S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 426–433 (2016) УДК 512.54
DOI 10.17377/semi.2016.13.037 MSC 20B05

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ, ПОРОЖДЕННЫХ ИНВОЛЮЦИЯМИ

Б.М. ВЕРЕТЕННИКОВ

Abstract. All groups in the abstract are finite. In theorem 1 we prove that any group A, generated by n involutions ($n \geq 3$), is a section G/N of some group B, generated by three involutions (respectively, generated by an element of order n and involution) in which B/G is isomorphic D_{2n} (respectively, Z_n). In theorem 2 we consider the case when A is a 2-group. In theorem 3 and 4 we prove that any 2-group is a section of a 2-group generated by 3 involutions and a section of a 2-group generated by element of order 2^m and involution (m may be arbitrary integer more than 1). In the last part of the paper we construct some examples of 2-groups, generated by 3 involutions and of 2-groups, generated by an element and involution of derived lengths 4 and 3 respectively.

Keywords: finite group generated by involutions; finite group generated by three involutions, finite 2-group, Alperin group, definition of group by means of generators and defining relations.

1. Введение

Группы с заглавным свойством встречались во многих работах (см., например, [1] и [2]). Среди достижений последнего времени нужно отметить, что любая неабелева простая конечная группа, за исключением $U_3(3^2)$, порождается тремя инволюциями [3]. Кроме того, можно сказать, что "почти все" простые неабелевы конечные группы порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны. Полная информация о такой порождаемости имеется в [4].

Отметим также отдельную задачу об изучении конечных 2-групп, порожденных тремя инволюциями. В [5] представлен список таких групп с элементарным абелевым коммутантом и там же заявлено, что автор получил описание

Veretennikov, B.M., On finite groups generated by involutions.

Поступила 1 февраля 2016 г., опубликована 24 мая 2016 г.

всех метабелевых конечных 2-групп, порожденных тремя инволюциями, однако статьи на эту тему не появилось. В [6] доказано, что конечные 2-группы экспоненты 4 , порожденные тремя инволюциями, имеют порядок $\leq 2^{10}$, и они там полностью описаны.

В предлагаемой статье мы доказываем четыре теоремы.

Теорема 1. *Пусть n — натуральное число, $n \geq 3$. Тогда для любой конечной группы A, порожденной n инволюциями, найдется конечная группа B, порожденная тремя инволюциями, в которой имеется ряд подгрупп:*

$$1 \trianglelefteq N \trianglelefteq G \trianglelefteq C \trianglelefteq B, \text{ где}$$

(*a*) *C порождается элементом порядка n и инволюцией, $C/G \simeq Z_n$,*
(*b*) *$B/G \simeq D_{2n}$ — группа диэдра порядка $2n$,*
(*c*) *$G/N \simeq A$.*

Теорема 2. *Пусть n — натуральное число, $n \geq 3$. Тогда для любой конечной 2-группы A, порожденной n инволюциями, найдется конечная группа B, порожденная тремя инволюциями, в которой имеется ряд подгрупп:*

$$1 \trianglelefteq N \trianglelefteq G \trianglelefteq C \trianglelefteq B,$$

где условия (*a*), (*b*), (*c*) *— те же самые, что в формулировке теоремы* 1, *и, кроме того, N — конечная* 2*-группа.*

Теорема 3. *Любая конечная* 2*-группа P является секцией некоторой конечной* 2*-группы, порожденной тремя инволюциями.*

Теорема 4. *Пусть n — натуральное число, $n \geq 2$. Тогда любая конечная* 2*-группа является секцией некоторой конечной* 2*-группы P, порожденной элементом порядка 2^n и инволюцией.*

Отметим, что все четыре теоремы — теоремы существования. Остается непонятным, как конструктивно по группе A в теоремах 1 и 2 находить указанную там группу B.

В конце статьи с помощью конечной группы Альперина из [7] строятся примеры конечной 2-группы, порожденной элементом порядка 2^n, где $n \geq 2$, и инволюцией, ступени разрешимости 3 и конечных 2-групп, порожденных тремя инволюциями, ступени разрешимости 4 и сколь угодно большого ранга третьего коммутанта.

2. Обозначения и предварительные результаты

Мы используем стандартные определения и обозначения (см. например, [8] и [9]). Отметим некоторые из них.

$[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ – коммутатор элементов a и b в группе G.

$A_1 * \cdots * A_n$ – свободное произведение групп $A_1, \ldots, A_n$.

Σ_n – симметрическая группа – группа подстановок степени n.

$A\, char\, B$ означает, что подгруппа A группы B характеристична в B.

$A \wr B$ – регулярное сплетение групп A и B.

Нам потребуются следующие вспомогательные утверждения:

Лемма 1 ([10], с. 268). *Пусть K подгруппа конечного индекса m в конечно порожденной группе H. Тогда число подгрупп в H индекса m конечно и в H существует характеристическая подгруппа конечного индекса, содержащаяся в K.*

Лемма 2. *Пусть K — нормальная подгруппа в конечно порожденной группе H и H/K — конечная p-группа. Тогда в H существует характеристическая подгруппа T, содержащаяся в K, такая, что H/T — тоже конечная p-группа.*

Доказательство. Пусть T — пересечение всех нормальных подгрупп в H индекса $|H : K|$. Заметим, что по лемме 1 число таких подгрупп конечно. Тогда

$$T\, char\, H,\ T = \bigcap_{i=1}^{m} K_i,\ i = \overline{1,m},$$

где все K_i — нормальные подгруппы в H, для некоторого $m \geq 1$, и все фактор-группы H/K_i — конечные p-группы порядка $|H : K|$. Следовательно, по теореме Ремака [8, с. 54] H/T изоморфна подпрямому произведению групп H/K_i и, значит, является конечной p-группой. □

Лемма 3. *Любая конечная 2-группа P изоморфно вкладывается в силовскую 2-подгруппу S группы $\Sigma_{2^{2^m}}$ для некоторого натурального m.*

Доказательство. Пусть $|P| = 2^t$, $2^m \geq t$. По теореме Кэли P изоморфно вкладывается в Σ_{2^t}, а Σ_{2^t} изоморфно вкладывается в $\Sigma_{2^{2^m}}$. □

Лемма 4. *Пусть $G = \langle a_1 \rangle * \cdots * \langle a_n \rangle$ — свободное произведение n циклических групп порядка m. Тогда любая биекция σ множества $\{a_1, \ldots, a_n\}$ на себя индуцирует автоморфизм f группы G, такой, что для любого $i = \overline{1,n}$ выполняется: $a_i f = a_i \sigma$.*

Доказательство. Соотношения $a_i^m = 1$, где $i = \overline{1,n}$, являются определяющими для группы G. Поэтому существует гомоморфизм f группы G в себя, такой, что $a_i f = a_i \sigma$. По той же причине существует гомоморфизм g группы G в себя, такой что $a_j g = a_j \sigma^{-1}$ для любого $j = \overline{1,n}$. Очевидно, что $fg = gf = id_G$ — тождественное отображение G на себя. Следовательно, f — автоморфизм группы G. □

3. Доказательства теорем 1–4

Доказательство теоремы 1.

Пусть H – группа, порожденная элементами $a_1, \ldots, a_n$ с определяющими соотношениями $a_1^2 = 1, \ldots, a_n^2 = 1$, т. е. $H = \langle a_1 \rangle * \cdots * \langle a_n \rangle$ – свободное произведение n циклических групп порядка 2, $n \geq 3$.

Тогда в H существует нормальная подгруппа K, такая, что $H/K \simeq A$, в частности $|H : K| < \infty$. По лемме 1 в H существует характеристическая подгруппа T конечного индекса, содержащаяся в K.

Далее, рассмотрим группу D:

$$D \leq \Sigma_n, D = \langle \tau, \sigma \rangle,$$

$$\tau = (1, 2, \ldots, n) \text{ – цикл длины } n,$$

$$\sigma = (1, n)(2, n-1) \ldots \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1\right) \text{ при четном } n \text{ и}$$

$$\sigma = (1, n)(2, n-1) \ldots \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n+3}{2}\right) \text{ при нечетном } n.$$

Ясно, что $|\tau| = n$, $|\sigma| = 2$ и $\tau^\sigma = \tau^{-1}$ независимо от четности n.

Поэтому D – группа диэдра порядка $2n$.

Поскольку по лемме 4 любая биекция на множестве $\{a_1, \ldots, a_n\}$ индуцирует автоморфизм группы H, то можно определить группу $S = H \leftthreetimes D$, где

$$a_i^\tau = a_{i+1} \text{ при } i < n,\ a_n^\tau = a_1, a_i^\sigma = a_{i\sigma}.$$

Тогда в фактор-группе $\overline{S} = S/T$ имеем ряд подгрупп

$$\overline{1} \trianglelefteq \overline{K} = K/T \trianglelefteq \overline{H} = H/T \trianglelefteq \overline{S},$$

где $\overline{H}/\overline{K} \simeq H/K \simeq A$, $\overline{S}/\overline{H} \simeq S/H \simeq D_{2n}$.

Если обозначить

$$N = \overline{K}, G = \overline{H}, B = \overline{S}, C = \overline{H\langle\tau\rangle},$$

то получим требуемое. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.

Рассуждаем так же, как в доказательстве теоремы 1, но вместо леммы 1 используем лемму 2.

Доказательство теоремы 3.

По лемме 3 группа P изоморфно вкладывается в силовскую 2-подгруппу S группы $\Sigma_{2^{2^m}}$ для некоторого натурального $m \geq 2$, которая, как известно, изоморфна сплетению

$$\underbrace{(\ldots(Z_2 \wr Z_2)\ldots) \wr Z_2}_{2^m},$$

и, в частности, порождается 2^m инволюциями. Следовательно, по теореме 2 S является секцией конечной 2-группы, порожденной тремя инволюциями. А тогда и P – секция этой 2-группы.

Доказательство теоремы 4.

Из теоремы 3 следует, что P – секция конечной 2-группы A, порожденной 2^n инволюциями. По теореме 2 существует конечная 2-группа C, в которой имеется ряд

$$1 \trianglelefteq N \trianglelefteq G \trianglelefteq C,$$

где C порождается элементом порядка 2^n и инволюцией, а $G/N \simeq A$.

Теорема доказана.

4. Построение примеров

Группой Альперина мы называем группу, в которой любая 2-порожденная подгруппа имеет циклический коммутант. В [7] построена группа Альперина G, заданная порождающими a_i, f_{ij}, τ_{ijk}, где $1 \leq i, j, k \leq n$, и определяющими соотношениями:

1) $a_i^2 = 1$,
2) $[a_i, a_j] = f_{ij}$,
3) $[f_{ij}, a_k] = f_{jk}^2 f_{ki}^2 \tau_{ijk}^{-2}$,
4) $[\tau_{ijk}, a_s] = 1$,
5) $f_{ij}^{4m} = 1$,
6) $\tau_{ijk}^m = 1$,
7) $[f_{ij}, f_{ks}] = \tau_{kjs}\tau_{ksi}$,

8) $(f_{ij}f_{jk}f_{ki})^4 = \tau_{ijk}$,
9) $\tau_{sij}\tau_{sjk}\tau_{ski} = \tau_{ijk}$,
где m, n — положительные целые числа, $n \geq 3$ и для всех соотношений индексы i, j, k, s — любые натуральные числа из $[1, n]$.

Отметим, что до конца статьи смысл чисел m и n не изменится.

Обозначим дополнительно

$$F = \langle f_{ij}f_{jk}f_{ki} | 1 \leq i, j, k \leq n \rangle,$$

и пусть L – подгруппа из G, состоящая из элементов, представимых в виде произведения четного числа порождающих a_i, $i = \overline{1, n}$. В [7] доказано, что

$$|G| = m^{\binom{n}{2}} 2^{n^2},$$

$$G' = \langle f_{ij} | 1 \leq i, j \leq n \rangle,$$

$$G'' = \langle \tau_{ijk} | 1 \leq i, j, k \leq n \rangle = \prod_{2 \leq i < j \leq n} \langle \tau_{1ij} \rangle -$$

гомоциклическая группа экспоненты m и ранга $\binom{n-1}{2}$, F содержится в $Z(G)$ и L – нильпотентная группа ступени нильпотентности 2.

Как показывают рассуждения в доказательстве пункта II теоремы 1 из [11], на самом деле $F = Z(G)$, хотя нам этот факт не понадобится.

Нам понадобится также следующее утверждение, уточняющее строение группы G.

Лемма 5. *Группа G имеет субнормальный ряд*

$$1 \leq F \leq F_2 = F_1 \rightthreetimes \langle f_{12} \rangle \leq F_3 = F_2 \rightthreetimes \langle f_{13} \rangle \leq \cdots \leq$$

$$F_n \rightthreetimes \langle f_{1n} \rangle = G' \leq K_1 = G' \rightthreetimes \langle a_1 \rangle \leq$$

$$K_2 = K_1 \rightthreetimes \langle a_2 \rangle \leq \cdots \leq$$

$$K_n = K_{n-1} \rightthreetimes \langle a_n \rangle = G,$$

в котором $F = \prod_{2 \leq i < j \leq n} \langle f_{1i}f_{ij}f_{j1} \rangle$ — гомоциклическая группа экспоненты $4m$ и ранга $\binom{n-1}{2}$, следующие $(n-1)$ фактор-группы — циклические группы порядка $4m$ и последние n фактор-группы — группы порядка 2.

Доказательство. При любых i, j, k имеем:

$$(f_{1i}f_{ij}f_{j1})(f_{1j}f_{jk}f_{k1})(f_{1k}f_{ki}f_{i1})$$

$$= f_{1i}f_{ij}f_{jk}f_{ki}f_{i1} = f_{ij}f_{jk}f_{ki},$$

т. к. $f_{ij}f_{jk}f_{ki} \in Z(G)$. Следовательно,

$$F = \langle f_{1i}f_{ij}f_{j1} | 2 \leq i < j \leq n \rangle.$$

Тогда из равенств $(f_{1i}f_{ij}f_{j1})^4 = \tau_{1ij}$ получим, что

$$|F| \leq (4m)^{\binom{n-1}{2}}.$$

Очевидно, что ряд подгрупп, указанный в формулировке леммы, субнормален, причем порядки его фактор-групп ограничены соответственно числами:

$$(4m)^{\binom{n-1}{2}}, \underbrace{4m,\dots,4m}_{n-1}, \underbrace{2,\dots,2}_{n}.$$

Произведение этих чисел равно

$$4^{\binom{n-1}{2}+(n-1)} 2^n m^{\binom{n-1}{2}+(n-1)} = 2^{n^2} m^{\binom{n}{2}} = |G|,$$

откуда указанные числа – в точности порядки соответствующих фактор-групп, в частности

$$|F| = (4m)^{\binom{n-1}{2}}.$$

Учитывая, что

$$(f_{1i}f_{ij}f_{j1})^4 = \tau_{1ij} \text{ и}$$
$$\langle \tau_{1ij} | 2 \le i < j \le n\rangle = \prod_{2\le i<j\le n} \langle \tau_{1ij}\rangle,$$

получаем, что F – гомоциклическая группа экспоненты $4m$ и ранга $\binom{n-1}{2}$, причем

$$F = \prod_{2\le i<j\le n} \langle f_{1i}f_{ij}f_{j1}\rangle.$$

□

Легко проверить, что любая биекция множества $\{a_1,\dots,a_n\}$ на себя индуцирует очевидным образом автоморфизм группы G. Поэтому можно определить группу $H = G \leftthreetimes \langle\tau\rangle$, где

$$a_i^\tau = a_{i+1} \text{ при } i<n,\ a_n^\tau = a_1,\ |\tau| = n.$$

Предложение 1. *a)* $H = \langle a_1, \tau\rangle$;

b) H *имеет ступень разрешимости* 3;

c) $H'' = F$.

Доказательство. Утверждение *a*) очевидно. Из определения группы H следует, что для любого натурального числа k имеет место равенство $a_i^{\tau^k} = a_{i+k}$, где под $i+k$ понимается канонический представитель класса вычетов $\overline{i+k}$ по модулю n. Поэтому $a_ia_j \in H'$ для любых $i,j = \overline{1,n}$. Поскольку L порождается элементами вида a_ia_j, то $L \subseteq H'$. Ясно, что $L \lhd H$ и H/L – абелева, т. к.

$$[a_1,\tau] = a_1a_2 \in L \text{ и } H = \langle a_1,\tau\rangle.$$

Следовательно, $L = H'$, и поскольку L – нильпотентная группа класса 2, то $H''' = 1$ и *b*) доказано.

Далее по лемме 6 из [7] при любых i,j,k,s имеем

$$[a_ia_j, a_ka_s] = (f_{ik}f_{ks}f_{si})(f_{jk}f_{ks}f_{sj})^{-1} \in F,$$

откуда

$$[a_1a_j, a_ja_s] = f_{1j}f_{js}f_{s1}$$

и $H'' = F$ в силу произвольности j и s. Предложение доказано. □

Следствие 1. *Для любых натуральных $k \geq 2$, $t \geq 1$ существует конечная 2-группа H ступени разрешимости 3, порожденная элементом порядка 2^k и инволюцией, с вторым коммутантом H'' ранга $\binom{2^k-1}{2}$ и экспоненты 2^t.*

Доказательство. Для получения следствия достаточно в предложении 1 взять $n = 2^k$, $m = 2^{t-2}$ при $t \geq 3$ и затем для $t = 3$ взять фактор-группы группы H по двум нижним слоям H''. □

Пусть теперь $n = 2^k$, $k \geq 2$, $m = 2^t$, $t \geq 1$, σ – подстановка из Σ_n, определенная выше в доказательстве теоремы 1. Обозначим $K = H \leftthreetimes \langle\sigma\rangle$, где $a_i^\sigma = a_{i\sigma}$ для любого $i = \overline{1,n}$ и $\tau^\sigma = \tau^{-1}$.

Предложение 2. *a) $K = \langle a_1, \tau\sigma, \sigma\rangle$;*
b) K имеет ступень разрешимости 4;
c) K''' имеет ранг не меньше $2^{k-1} - 1$ и экспоненту не меньше m.

Доказательство. Утверждение a) очевидно. Обозначим

$$T = \langle a_i a_j, \tau^2 | 1 \leq i, j \leq n\rangle,$$

т. е. $T = L \leftthreetimes \langle\tau^2\rangle$. Легко проверить, что $T \lhd K$, $T \leq K'$ и K/T – абелева. Абелевость K/T, например, следует из того, что $K = \langle a_1, \tau, \sigma\rangle$ и

$$[a_1, \tau] = a_1 a_2 \in T,$$
$$[a_1, \sigma] = a_1 a_n \in T,$$
$$[\tau, \sigma] = \tau^2 \in T.$$

Следовательно, $T = K'$ и $K'' \leq L$, откуда $K'''' = 1$.

Далее, считаем при любом $i = \overline{1,n}$.

$$[a_i a_{i+2^{k-1}}, \tau^{2^{k-1}}] = a_{i+2^{k-1}} a_i a_{i+2^{k-1}} a_i =$$
$$[a_{i+2^{k-1}}, a_i] = f_{i+2^{k-1},i}.$$

Поскольку

$$a_i a_{i+2^{k-1}}, \tau^{2^{k-1}} \in K',$$

то

$$f_{i+2^{k-1},i} \in K''.$$

Теперь при произвольных i, j имеем

$$[f_{i+2^{k-1},i}, f_{j,j+2^{k-1}}] = \tau_{j,i,j+2^{k-1}} \tau_{j,j+2^{k-1},i+2^{k-1}} \in K'''.$$

Коммутаторы вида

$$[f_{i+2^{k-1},i}, f_{1,2^{k-1}+1}], \text{ где } 2 \leq i \leq 2^{k-1},$$

составляют множество элементов:

$$x_1 = \tau_{1,2,2^{k-1}+1} \tau_{1,2^{k-1}+1,2+2^{k-1}},$$
$$x_2 = \tau_{1,3,2^{k-1}+1} \tau_{1,2^{k-1}+1,3+2^{k-1}},$$
$$\dots$$
$$x_{2^{k-1}-1} = \tau_{1,2^{k-1},2^{k-1}+1} \tau_{1,2^{k-1}+1,2^k}.$$

Поскольку

$$G'' = \prod_{2 \leq s < t \leq n} \tau_{1st}$$

и повторяющихся элементов вида τ_{1st} в выражениях для $x_1, \dots, x_{2^{k-1}-1}$ нет, то

$$rank\, G''' \geq 2^{k-1} - 1.$$

Ясно также, что

$$exp\, G''' \geq m,$$

т. к. элементы x_i имеют порядок m. Предложение 2 доказано.

$\square$

Следствие 2. *Существует конечная* 2*-группа* K *ступени разрешимости* 4*, порожденная тремя инволюциями, с третьим коммутантом сколь угодно большого ранга и сколь угодно большой экспоненты.*

References

[1] N. Bourbaki, *Lie Groups and Lie Algebras: Chapters 4-6*, Springer, 2008. Zbl 1145.17001

[2] H. S. M. Coxeter, W. O. J. Moser, *Generators and Relations for Discrete Groups*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1980. Zbl 0487.20023

[3] L. Di Martino, M. C. Tamburini, *2-generation of finite simple groups and some related topics*, In: Generators and relations in groups and geometries (A. Barlotti, E. W. Ellers, P. Plaumann, K. Strambach., eds.), Kluwer Dordrecht, 1991, 195–233. Zbl 0751.20027

[4] V. D. Mazurov, *On generation of sporadic simple groups by three involutions two of which commute*, Siberian Math. J., **44**:1 (2003), 193–198. Zbl 1035.20014

[5] A. D. Ustyuzhaninov, *Finite 2-groups generated by exactly three involutions*, In: All-union algebr. symposium (1975) (in Russian), abstracts, part I, Gomel, (1975) 72.

[6] Y. Berkovich, Z. Janko, *Groups of prime power order, Volume 2*, Walter de Gruyter, Berlin, N.Y., 2008. Zbl 1168.20002

[7] B. M. Veretennikov, *On the second commutants of finite Alperin groups*, Siberian Math. J., **55**:1 (2014), 25–43. Zbl 1310.20023

[8] M. I. Kargapolov, J. I. Merzljakov, *Fundamentals of the Theory of Groups*, Springer-Verlag, New York, 1979. Zbl 0549.20001

[9] W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar, *Combinatorial Group Theory: Presentations of Groups in Terms of Generators and Relations, 2nd Revised ed.*, Dover Publications, 2004. Zbl 1130.20307

[10] R. C. Lyndon, P. E. Schupp, *Combinatorial Group Theory*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2001. Zbl 0997.20037

[11] B. M. Veretennikov, *On infinite Alperin groups*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **12** (2015), 210–222.

Boris Michailovich Veretennikov
Ural Federal University,
19 Mira street,
620002 Ekaterinburg, Russia
E-mail address: boris@veretennikov.ru