S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 411–425 (2016) УДК 519.632.8
DOI 10.17377/semi.2016.13.036 MSC 35J05,35P05

О ВЛИЯНИИ ПАРАМЕТРОВ НА РАЗРЕШИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Н.Н. ШАДРИНА

Abstract. The solvability of boundary value problems in composite area with the definition of the special conditions of conjugation (gluing) at the interface is studied for elliptic equations with spectral parameter.

Keywords: elliptic equations with spectral parameter, conjugate problems, regular solutions, uniqueness and non-uniqueness, existence and non-existence.

1. Введение

Работа посвящена математическому исследованию влияния параметров на единственность и неединственность, существование и несуществование регулярных решений некоторых неклассических задач сопряжения (обобщенных задач дифракции) для эллиптических уравнений. Более точно, работа будет посвящена исследованию разрешимости задачи сопряжения для оператора Лапласа со спектральным параметром в составной области при задании на поверхности раздела специальных условий сопряжения (склейки).

Классическая задача дифракции соответствует ситуации, в которой то или иное дифференциальное уравнение (возможно, с разрывными коэффициентами) рассматривается в двух областях с общим участком границы, и при этом на общем участке границы задаются условия непрерывности решения и потока (или же условия, обеспечивающие заданный скачок решения и потока) при переходе через поверхность раздела. Обобщенный задачей дифракции, или задачей сопряжения, будем называть такую задачу, в которой вместо условий

Shadrina, N.N., On the influence of parameters on the solvability of some conjugate problems for elliptical equations.

Поступила 25 февраля 2016 г., опубликована 22 мая 2016 г.

непрерывности задаются условия сопряжения (склейки) с произвольными коэффициентами. Для уравнения второго порядка задачи дифракции изучаются давно — см. [1]–[8]; из работ последнего времени отметим статьи [9]–[24]. Вместе с тем заметим, что вопрос о влиянии на разрешимость задачи параметров — например, коэффицентов условий сопряжения — представляется на сегодняшний день изученным не полностью.

Как уже говорилось выше, задачи сопряжения в настоящей работе будут изучаться прежде всего с математической точки зрения. Заметим, что задачи сопряжения с теми или иными условиями, отличными от условий непрерывности, ранее изучались и как математические задачи, и как задачи, связанные с математическим моделированием -см., например, работы [2], [8], [9]–[24].

2. Постановка задачи

Пусть x есть точка ограниченной области Ω пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты - бесконечно-дифференцируемой) границей Γ, y есть точка интервала $(a,1)$, $-\infty < a < 0$, Q есть цилиндр $\Omega\times(a,1)$, $S=\Gamma\times(a,1)$ есть боковая граница Q. Далее, пусть $f(x,y)$ есть заданная функция, определенная при $(x,y)\in\overline{Q}$, α, β и λ есть заданные действительные числа.

Обозначим $Q_1=\Omega\times(a,0)$, $Q_2=\Omega\times(0,1)$, $S_1=\Gamma\times(a,0)$, $S_2=\Gamma\times(0,1)$.

Задача сопряжения: *найти функцию $u(x,y)$ такую, что в цилиндрах Q_1 и Q_2 выполняется уравнение*

$$\Delta u=\lambda u+f(x,y) \tag{1}$$

и при этом для функции $u(x,y)$ выполняются условия

$$u(x,y)|_{S_1\cup S_2}=0, \tag{2}$$

$$u(x,a)=u(x,1)=0,\quad x\in\Omega, \tag{3}$$

$$u(x,-0)=\alpha u(x,+0),\quad u_y(x,+0)=\beta u_y(x,-0),\quad x\in\Omega. \tag{4}$$

Задача (1)–(4) в случае $\alpha=\beta=1$ представляет собой хорошо изученную классическую задачу дифракции, в случае же произвольных чисел α и β она уже не представляется хорошо изученной.

Всюду в дальнейшем будем рассматривать случай $\alpha\beta\neq 0$ — поскольку при $\alpha\beta=0$ задача является распадающейся на независимые задачи в цилиндрах Q_1 и Q_2, и исследование их разрешимости не представляется сложным.

Обозначим через V множество функций

$$V=\{v(x,y):\quad v(x,y)\in W_2^2(Q_1),\quad v(x,y)\in W_2^2(Q_2)\}.$$

Очевидно, что для функций из пространства V определены следы $v(x,+0)$, $v(x,-0)$, $v_y(x,+0)$, $v_y(x,-0)$ (см. [23], [24]). Также очевидно, что пространство V есть банахово пространство с нормой

$$\|v\|_V=\left(\|v\|^2_{W_2^2(Q_1)}+\|v\|^2_{W_2^2(Q_2)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Всюду ниже под решением (или регулярным решением) задачи (1)–(4) будем понимать функцию $v(x,y)$ из пространства V, являющуюся решением уравнения (1) в цилиндрах Q_1 и Q_2 и такую, что для нее выполняются условия (2)–(4).

Как уже говорилось выше, целью работы является исследование влияния параметров α, β, a и λ на единственность и неединственность, существование и несуществование решений задачи (1)–(4).

3. Единственность и неединственность решений. Собственные числа и собственные функции

Вопрос о единственности и неединственности решений задачи (1)-(4) эквивалентен вопросу о существовании или несуществовании нетривиальных в цилиндрах Q_1 и Q_2 решений уравнения

$$\Delta u = \lambda u, \tag{1_0}$$

удовлетворяющих условиям (2)–(4). Другими словами, вопрос о единственности или неединственности решений задачи (1)-(4) эквивалентен вопросу о существовании собственных чисел и собственных функций в задаче (1_0), (2)–(4).

Как будет показано ниже, при фиксированных α, β и λ единственность или неединственность решений задачи (1)–(4) (или задачи (1_0), (2)-(4)) будет определяться числом a.

Определение 1. *Числа $a = a(\alpha, \beta, \lambda)$, определяющие высоту цилиндра Q и такие, что при фиксированных α, β и λ имеет место неединственность решений задачи* (1)-(4)*, назовем критическими числами задачи сопряжения.*

Пусть $\{W_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ есть ортонормированная в пространстве $L_2(\Omega)$ система собственных функций задачи Дирихле для оператора Δ_x $\left(\Delta_x = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)$ с соответствующими собственными числами μ_k:

$$\Delta_x W_k = \mu_k W_k,\ W_k|_\Gamma = 0.$$

Известно, что собственные числа μ_k все отрицательные, простые и имеют единственную предельную точку в $-\infty$. Будем считать, что числа μ_k упорядочены по убыванию.

Рассмотрим вначале случай $\lambda > \mu_1$.

Для неотрицательных действительных чисел t и для неположительных чисел a определим функцию $\varphi(t,a)$:

$$\varphi(t,a) = -\frac{(1-e^{2ta})(1+e^{-2t})}{(1+e^{2ta})(1-e^{-2t})}.$$

Установим вначале вспомогательное утверждение о свойствах этой функции.

Утверждение 1. *При фиксированном отрицательном a таком, что $a \neq -1$ функция $\varphi(t,a)$ будет строго монотонна по t при $t > 0$.*

Доказательство. Рассмотрим вначале случай $a < -1$. Положим $b = -a$, $z = e^{-2t}$, $\psi_0(z) = \frac{(z^b-1)(z+1)}{(z^b+1)(z-1)}$. Справедливы равенства

$$\varphi(t,a) = -\psi_0(z), \quad \psi_0(0+0) = 1, \quad \psi_0(1-0) = b.$$

Покажем, что производная $\psi_0'(z)$ не обращается в нуль при $z \in (0,1)$. Имеем

$$\psi_0'(z) = \frac{-2z^{2b} + 2bz^{b+1} - 2bz^{b-1} + 2}{(z^b+1)^2(z-1)^2}, \quad \psi_0'(0+0) = 2, \quad \psi_0'(1-0) = 0.$$

Предположим, что существует точка z_0 из интервала $(0,1)$, в которой выполняется $\psi_0'(z_0)=0$. Обозначим $\psi_1(z)=z^{2b}-bz^{b+1}+bz^{b-1}-1$. Для функции $\psi_1(z)$ имеют место равенства

$$\psi_1(z_0)=0, \quad \psi_1(0+0)=-1, \quad \psi_1(1-0)=0.$$

Но тогда в интервале $(0,1)$ обязательно найдется точка z_1 такая, что $\psi_1'(z_1)=0$. Положим

$$\psi_2(z)=2bz^{b+1}-b(b+1)z^2+b(b-1).$$

Имеем

$$\psi_1'(z)=z^{b-2}\psi_2(z), \quad \psi_2(z_1)=0, \quad \psi_2(0+0)=b(b-1), \quad \psi_2(1-0)=0.$$

Но тогда либо при $z\in(0,1)$ выполняется $\psi_2'(z)<0$, либо в интервале $(0,1)$ найдется точка z_2 такая, что $\psi_2'(z_2)=0$. Последнее равенство на интервале $(0,1)$ невозможно, значит, выполняется $\psi_2'(z)<0$ при $z\in(0,1)$. Поскольку $\psi_2(0+0)>0$, $\psi_2(1-0)=0$, то выполняется $\psi_1(z)>0$ при $z\in(0,1)$. Получили противоречие с предположением о существовании точки z_0 такой, что $z_0\in(0,1)$, $\psi_0'(z_0)=0$.

Итак, для функции $\psi_0'(z)$ выполняется

$$\psi_0'(z)<0, \quad \textit{при} \quad z\in(0,1), \quad \psi_0'(1-0)\le 0.$$

А это и означает, что функция $\varphi(t,a)$ строго монотонна при $t>0$.

Случай $-1<a<0$ сводится к рассмотренному с помощью замены $z=e^{-2t}$, $c=-\frac{1}{a}$.

Утверждение доказано. □

Обозначим $\delta_k(\lambda)=\sqrt{|\lambda-\mu_k|}$, $\gamma_k(\lambda)=\varphi(\delta_k(\lambda),a)$, $k=1,2,\ldots$.

Теорема 1. *Пусть α, β, a и λ_0 есть фиксированные действительные числа, причем число a отрицательно. Тогда*

(1) *если $a\neq-1$, $\lambda_0>\mu_1$, $\alpha\beta\ge\gamma_1(\lambda_0)$ или $\alpha\beta\le-1$ при $a\in(-1,0)$, $\alpha\beta\le\gamma_1(\lambda_0)$ или $\alpha\beta\ge-1$ при $a<-1$, то задача (1_0), (2)-(4) при $\lambda=\lambda_0$ имеет только нулевое решение;*

(2) *если $a\neq-1$, $\lambda_0>\mu_1$, $\alpha\beta\in(-1,\gamma_1(\lambda_0))$ при $a\in(-1,0)$, $\alpha\beta\in(\gamma_1(\lambda_0),-1)$ при $a<-1$ и для некоторого фиксированного натурального числа k_0 выполняется равенство*

$$\alpha\beta=\varphi(\delta_{k_0}(\lambda_0),a),$$

то число λ_0 будет собственным, причем простым, числом задачи (1_0), (2)-(4), если при тех же α, β, a и λ_0 для всех натуральных чисел k выполняется

$$\alpha\beta\neq\varphi(\delta_k(\lambda_0),a),$$

то задача (1_0), (2)-(4) при $\lambda=\lambda_0$ имеет только нулевое решение;

(3) *если $a=-1$, $\alpha\beta=-1$, то любое число λ_0 из промежутка $(\mu_1,+\infty)$ будет собственным числом задачи (1_0), (2)-(4), причем бесконечной кратности, если же $a=-1$, $\alpha\beta\neq-1$, $\lambda_0>\mu_1$, то задача (1_0), (2)-(4) при $\lambda=\lambda_0$ имеет только нулевое решение.*

Доказательство. Решение $u(x,y)$ задачи (1_0), (2)-(4) при $\lambda=\lambda_0$ ищем в виде

$$u(x,y)=\begin{cases} u_1(x,y), & (x,y)\in Q_1,\\ u_2(x,y), & (x,y)\in Q_2,\end{cases}$$

функции $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ определим равенствами

$$u_1(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k(y)W_k(x),\quad u_2(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}d_k(y)W_k(x).$$

Уравнение (1_0) и условия (3) и (4) дают для функций $c_k(y)$ и $d_k(y)$ соотношения

$$\begin{aligned} c_k''(y)+(\mu_k-\lambda_0)c_k(y)&=0, & d_k''(y)+(\mu_k-\lambda_0)d_k(y)&=0,\\ c_k(a)&=0, & d_k(1)&=0,\\ c_k(-0)&=\alpha d_k(+0), & d_k'(+0)&=\beta c_k'(-0). \end{aligned}$$

Поскольку $\mu_k-\lambda_0<0$, то функции $c_k(y)$ и $d_k(y)$ имеют вид

$$c_k(y)=A_ke^{\delta_k(\lambda_0)y}+B_ke^{-\delta_k(\lambda_0)y},\quad d_k(y)=C_ke^{\delta_k(\lambda_0)y}+D_ke^{-\delta_k(\lambda_0)y},$$

и для чисел A_k, B_k, C_k и D_k выполняется система

$$\begin{gathered} A_k+B_k=\alpha(C_k+D_k),\\ C_k-D_k=\beta(A_k-B_k),\\ A_ke^{\delta_k(\lambda_0)a}+B_ke^{-\delta_k(\lambda_0)a}=0,\\ C_ke^{\delta_k(\lambda_0)}+D_ke^{-\delta_k(\lambda_0)}=0. \end{gathered}$$

У этой системы существует нетривиальное решение, если выполняется равенство

$$(1+\alpha\beta)[e^{\delta_k(\lambda_0)(a-1)}-e^{-\delta_k(\lambda_0)(a-1)}]+(1-\alpha\beta)[e^{\delta_k(\lambda_0)(a+1)}-e^{-\delta_k(\lambda_0)(a+1)}]=0.$$

Это равенство эквивалентно следующему:

$$\alpha\beta=\varphi(\delta_k(\lambda_0),a). \tag{5}$$

Поскольку функция $\varphi(t,a)$ монотонно убывает при $a\in(-1,0)$ от a до -1, монотонно возрастает при $a<-1$ вновь от a до -1 (см. доказанное выше утверждение 1), то при $\lambda_0>\mu_1$, $a\in(-1,0)$, $\alpha\beta\geq\gamma_1(\lambda_0)$ или $\alpha\beta\leq-1$, при $\lambda>\mu_1$, $a<-1$, $\alpha\beta\leq\gamma_1(\lambda_0)$ или $\alpha\beta\geq-1$ равенство (5) выполняться не может, числа A_k, B_k, C_k и D_k есть нули для всех натуральных чисел k, все компоненты функций $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ есть тождественно нулевые функции.

Пусть теперь выполняются неравенства и включения п. 2, и пусть для некоторого фиксированного натурального числа k_0 выполняется равенство

$$\alpha\beta=\varphi(\delta_{k_0}(\lambda_0),a). \tag{5'}$$

Тогда компоненты $c_{k_0}(y)W_{k_0}(x)$ и $d_{k_0}(y)W_{k_0}(x)$ функций $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ будут ненулевыми. Это и означает существование нетривиального решения задачи (1_0), (2)-(4) при $\lambda=\lambda_0$. Далее, вследствие доказанного выше утверждения 1, равенство $(5')$, определяющее собственное число λ_0, может выполняться лишь для одного натурального числа k_0. Тем самым этому числу λ_0 соответствует лишь одна собственная функция (определенная с точностью до постоянного множителя), и, значит, при выполнении условия $(5')$ число λ_0 будет простым собственным числом задачи (1_0), (2)-(4).

Если для всех натуральных чисел k выполняется

$$\alpha\beta\neq\varphi(\delta_k(\lambda_0),a),$$

то число λ_0 не будет собственным числом задачи (1_0), (2)-(4) — это очевидно.

Наконец, пусть выполняется $a = -1$. Тогда, если $\alpha\beta = -1$, то равенство (5) будет выполняться для всех чисел λ_0 из промежутка $(\mu_1, +\infty)$ и для всех натуральных чисел k. Другими словами, каждая из функций $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ будет содержать бесконечно много ненулевых линейно-независимых слагаемых. А это и означает, что любое число λ_0 из промежутка $(\mu_1, +\infty)$ будет собственным числом задачи (1_0), (2)-(4) бесконечной кратности.

Наоборот, если $a = -1$ и $\alpha\beta \neq -1$, то равенство (5) не будет выполняться, и тем самым при всех числах λ_0 из промежутка $(\mu_1, +\infty)$ задача (1_0), (2)–(4) при $\lambda = \lambda_0$ будет иметь только нулевое решение.

Теорема полностью доказана. □

Обсудим теперь вопрос о критических числах задачи (1_0), (2)–(4) в случае $\lambda > \mu_1$.

Обозначим

$$b_k(\lambda) = -\frac{1 + e^{-2\delta_k(\lambda)}}{1 - e^{-2\delta_k(\lambda)}}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Теорема 2. *Пусть α, β и λ_0 есть фиксированные действительные числа такие, что $\alpha\beta < 0$, $\lambda_0 > \mu_1$. Тогда имеют место свойства*

(1) *если $\alpha\beta > -1$, то существует счетное множество чисел $\{a_k^*\}_{k=1}^{\infty}$, принадлежащих интервалу $(-1, 0)$ и являющихся критическими для задачи (1_0), (2)-(4) при $\lambda = \lambda_0$, причем для чисел a_k^* выполняется $a_k^* \to 0$ при $k \to \infty$;*

(2) *если $\alpha\beta = -1$, то лишь число $a = -1$ будет критическим для задачи (1_0), (2)–(4) при $\lambda = \lambda_0$;*

(3) *если $\alpha\beta \in (b_1(\lambda_0), -1)$, то существует лишь конечное число критических чисел для задачи (1_0), (2)–(4) при $\lambda = \lambda_0$;*

(4) *если $\alpha\beta \leq b_1(\lambda_0)$, то критических чисел задача (1_0), (2)-(4) при $\lambda = \lambda_0$ не имеет.*

Доказательство. Число a будет критическим для задачи (1_0), (2)-(4) при фиксированных α, β и при $\lambda = \lambda_0$, если будет выполняться равенство (5).

Обозначим $\widetilde{b_k}(\lambda_0) = -b_k(\lambda_0)$. Равенство (5) эквивалентно равенству

$$a = \frac{1}{2\delta_k(\lambda_0)} \ln \frac{\widetilde{b_k}(\lambda_0) + \alpha\beta}{\widetilde{b_k}(\lambda_0) - \alpha\beta}. \tag{6}$$

Если $\alpha\beta > -1$, то выполняется $\widetilde{b_k}(\lambda_0) + \alpha\beta > 0$. Следовательно, равенство (6) и будет определять искомую последовательность $\{a_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ критических чисел, и для этой последовательности будет выполняться $a_k^* \to 0$ при $k \to \infty$.

Очевидно, что при $\alpha\beta = -1$ лишь при $a = -1$ будет выполняться равенство (5).

Пусть теперь выполняется $b_1(\lambda_0) < \alpha\beta < -1$. Поскольку последовательность $\{b_k(\lambda_0)\}_{k=1}^{\infty}$ монотонно возрастает и имеет своим пределом -1, то существует натуральное число k_1 такое, что выполняются неравенства

$$b_{k_1}(\lambda_0) < \alpha\beta \leq b_{k_1+1}(\lambda_0).$$

Но тогда равенство (5) будет выполняться лишь для конечного набора отрицательных чисел a_k^*, $k = 1, \ldots, k_1$. Эти числа и будут критическими для задачи (1_0), (2)-(4) при $\lambda = \lambda_0$.

Наконец, пусть выполняется $\alpha\beta \le b_1(\lambda_0)$. Очевидно, что в этом случае равенство (5) не может выполняться. Критических чисел нет.

Теорема полностью доказана. □

На следующем шаге обсудим вопрос о собственных числах задачи (1_0), (2)-(4), лежащих на промежутке $(-\infty, \mu_1]$.

Положим $h(t,a) = \alpha\beta \cos at \cdot \sin t - \cos t \cdot \sin at$.

Утверждение 2. *Пусть a, α и β есть фиксированные действительные числа такие, что $a < 0$, и если $a = -1$, то $\alpha\beta \ne -1$. Тогда функция $h(t,a)$ имеет при $t \ge 0$ счетное множество нулей, причем это множество не имеет конечных предельных точек.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что если считать переменную t комплексной ($t = \tau + i\theta$), то функция $h(t,a)$ будет аналитической на всей комплексной плоскости функцией, и в силу внутренней теоремы единственности [25] она не может иметь более чем счетное множество нулей, само же это множество не может иметь конечных предельных точек. Следовательно, и при сужении функции $h(t,a)$ на полуось $t \ge 0$ множество ее нулей не может иметь конечных предельных точек.

Очевидно, что при $\alpha\beta = \pm 1$ функция $h(t,a)$ имеет при $t \ge 0$ бесконечно много нулей. Пусть теперь $\alpha\beta \ne \pm 1$. Определим функцию $h_1(t,b)$:

$$h_1(t,b) = \frac{\alpha\beta + 1}{\alpha\beta - 1} \sin(b+1)t - \sin(b-1)t.$$

Покажем, что при $b > 0$ функция $h_1(t,b)$ имеет на полуоси $t \ge 0$ бесконечно много нулей. Предположим, что это не так. Тогда найдется положительное число T такое, что при $t > T$ функция $h_1(t,b)$ либо положительна, либо отрицательна. Пусть для определенности выполняется $h_1(t,b) < 0$ при $t > T$. Рассмотрим вначале случай $b > 1$. Зафиксируем натуральное число k. Имеем

$$\frac{2(k+1)(b+1)}{b-1} - \frac{(2k+1)(b+1)}{b-1} = \frac{b+1}{b-1} > 1.$$

Следовательно, на интервале $\left(\frac{(2k+1)(b+1)}{b-1}, \frac{2(k+1)(b+1)}{b-1}\right)$ имеется по крайней мере одно натуральное число l_k. Положим $t_k = \frac{\pi l_k}{b+1}$. Имеем $h_1(t_k,b) = -\sin\frac{\pi l_k(b-1)}{b+1} > 0$. Поскольку число k можно неограниченно увеличивать, то указанный выше интервал будет неограниченно сдвигаться вправо, и число l_k можно сделать сколь угодно большим — в частности, таким, что будет выполняться $t_k > T$. Получаем противоречие с предположением об отрицательности функции $h_1(t,b)$ при $t > T$.

Рассмотрим теперь случай $0 < b < 1$. Зафиксируем натуральное число k и определим натуральное число l_k^* как число, принадлежащее интервалу $\left(\frac{2k(1+b)}{1-b}, \frac{(2k+1)(1+b)}{1-b}\right)$ (такое натуральное число l_k^* существует). Положим $t_k^* = \frac{\pi l_k^*}{b+1}$. Имеем $h_1(t_k^*, b) > 0$. Произвольность числа k и предположение об отрицательности функции $h_1(t,b)$ вновь дают противоречие.

Предположение о положительности функции $h_1(t,b)$ при $t > T$ и аналогичные изложенным выше рассуждения также приводят в случаях $0 < b < 1$ или $b > 1$ к противоречию. Следовательно, при $b > 0$, $b \ne 1$ функция $h_1(t,b)$ имеет бесконечно много нулей при $t \ge 0$. Наличие у функции $h_1(t,b)$ при $b = 1$ бесконечного числа нулей очевидно.

Итак, функция $h_1(t,b)$ при $b>0$ имеет бесконечно много нулей. Положив $b=-a$ и учитывая равенство

$$h(t,a)=\frac{1}{2}\left[(\alpha\beta-1)\sin(a+1)t-(\alpha\beta+1)\sin(a-1)t\right],$$

очевидным образом получаем, что и функция $h(t,a)$ при $a<0$, $t\geq 0$ имеет бесконечно много нулей.

Из проведенных выше рассуждений и следует, что утверждение 2 полностью доказано. □

Вернемся к задаче (1_0), (2)-(4).

Обозначим через t_m, $m=1,2,\ldots$, положительные корни функции $h(t,a)$, расположенные в порядке возрастания, через $\lambda_{k,m}$ обозначим числа $\lambda_{k,m}=\mu_k-t_m^2$. Далее, для $a>-1$, $\alpha\beta\in(-1,a)$, или $a<-1$, $\alpha\beta\in(a,-1)$ обозначим через $t_{0,k}(\lambda)$ положительное решение уравнения $\alpha\beta=\varphi(\delta_k(\lambda),a)$ (если оно существует). Наконец, для заданного числа λ_0 из промежутка $(-\infty,\mu_1]$ через $\lambda_{k,0}$, $k=1,2,\ldots$, обозначим число $\lambda_{k,0}=\mu_k+t_{0,k}^2(\lambda_0)$.

Теорема 3. *Пусть α, β, a и λ_0 есть фиксированные действительные числа, причем число a отрицательно, число λ_0 принадлежит промежутку $(-\infty,\mu_1]$. Тогда*

(1) *если $\alpha\beta>0$, $\lambda_0=\lambda_{k,m}$ для некоторых натуральных чисел k и m, то λ_0 будет собственным числом задачи (1_0), (2)–(4), если же $\alpha\beta>0$, λ_0 не совпадает ни с одним из чисел $\lambda_{k,m}$, то задача (1_0), (2)–(4) при $\lambda=\lambda_0$ будет иметь только нулевое решение;*

(2) *если $a\neq-1$, $\alpha\beta\in(-1,a)$ при $a>-1$ или $\alpha\beta\in(a,-1)$ при $a<-1$, $\lambda_0=\lambda_{k,m}$ или $\lambda_0=\lambda_{l,0}$ (если число $\lambda_{l,0}$ определено) для некоторых натуральных чисел k, m и l, то λ_0 будет собственным числом задачи (1_0), (2)–(4), если же λ_0 при тех же ограничениях на числа a и $\alpha\beta$ не совпадает ни с одним из чисел $\lambda_{k,m}$ или $\lambda_{l,0}$, то задача (1_0), (2)–(4) будет иметь только нулевое решение;*

(3) *если $a\neq-1$, $\alpha\beta\leq-1$ или $\alpha\beta\in(a,0)$ при $a>-1$, $\alpha\beta\in(-\infty,a)$ или $\alpha\beta\in[-1,0)$ при $a<-1$, $\lambda_0=\lambda_{k,m}$ для некоторых натуральных чисел k и m, то λ_0 будет собственным числом задачи (1_0), (2)–(4), если же λ_0 при тех же ограничениях на числа a и $\alpha\beta$ не совпадает ни с одним из чисел $\lambda_{k,m}$, то задача (1_0), (2)–(4) при $\lambda=\lambda_0$ будет иметь только нулевое решение;*

(4) *если $a\neq-1$, $\alpha\beta=a$, $\lambda_0=\lambda_{k,m}$ или $\lambda_0=\mu_l$ для некоторых натуральных чисел k, m и l, то λ_0 будет собственным числом задачи (1_0), (2)–(4), если же λ_0 не совпадает ни с одним из чисел $\lambda_{k,m}$ или μ_l, то задача (1_0), (2)–(4) будет иметь только нулевое решение;*

(5) *если $a=-1$, $\alpha\beta=-1$, то любое число λ_0 из промежутка $(-\infty,\mu_1]$ будет собственным числом задачи (1_0), (2)–(4), если же $a=-1$, $\alpha\beta<0$, $\alpha\beta\neq-1$, $\lambda_0=\lambda_{k,m}$ для некоторых натуральных чисел k и m, то λ_0 будет собственным числом задачи (1_0), (2)–(4), если же λ_0 при тех же ограничениях на числа a и $\alpha\beta$ не совпадает ни с одним из чисел $\lambda_{k,m}$, то задача (1_0), (2)–(4) будет иметь только нулевое решение.*

Доказательство. Решение задачи (1_0), (2)-(4) вновь определим с помощью функций $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ (см. доказательство теоремы 1), функции $u_1(x,y)$ и

$u_2(x,y)$ вновь определим рядами

$$u_1(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(y) W_k(x), \quad u_2(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(y) W_k(x).$$

Для функций $c_k(y)$, $d_k(y)$ и числа λ_0 должны выполняться равенства

$$\begin{array}{ll} c_k''(y) + (\mu_k - \lambda_0)c_k(y) = 0, & d_k''(y) + (\mu_k - \lambda_0)d_k(y) = 0, \\ c_k(a) = 0, & d_k(1) = 0, \\ c_k(-0) = \alpha d_k(+0), & d_k'(+0) = \beta c_k'(-0). \end{array}$$

Если $\lambda_0 = \lambda_{k,m}$, то имеем $\mu_k - \lambda_{k,m} = t_m^2 > 0$,

$$c_k(y) = A_k \cos t_m y + B_k \sin t_m y,$$

$$d_k(y) = C_k \cos t_m y + D_k \sin t_m y,$$

для чисел A_k, B_k, C_k и D_k выполняются равенства

$$\begin{array}{l} A_k = \alpha C_k, \\ D_k = \beta B_k, \\ A_k \cos t_m a + B_k \sin t_m a = 0, \\ C_k \cos t_m + D_k \sin t_m = 0. \end{array}$$

Определитель этой системы есть число $h(t_m, a)$, и это число равно нулю. Следовательно, числа A_k, B_k, C_k, D_k не все одновременно обращаются в нуль, функции $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ будут содержать ненулевую компоненту, и тем самым число $\lambda_{k,m}$ будет представлять собой собственное число задачи (1_0), (2)-(4).

Пусть теперь число λ_0 не совпадает ни с одним из чисел $\lambda_{k,m}$. Если λ_0 есть собственное число задачи (1_0), (2)–(4), то хотя бы для одного натурального числа k_1 функции $c_{k_1}(y)$ и $d_{k_1}(y)$ не будут тождественно нулевыми. С другой стороны, если для данного числа k_1 выполняется $\mu_{k_1} - \lambda_0 > 0$, то определитель соответствующей алгебраической системы для чисел A_{k_1}, B_{k_1}, C_{k_1} и D_{k_1} должен обращаться в нуль. Но тогда число λ_0 должно совпадать с одним из чисел $\lambda_{k_1,m}$, а это не так. Далее, если для числа k_1 выполняется $\mu_{k_1} - \lambda_0 < 0$, то должно выполняться равенство (5), а это невозможно в силу положительности произведения $\alpha\beta$. Аналогично, равенство $\mu_{k_1} - \lambda_0 = 0$ не может выполняться, поскольку в этом случае из равенства соответствующего определителя нулю следует $a = \alpha\beta$, что также невозможно. Следовательно, предположение о том, что число λ_0 есть собственное число задачи (1_0), (2)–(4) приводит к противоречию. Другими словами, число λ_0, не совпадающее ни с одним из чисел $\lambda_{k,m}$, не является собственным числом задачи (1_0), (2)–(4).

Первая часть теоремы доказана.

Вторая часть теоремы доказывается в целом аналогично, добавляется лишь то, что при принадлежности $\alpha\beta$ указанным промежуткам появляется, быть может, дополнительное собственное число $\lambda_{l,0}$.

Третья часть теоремы теперь очевидна.

Пусть выполняется $a \neq -1$, $\alpha\beta = a$. Если $\lambda_0 = \mu_l$, то имеют место равенства $c_l(y) = A_l y + B_l$, $d_l(y) = C_l y + D_l$, условия (3) и (4) порождают алгебраическую систему, определитель которой равен нулю. Следовательно, функции $c_l(y)$ и $d_l(y)$ будут ненулевыми, число λ_0 будет собственным числом для задачи (1_0), (2)-(4).

Если $\lambda_0 = \lambda_{k,m}$, то существование нетривиальных функций $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ устанавливается аналогично первому случаю.

Если λ_0 не совпадает ни с одним из чисел $\lambda_{k,m}$ или μ_l, то, вновь аналогично первому случаю, устанавливается, что все функции $c_k(y)$ и $d_k(y)$ будут тождественно нулевыми, и тем самым число λ_0 не будет собственным числом задачи (1_0), (2)-(4).

Четвертая часть теоремы доказана.

Пусть теперь $\alpha\beta = a = -1$, и пусть λ_0 есть произвольное число из промежутка $(-\infty, \mu_1]$. Если для некоторого натурального числа k_1 выполняется $\lambda_0 < \mu_{k_1}$, то определитель соответствующей алгебраической системы будет равен нулю, числа A_{k_1}, B_{k_1}, C_{k_1} и D_{k_1} не будут одновременно обращаться в нуль, соответствующие функции $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ не будут тождественно нулевыми. Если для некоторого натурального числа k_2 выполняется $\lambda_0 > \mu_{k_2}$, то вновь функции $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ не будут тождественно нулевыми — поскольку вновь определитель соответствующей алгебраической системы будет нулевым. Наконец, если для некоторого натурального числа k_0 выполняется $\lambda_0 = \mu_{k_0}$, то согласно доказанному в четвертой части теоремы число λ_0 будет собственным числом задачи (1_0), (2)-(4).

Если теперь в случае $a = -1$, $\alpha\beta < 0$, $\alpha\beta \neq -1$ выполняется $\lambda_0 = \lambda_{k,m}$, или, наоборот, число λ_0 не совпадает ни с одним из чисел $\lambda_{k,m}$, то требуемое в пятой части теоремы установлено ранее.

Теорема полностью доказана. □

Резюмируем доказанное в теоремах 1 и 3:

(1) *при $\alpha\beta > 0$ задача (1_0), (2)–(4) не имеет собственных чисел, принадлежащих промежутку $(\mu_1, +\infty)$, на промежутке же $(-\infty, \mu_1]$ собственными числами являются числа $\lambda_{k,m}$, $k, m = 1, 2, \ldots$, и только они;*

(2) *при $a \neq -1$, $\alpha\beta < 0$ на промежутке $(\mu_1, +\infty)$ может лежать лишь одно собственное число задачи (1_0), (2)-(4), или же собственных чисел на этом промежутке нет;*

(3) *при $a \neq -1$, $\alpha\beta < 0$, $\alpha\beta \neq a$ собственными числами задачи (1_0), (2)–(4), принадлежащими промежутку $(-\infty, \mu_1]$, являются числа $\lambda_{k,m}$, $k, m = 1, 2, \ldots$, а также, возможно, одно из чисел $\lambda_{l,0}$;*

(4) *при $a \neq -1$, $\alpha\beta < 0$, $\alpha\beta = a$ собственными числами задачи (1_0), (2)–(4), принадлежащими промежутку $(-\infty, \mu_1]$, являются числа $\lambda_{k,m}$, $k, m = 1, 2, \ldots$, а также числа μ_l, $l = 1, 2, \ldots$;*

(5) *при $a = -1$, $\alpha\beta \neq -1$ собственными числами задачи (1_0), (2)–(4), принадлежащими промежутку $(-\infty, \mu_1]$, являются числа $\lambda_{k,m}$, $k, m = 1, 2, \ldots$;*

(6) *при $a = -1$, $\alpha\beta = -1$ любое действительное число λ будет собственным числом задачи (1_0), (2)–(4).*

Замечание 1. *Нетрудно установить, что каждое из чисел $\lambda_{k,m}$ или μ_l (в соответствующей ситуации) будет собственным числом задачи (1_0), (2)-(4) конечной кратности, но при этом не обязательно простым (последнее нетрудно показать на примере одномерной области Ω).*

Обсудим теперь вопрос о критических числах задачи (1_0), (2)-(4) в случае $\lambda \in (-\infty, \mu_1]$. Рассмотрим вначале случай, когда параметр λ совпадает с одним из чисел μ_k.

Заметим, что при фиксированном положительном t уравнение

$$h(t, a) = 0$$

относительно параметра a представляет собой простейшее тригонометрическое уравнение, причем его отрицательные корни можно расположить в последовательность, сходящуюся к $-\infty$. Для числа t, равного $\delta_k(\lambda)$, через $a_{l,k}(\lambda)$, $l, k = 1, 2, \ldots$, обозначим корни уравнения (7), расположенные в указанную выше последовательность.

Теорема 4. *Пусть α, β и λ_0 есть фиксированные действительные числа, причем $\lambda_0 = \mu_{k0}$ для некоторого числа k_0. Имеют место свойства:*

(1) *если $k_0 > 1$, то для любого натурального числа k_1 такого, что $1 \leq k_1 < k_0$, числа $a_{l,k_1}(\lambda_0)$, $l = 1, 2, \ldots$, будут критическими для задачи (1_0), (2)–(4) при $\lambda = \lambda_0$, причем как в случае $\alpha\beta > 0$, так и в случае $\alpha\beta < 0$;*

(2) *если $\alpha\beta < 0$, то дополнительно к числам $a_{l,k_1}(\lambda_0)$ критическим будет также число $a = \alpha\beta$;*

(3) *если $\alpha\beta > 0$, $k_0 = 1$, то критических чисел задача (1_0), (2)–(4) при $\lambda = \lambda_0$ не имеет;*

(4) *если $\alpha\beta \in (-1, 0)$, то существует последовательность $\{a^*_{k,k_0}\}_{k=k_0+1}^{\infty}$ такая, что $a^*_{k,k_0} \in (-1, 0)$, $a^*_{k,k_0} \to 0$ при $k \to \infty$, и при этом дополнительно к числам $a_{l,k_1}(\lambda_0)$, $l = 1, 2, \ldots$, $\alpha\beta$ числа a^*_{k,k_0} также будут критическими для задачи (1_0), (2)–(4) при $\lambda = \lambda_0$;*

(5) *если $\alpha\beta \in (b_{k_0+1}(\lambda_0), -1)$, то дополнительно к числам $a_{l,k_1}(\lambda_0)$, $l = 1, 2, \ldots$, $\alpha\beta$ существует лишь конечное множество критических чисел для задачи (1_0), (2)-(4) при $\lambda = \lambda_0$;*

(6) *если $\alpha\beta \leq b_{k_0+1}(\lambda_0)$ или $\alpha\beta = -1$, то, кроме чисел $a_{l,k_1}(\lambda_0)$, $\alpha\beta$, других критических чисел задача (1_0), (2)–(4) не имеет.*

Доказательство. Если $\lambda_0 = \mu_{k_0}$, то при $k_0 > 1$, $1 \leq k_1 < k_0$ для функций $c_{k_1}(y)$ и $d_{k_1}(y)$ имеем

$$c''_{k_1} + (\mu_{k_1} - \mu_{k_0})c_{k_1} = 0, \quad d''_{k_1} + (\mu_{k_1} - \mu_{k_0})d_{k_1} = 0,$$

и при этом выполняется $\mu_{k_1} - \mu_{k_0} > 0$. Но тогда функции $c_{k_1}(y)$ и $d_{k_1}(y)$ будут ненулевыми, если будет выполняться $h(\delta_{k_1}(\lambda_0), a) = 0$. А это и означает, что числа $a_{l,k_1}(\lambda_0)$, $l = 1, 2, \ldots$, будут критическими для задачи (1_0), (2)-(4) при $\lambda = \lambda_0$, причем число $\alpha\beta$ может быть как положительным, так и отрицательным.

Если теперь $\alpha\beta < 0$, то функции $c_{k_0}(y)$ и $d_{k_0}(y)$ могут быть ненулевыми в случае $a = \alpha\beta$, что и означает, что число $\alpha\beta$ также будет критическим для задачи (1_0), (2)-(4) при $\lambda = \lambda_0$.

Третья часть теоремы теперь очевидна.

Справедливость четвертой части теоремы устанавливается так же, как доказывалась справедливость первой части теоремы 2. Более точно, числа a^*_{k,k_0} с нужными свойствами определяются равенствами

$$a^*_{k,k_0} = \frac{1}{2\delta_k(\lambda_0)} \ln \frac{\widetilde{b_k}(\lambda_0) + \alpha\beta}{\widetilde{b_k}(\lambda_0) - \alpha\beta}, \quad k = k_0 + 1, k_0 + 2, \ldots.$$

Наконец, доказательство справедливости пятой и шестой частей теоремы вполне соответствует доказательству третьей и четвертой частей теоремы 2.

Теорема полностью доказана. $\square$

Рассмотрим теперь случай, когда λ не совпадает ни с одним из чисел μ_k.

Теорема 5. *Пусть α, β и λ_0 есть фиксированные действительные числа, и пусть k_0 есть натуральное число такое, что $\mu_{k_1+1} < \lambda_0 < \mu_{k_0}$. Имеют место свойства:*

(1) *для любого натурального числа k_1 такого, что $1 \leq k_1 \leq k_0$, числа $a_{l,k_1}(\lambda_0)$, $l = 1, 2, \ldots$, будут критическими для задачи (1₀), (2)-(4) при $\lambda = \lambda_0$, причем как в случае $\alpha\beta > 0$, так и в случае $\alpha\beta < 0$;*

(2) *если $\alpha\beta \in (-1, 0)$, то существует последовательность $\{a^*_{k,k_0}\}_{k=k_0+1}^{\infty}$ такая, что $a^*_{k,k_0} \to 0$ при $k \to \infty$, и при этом дополнительно к числам $a_{l,k_1}(\lambda_0)$, $l = 1, 2, \ldots$, числа a^*_{k,k_0} также будут критическими для задачи (1_0), (2)-(4) при $\lambda = \lambda_0$;*

(3) *если $\alpha\beta \in (b_{k_0+1}(\lambda_0), -1)$, то дополнительно к числам $a_{l,k_0}(\lambda_0)$, $l = 1, 2, \ldots$, существует лишь конечное множество критических чисел для задачи (1_0), (2)–(4) при $\lambda = \lambda_0$;*

(4) *если $\alpha\beta \leq b_{k_0+1}(\lambda_0)$, то, кроме чисел $a_{l,k_0}(\lambda_0)$, $l = 1, 2, \ldots$, других критических чисел задача (1_0), (2)–(4) не имеет;*

(5) *если $\alpha\beta = -1$, то лишь число $a = -1$ будет критическим для для задачи (1_0), (2)–(4) при $\lambda = \lambda_0$.*

Доказательство этой теоремы теперь очевидно.

4. О разрешимости задачи (1)-(4)

В теоремах 1 и 3 описаны все действительные собственные числа задачи (1_0), (2)-(4). Заметим, что при доказательстве этих теорем автоматически описаны и все отвечающие конкретному собственному числу собственные функции — этот факт вытекает из того, что функции $w_k(x)$, $k = 1, 2 \ldots$, образуют базис в пространстве $W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, и тем самым все собственные функции представляются через функции $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$, и далее - через функции $c_k(y)$ и $d_k(y)$; последние же определяются как решения соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим следующую задачу: *найти функцию $v(x, y)$, являющуюся в цилиндрах Q_1 и Q_2 решением уравнения* (1_0) *и такую, что для нее выполняются условия* (2) *и* (3), *а также условия*

$$v(x, -0) = \beta v(x, +0), \;\; v_y(x, +0) = \alpha v_y(x, -0) \tag{4'}$$

(α и β - параметры, определяющие задачу (1_0), (2)-(4)).
В теоремах 1-5 показано, что свойства данного действительного числа λ_0 быть или не быть собственным числом задачи (1_0), (2)-(4), свойства данного отрицательного числа a быть или не быть критическим для той же задачи определяется лишь произведением параметров α и β. Следовательно, если число λ_0 является собственным числом задачи (1_0), (2)-(4), то это же число будет собственным числом задачи (1_0), (2), (3), ($4'$), и наоборот, если же число λ_0 не является собственным числом задачи (1_0), (2)-(4), то оно же не будет собственным числом задачи (1_0), (2), (3), ($4'$) и наоборот.

Проведённые выше рассуждения позволяют получить теорему о несуществовании решений краевой задачи (1)-(4).

Теорема 6. *Пусть λ_0 есть собственное число задачи* (1_0), (2)–(4), *и пусть для заданной функции $f(x,y)$ из пространства $L_2(Q)$ и для некоторой функции $v_0(x,y)$, являющейся собственной функцией задачи* (1_0), (2), (3), (4′) *при $\lambda=\lambda_0$, выполняется*

$$\int\limits_Q f v_0 dxdy \neq 0. \tag{7}$$

Тогда задача сопряжения (1)-(4) *не имеет регулярных решений.*

Доказательство. Предположим, что существует функция $u(x,y)$ из пространства V, являющаяся решением задачи (1)-(4). Имеют место равенства

$$\int\limits_Q f v_0 dxdy = \int\limits_{Q_1} f v_0 dxdy + \int\limits_{Q_2} f v_0 dxdy = \int\limits_{Q_1} (Lu-\lambda_0 u) v_0 dxdy$$

$$+\int\limits_{Q_2} (Lu-\lambda_0 u) v_0 dxdy = \int\limits_{Q_1} u(Lv_0-\lambda_0 v_0) dxdy + \int\limits_{Q_2} u(Lv_0-\lambda_0 v_0) dxdy = 0,$$

и эти равенства приводят к противоречию с условием (7). Следовательно, предположение о существовании регулярного решения задачи (1)-(4) для заданной функции $f(x,y)$ неверно.

Теорема доказана. □

Обсудим теперь вопрос о существовании решений задачи (1)-(4). Искомое решение $u(x,y)$ данной задачи будем искать в виде

$$u(x,y)=\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \widetilde{c}_k(y) W_k(x), & (x,y)\in Q_1, \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \widetilde{d}_k(y) W_k(x), & (x,y)\in Q_2. \end{cases}$$

Пусть λ не совпадает ни с одним из собственных чисел задачи (1_0), (2)-(4). Представим функцию $f(x,y)$ в виде

$$f(x,y)=\begin{cases} f_1(x,y), & (x,y)\in Q_1, \\ f_2(x,y), & (x,y)\in Q_2, \end{cases}$$

и далее каждую из функций $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ представим рядом Фурье:

$$f_1(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty} f_{1k}(y) W_k(x), \quad f_{1k}(y)=\int\limits_\Omega f_1(x,y) W_k(x) dx,$$

$$f_2(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty} f_{2k}(y) W_k(x), \quad f_{2k}(y)=\int\limits_\Omega f_2(x,y) W_k(x) dx.$$

Для функций $\widetilde{c}_k(y)$ и $\widetilde{d}_k(y)$ должны выполняться равенства

$$\widetilde{c}_k''(y) + (\mu_k-\lambda)\widetilde{c}_k(y) = f_{1k}(y), \tag{8}$$

$$\widetilde{d}_k''(y) + (\mu_k-\lambda)\widetilde{d}_k(y) = f_{2k}(y), \tag{9}$$

$$\widetilde{c}_k(-0) = \alpha \widetilde{d}_k(+0), \quad \widetilde{d}_k'(+0) = \beta \widetilde{c}_k''(-0). \tag{10}$$

Из этих равенств и из того, что λ не является собственным числом задачи (1_0), (2)–(4) следует, что функции $\widetilde{c}_k(y)$ и $\widetilde{d}_k(y)$ однозначно определяются через функции $f_{1k}(y)$ и $f_{2k}(y)$. Определив функции $\widetilde{c}_k(y)$ и $\widetilde{d}_k(y)$, находим формальное решение задачи (1)–(4); если ряды, участвующие в формальном решении, их производным по переменным $x_1, \ldots, x_n, y$ до второго порядка, будут сходиться в пространстве L_2, то формальное решение даст решение задачи (1)–(4), принадлежащее пространству V.

Пусть теперь λ есть собственное число задачи (1_0), (2)–(4) некоторой конечной кратности m. В этом случае все функции $\widetilde{c}_k(y)$ и $\widetilde{d}_k(y)$ как решение задачи (8)–(10) определить невозможно.

Обозначим через $k_1, \ldots, k_m$ те натуральные числа, для которых задача

$$c_k''(y) + (\mu_k - \lambda)c_k(y) = 0,$$
$$d_k''(y) + (\mu_k - \lambda)d_k(y) = 0,$$
$$c_k(-0) = \alpha d_k(+0), \quad d_k'(+0) = \beta c_k'(-0)$$

имеет нетривиальное решение. Потребуем, чтобы выполнялись условия

$$\begin{array}{ll} f_{1k_i}(y) \equiv 0, & a < y < 0, \quad i = 1, ...m, \\ f_{2k_i}(y) \equiv 0, & 0 < y < 1, \quad i = 1, ...m. \end{array} \tag{11}$$

Тогда можно положить $\widetilde{c}_{k_i}(y) \equiv 0$, $\widetilde{d}_{k_i}(y) \equiv 0$, $i = 1, .., m$. Для всех остальных индексов k функции $\widetilde{c}_k(y)$ и $\widetilde{d}_k(y)$ вновь определяются однозначно. В результате вновь получим формальное решение задачи (1)–(4); если соответствующие ряды будут сходиться, то формальное решение станет решением из требуемого класса.

Сделаем несколько замечаний.

Замечание 2. *Как следует из сказанного выше, условий* (11) *достаточно для существования формального решения задачи* (1)–(4).

Замечание 3. *При выполнении условий* (11) *условие* (7) *выполняться не может.*

Замечание 4. *Очевидно, что условия* (11) *не дают однозначной разрешимости задачи* (1)–(4).

References

[1] Ladyzhenskaya O. A., *On the solution of general problem of diffraction*, DAN SSSR, **96**:3 (1954), 433–436. Zbl 0055.20404

[2] Oleinik O. A., *Boundary value problems for linear elliptic and parabolic equations with discontinuous coefficients*, News of Academy of Sciences The USSR. Ser. Mat., **25** (1961), 3–20.

[3] Il'in V. A., Shishmarev I. A., *The method of potentials for the Dirichlet and the Neumann problems in the case of equations with discontinuous coefficients*, Sib. Mat. Phys., **2**:1 (1961), 46–58. Zbl 0112.33203

[4] Il'in V. A., *On the system of classical eigenfunctions of linear self-adjoint elliptic operator with discontinuous coefficients*, DAN SSSR, **137**:2 (1961), 272–275. Zbl 0104.32501

[5] Il'in V. A., Shishmarev I. A., *The problem on eigenfunctions for the operator* $Lu = div[p(x)gradu] - q(x)u$ *with discontinuous coefficients*, Siberian mathematical journal, **2**:4 (1961), 520–536. Zbl 0104.32404

[6] Il'in V. A., *The Fourier method for hyperbolic equations with discontinuous coefficients*, DAN SSSR, **142**:1 (1962), 21–24. Zbl 0154.36001

[7] Ladyzhenskaya O. A., Rivkind V. Ya., Ural'tseva N. N., *On the classic solvability of diffraction problems*, Tr. MIAN SSSR, **92** (1966), 116–146. Zbl 0165.11802

[8] Isakov V. M., *The General problem of diffraction for hyperbolic equations*, Differential equations (Proceedings of the seminar of S. L. Sobolev), Novosibirsk: Institute of mathematics of the SB RAS USSR, **2** (1977), 32–56. Zbl 0425.35069

[9] Kozhanov A. I., *The problem of conjugation for a class of equations of the composite type with alternating direction*, Non-classical equations of mathematical physics, Novosibirsk: Institute of mathematics SB RAS, (2002), 96–109. Zbl 1015.35085

[10] Aliyev A. R., Mirzoev S. S., *On the theory of solvability of boundary value problems for operator-differential equations of high order*, Functional analysis and its applications, **44**:3 (2010), 63–65. Zbl 1271.47037

[11] l'in V. A., and Luferenko P. V., *Generalized solutions of mixed problems for a discontinuous wave equation under the condition of equality of impedances*, Reports of AS, **429**:3 (2009), 317–321. Zbl 1183.35267

[12] l'in V. A., and Luferenko P. V., *Mixed problems describing longitudinal vibrations of a rod consisting of two sections with different density, different elasticity, but the same impedances*, Reports of AS, **428**:1 (2009), 12–15. Zbl 05656108

[13] Rogozhnikov A. M., *The study of the mixed problem describing the process of oscillations of a rod consisting of several sections under the condition of the coincidence time-of-flight of waves for each of these sections*, Reports of AS, **441**:4 (2012), 449–451.

[14] Kuleshov A. A., *Mixed problems for the equation of longitudinal vibrations of an inhomogeneous rod with a free or fixed right end, which consists of two segments with different densities and elasticity*, Reports of AS, **442**:4 (2012), 451–454. Zbl 1238.35155

[15] Rogozhnikov A. M., *Study of the mixed problem describing the process of oscillations of a rod consisting of several sections with arbitrary lengths*, Reports of AS, **444**:5 (2012), 488–491. Zbl 1257.35179

[16] Smirnov I. P., *On the oscillations described by the telegraph equation in the case of a system consisting of several segments with different densities and elasticity*, Differential equations, **49**:5 (2012), 643–648.

[17] Moiseev E. I., Likhomanenko T. N., *On the one nonlocal problem for the equation of Lavrent'ev-Bitsadze*, Reports of AS, **446**:3 (2012), 256–258. Zbl 1267.35133

[18] Sabitov K. B., *Boundary value problem for equations of mixed type of the third order in a rectangular field*, Differential equations, **49**:2 (2013), 488–496. Zbl 1267.35134

[19] Shubin V. V., *Boundary value problems for equations of the third order with a bursting factor* Vestnik NSU. Mathematics, mechanics, Informatics, **12**:1 (2012), 126–138. Zbl 1249.35231

[20] Potapova S.V., *Boundary value problems for pseudohyperbolic equations with a variable time direction*, TWMS J. Pure Appl. Math., **3**:1 (2012), 73–91. Zbl 1254.35155

[21] Kozhanov I. A., Potapova S. V., *The Dirichlet Problem for a class of equations of composite type with a discontinuous coefficient of the highest derivative*, The Far-East Mathematic Journal, **14**:1 (2014), 48–65. Zbl 06558983

[22] Kozhanov A. I., Sharin E. F., *The conjugate problem for some non-classical differential equations of high order*, Ukrainski matematichny Visnyk, **11**:2 (2014), 181–202. Zbl 1329.35115

[23] Kozhanov A. I., Sharin E. F. *The conjugate problem for some non-classical differential equations of high order. II*, Mathematical notes of NEFU, **21**:1 (2014), 18–28. Zbl 06493406

[24] Kozhanov I. A., Potapova S. V., *The conjugate problem for the equation of the third order with multiple characteristics with constant sign function of the highest derivative*, Vestnik NSU. Series: Mathematics, mechanics, Informatics, **15**:2 (2015), 52–59.

[25] Bitsadze V. A., *The fundamentals of the theory of analytic functions of a complex variable*, M.: Nauka, 1969. Zbl 0183.33601

Natalia Shadrina
Buryat state University,
st. Smolina, 24a,
670000, Ulan-Ude, Russia
E-mail address: `Shadrinann8@yandex.ru`