cap (Y \cup Z) = \varnothing$, числа $p(Y \cup Z)$ и $p(T)$ взаимно простые. Следовательно, система сравнений

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{p(Y \cup Z)}, \\ x \equiv 1 \pmod{p(T)} \end{cases}$$

имеет решение $x \not\equiv 0 \pmod{p(X)}$. В частности, получаем $b_0 \neq b_x$ и $\varphi(b_0) = \varphi(b_x)$ для любого гомоморфизма из $\mathcal{A}_X$ на $\mathcal{A}_Y$ и $\mathcal{A}_Z$. Так как $\mathcal{A}_X$ — подпрямое произведение этих систем, получили противоречие. Следовательно, $T = \varnothing$, т. е. $X = Y \cup Z$.

Доказательство утверждения (г) аналогично. □

При доказательстве существования подквазимногообразий, не имеющих независимого базиса квазитождеств, в [2, 4] важную роль играла делимость между длинами направленных циклов. Нам потребуются квазитождества специального вида, описывающие аналогичные свойства для систем $\mathcal{C}_n$.

Пусть $n > 1$. С каждым элементом $u^n \in C_n$ свяжем переменную x_u и рассмотрим следующую формулу $\Phi_n(\overline{x})$:

$$(f(x_0) = x_0) \wedge (g(x_0) = x_0) \wedge \bigwedge_{i<n} (f(x_{a_i}) = x_0)) \wedge \bigwedge_{i<n} (g(x_{a_i}) = x_0) \wedge$$
$$\wedge \bigwedge_{i<n} (g(x_{b_i}) = x_{a_i}) \wedge \bigwedge_{i<n-1} (f(x_{b_i}) = x_{a_{i+1}}) \wedge (f(x_{b_{n-1}}) = x_{a_0}).$$

Легко видеть, что для любой системы $\mathcal{A}$ гомоморфизм из $\mathcal{C}_n$ в $\mathcal{A}$ существует тогда и только тогда, когда в $\mathcal{A}$ истинно предложения $\exists \overline{x} \Phi_n(\overline{x})$. Для любого $m > 0$ пусть $q(n,m)$ обозначает квазитождество

$$\forall \overline{x} [\Phi_n(\overline{x}) \to g(x_{b_0}) = x_{a_m}].$$

Из леммы 1 следует, что для любой системы $\mathcal{A}$ предложение

$$\exists \overline{x} [\Phi_n(\overline{x}) \wedge (g(x_{b_0}) = x_{a_m})]$$

истинно в $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм из $\mathcal{C}_m$ в $\mathcal{A}$.

Лемма 3. *Пусть $n, k > 1$ и $m > 0$. Квазитождество $q(n,m)$ истинно в системе $\mathcal{C}_k$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух условий: либо k не делит n, либо k является делителем числа m.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{C}_k \models q(n,m)$. Если k делит n, то по лемме 1 существует гомоморфизм из $\mathcal{C}_n$ на $\mathcal{C}_k$. Значит, $\mathcal{C}_k \models \Phi_n(\overline{x})$ для некоторого кортежа $\overline{x}$. Так как в $\mathcal{C}_k$ истинно и заключение квазитождества $q(n,m)$, существует гомоморфизм из $\mathcal{C}_m$ на $\mathcal{C}_k$. Следовательно, k делит m.

Обратно, если k делит m, то при интерпретации переменных $x_0 \mapsto 0$, $x_{a_i} \mapsto a^k_{i_*}$, $x_{b_i} \mapsto b^k_{i_*}$, где i_* — остаток от деления i на k, в $\mathcal{C}_k$ истинны и посылка, и заключение квазитождества $q(n,m)$. Из утверждения (в) леммы 1 следует, что при любой другой интерпретации и в случае, когда k не делит n, все переменные интерпретируются элементами множества $\{0\} \cup A_k$, причем каждая переменная x_{a_i} интерпретируется элементом 0. Значит, при любой интерпретации переменных в $\mathcal{C}_k$ истинны и посылка, и заключение квазитождества $q(n,m)$. $\square$

3. Доказательство теорем

В этом параграфе мы докажем сформулированные ранее теоремы 1 и 2.

Доказательство теоремы 1. В силу предложения 2 достаточно показать, что системы, $\mathcal{A}_X = \mathcal{C}_{p(X)}$, где $X \in I$, образуют AD-семейство в квазимногообразии $\mathbf{V}$.

Условие (P_1) не требует проверки, так как по построению $\mathcal{A}_\varnothing$ — тривиальная система.

Условие (P_2) сразу следует из утверждения (б) леммы 2.

Проверим условие (P_3). Пусть $X \neq \varnothing$ и пусть $\mathcal{A}_X \in \mathbf{Q}(\mathcal{A}_Y)$. Так как $\mathcal{A}_Y$ — конечная система, имеем $\mathcal{A}_X \in \mathbf{P_s S}(\mathcal{A}_Y)$. По условию (3) система $\mathcal{A}_X$ аппроксимируется копиями системы $\mathcal{A}_Y$. В частности, существует гомоморфизм из $\mathcal{A}_X$ на $\mathcal{A}_Y$. По лемме 2 получаем $Y \subseteq X$. Если $Y \neq X$, то элементы $x = b_0$ и $y = b_{p(Y)}$ различные, но $\varphi(x) = \varphi(y)$ для любого гомоморфизма φ из $\mathcal{A}_X$ на $\mathcal{A}_Y$.

Проверим условие (P_4). Пусть $\mathcal{A}_X$ представляется в виде подпрямого произведения систем $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ из $\mathbf{Q}(\mathbf{A})$. В частности, $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathbf{V}$. По условию (3) для $\mathbf{X} = \{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\}$ система $\mathcal{A}_X$ аппроксимируется подсистемами $\mathcal{B}_1^1, \ldots, \mathcal{B}_1^m$ системы $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2^1, \ldots, \mathcal{B}_2^k$ системы $\mathcal{B}_2$, причем все эти подсистемы лежат в $\mathbf{W}$. По лемме 1 каждая подсистема $\mathcal{B}_i^j$ изоморфна $\mathcal{A}_{X(i,j)}$ для подходящего $X(i,j) \in I$. Обозначим $Y_i = \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant m} X(i,j)$, где $i \in \{1,2\}$. Тогда $\mathcal{A}_{Y_i} \in \mathbf{P_s S}(\mathcal{B}_i)$ и $Y_i \subseteq X$ для $i \in \{1,2\}$. По лемме 2 получаем $X = Y_1 \cup Y_2$. $\square$

Доказательство теоремы 2. Укажем семейство мощности 2^ω, состоящее из элементов решетки $\mathrm{L_q}(\mathbf{V})$, не имеющих покрытий. Приводимые рассуждения аналогичны доказательствам известных фактов о существовании таких семейств (см. [2, лемма 3] и [4, теорема 4]). Заметим, что заключительную часть доказательства удалось упростить несмотря на более сложное строение рассматриваемых систем.

Для каждого бесконечного собственного подмножества X множества $\mathbb{P}$ пусть $\mathbf{K}_X$ обозначает класс систем из $\mathbf{V}$, в которые не вложима ни одна система $\mathcal{C}_{p^k s}$, где $p \notin X$. Ясно, что $\mathbf{K}_X \neq \mathbf{K}_Y$, если $X \neq Y$. Поэтому существует 2^ω различных классов вида $\mathbf{K}_X$. В дальнейшем будем считать, что зафиксировано бесконечное множество X, где $\varnothing \subsetneq X \subsetneq \mathbb{P}$, и вместо $\mathbf{K}_X$ писать просто $\mathbf{K}$.

Проверим, что $\mathbf{K} \in \mathrm{L_q}(\mathbf{V})$, т. е. $\mathbf{Q}(\mathbf{K}) \subseteq \mathbf{K}$.

Так как квазимногообразие $\mathbf{V}$ локально конечное, достаточно рассматривать только конечные системы. Так как $\mathbf{Q}(\mathbf{K}) = \mathbf{L_s P_s}(\mathbf{K})$ (см. [3, теорема 2.3.6]), для любой системы $\mathcal{A} \in \mathbf{Q}(\mathbf{K})$ существует надпрямой спектр систем $\mathcal{A}_i$ из $\mathbf{P_s}(\mathbf{K})$ такой, что $\mathcal{A}$ изоморфна пределу этого спектра. Для конечной системы $\mathcal{A}$ по теореме 1.2.9. из [3] найдется индекс i такой, что $\mathcal{A}$ вложима в $\mathcal{A}_i$. Значит, $\mathcal{A} \in \mathbf{SP_s}(\mathbf{K}) \subseteq \mathbf{SP}(\mathbf{K})$. Если $\mathcal{C}_n$ вложима в $\mathcal{A}$, то $\mathcal{C}_n \in \mathbf{SSP}(\mathbf{K}) = \mathbf{SP}(\mathbf{K}) = \mathbf{P_s S}(\mathbf{K})$, т. е. $\mathcal{C}_n \leq \mathcal{A}_0 \times \cdots \times \mathcal{A}_{n-1}$, где $\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_{n-1} \in \mathbf{K}$. Используя условие (3) и лемму 1, заключаем, что $\mathcal{C}_n \leq \mathcal{C}_{m_0} \times \cdots \times \mathcal{C}_{m_{n-1}}$, где каждая система $\mathcal{C}_{m_i}$ является подсистемой системы $\mathcal{A}_i$. По утверждению (г) леммы 2 простое число p делит число n тогда и только тогда, когда p делит хотя бы одно из m_i. Так как $\mathcal{A}_i \in \mathbf{K}$ и $\mathcal{C}_{m_i} \in \mathbf{S}(\mathcal{A}_i)$, последнее условие не может выполняться.

Таким образом, $\mathbf{Q}(\mathbf{K}) \subseteq \mathbf{K}$.

Предположим, что в решетке $\mathrm{L_q}(\mathbf{V})$ существует покрытие $\mathbf{K}' \succ \mathbf{K}$. Тогда существует система $\mathcal{A} \in \mathbf{K}' \setminus \mathbf{K}$, т. е. $\mathcal{C}_n$ вкладывается как подсистема в $\mathcal{A}$, причем n делится на простое число p, не принадлежащее X. Так как

$$\mathbf{K} \subsetneq \mathbf{Q}(\mathbf{K} \cup \{\mathcal{C}_n\}) \subseteq \mathbf{Q}(\mathbf{K} \cup \{\mathcal{A}\}) \subseteq \mathbf{K}'$$

и $\mathbf{K} \prec \mathbf{Q}(\mathbf{K}')$, заключаем, что $\mathbf{Q}(\mathbf{K} \cup \{\mathcal{C}_n\}) = \mathbf{K}'$.

Пусть $n = p^k s$, где $p \notin X$ и числа p и s взаимно простые. Тогда в $\mathcal{C}_n$ ложно квазитождество $q(n,s)$. По лемме 3 это квазитождество истинно в любой системе из $\mathbf{K}$. Следовательно, $\mathbf{K}$ определяется в $\mathbf{K}'$ одним квазитождеством $q(n,m)$.

Так как множество X бесконечное, существует простое число $r \in X$, взаимно простое с числом n. Рассмотрим систему $\mathcal{C}_{nr}$. Так как $r \in X$, имеем $\mathcal{C}_r \in \mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}'$. По лемме 1 система $\mathcal{C}_{nr}$ представима в виде подпрямого произведения систем $\mathcal{C}_r$ и $\mathcal{C}_n$. Так как $\mathcal{C}_n \in \mathbf{K}'$, получаем $\mathcal{C}_{nr} \in \mathbf{K}'$. Так как nr не делит n, в $\mathcal{C}_{nr}$ истинно квазитождество $q(n,s)$, определяющее в $\mathbf{K}'$ квазимногообразие $\mathbf{K}$. Следовательно, $\mathcal{C}_{nr} \in \mathbf{K}$. Так как $n = p^k s$ и $p \notin X$, получаем $\mathcal{C}_{nr} \notin \mathbf{K}$, противоречие.

Таким образом, ни одно $\mathbf{V}$-квазимногообразие $\mathbf{K}(X)$, где X — бесконечное собственное подмножество множества $\mathbb{P}$ простых чисел, не имеет покрытий в решетке $\mathrm{L_q}(\mathbf{V})$, т. е. существует 2^ω таких подквазимногообразий. Согласно [2], квазимногообразия $\mathbf{K}(X)$ не имеют независимого базиса квазитождеств. □

Заметим, что базисы квазитождеств для $\mathbf{K}(X)$ можно указать явно, используя квазитождества $q(n,m)$.

Автор благодарен анонимному рецензенту за ряд полезных замечаний.

References

[1] M. E. Adams and W. Dziobiak, *Q-universal quasivarieties of algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., **120** (1994), 1053–1059. Zbl 0810.08007

[2] V. A. Gorbunov, *Covers in lattices of quasivarieties and independent axiomatizability*, Algebra and Logic, **16** (1977), 340–369. Zbl 0403.08009

[3] V. A. Gorbunov, *Algebraic Theory of Quasivarieties*, Plenum, New York, 1998. Zbl 0986.08001

[4] V. K. Kartashov, *Quasivarieties of unary algebras with a finite number of cycles*, Algebra and Logic, **19** (1980), 106–120.

[5] A. V. Kravchenko, *Complexity of lattices of quasivarieties for varieties of unary algebras*, Siberian Adv. Math., **12** (2001), 63–76. Zbl 1017.08005

[6] A. Nurakunov, *Unreasonable lattices of quasivarieties*, Internat. J. Algebra Comput., **22**:3 (2012), 125006. Zbl 1255.08002

[7] M. V. Sapir, *The lattice of quasivarieties of semigroups*, Algebra Universalis, **21** (1985), 172–180. Zbl 0599.08014

[8] M. V. Schwidefsky, *Complexity of quasivariety lattices*, Algebra and Logic, **54** (2015), 245–257. Zbl 06526402

Aleksandr Vladimirovich Kravchenko
[a] Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia
[b] Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia
E-mail address: a.v.kravchenko@mail.ru