S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 434–451 (2016) УДК 519.21
DOI 10.17377/semi.2016.13.038 MSC 60F10

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ВРЕМЕНИ ПРЕБЫВАНИЯ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ ВЫШЕ НЕКОТОРОЙ ГРАНИЦЫ

А.С. ТАРАСЕНКО

Abstract. Under general conditions, we obtain inequalities for moments of sojourn time of a random walk over linear boundary. We find asymptotics of these moments for random walks with regular or semi-exponential distribution of summands.

Keywords: random walk, sojourn time, inequalities.

1. Основные результаты

Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Введем время пребывания случайного блуждания $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$ выше некоторой границы $b \geqslant 0$ до момента времени n:

$$T_n(b) = \sum_{i=1}^{n} I_{\{S_i \geqslant b\}}.$$

Основной целью работы является нахождение оценок сверху для моментов $\mathbb{E}T_n^k(b)$ этого функционала.

Основным инструментом нашего исследования является следующий результат, полученный комбинаторными рассуждениями и не накладывающий каких-либо ограничений на распределение X.

Tarasenko, A.S., Inequalities for the sojourn time of random walk above a certain boundary.

Работа поддержана РФФИ (грант 16-01-00049).

Поступила 8 февраля 2016 г., опубликована 27 мая 2016 г.

Теорема 1. *Пусть* $n \geqslant 1$ *и* $g(x)$ *— такая функция, что* $g(0) = 0$ *и*

$$\frac{\mathrm{d}^k g}{\mathrm{d}x^k}(x) \geqslant 0 \tag{1}$$

для всех $x \in (0, n)$ *и всех натуральных* $k \leqslant n$. *Тогда*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}g(T_n(b)) &\leqslant \sum_{j=1}^{n} \left(g(n-j+1) - g(n-j)\right) \mathbb{P}\{S_j \geqslant b\}, \\ \mathbb{E}g(T_n(b)) &\geqslant \sum_{j=1}^{n} \left(\mathbb{E}g(\eta_{n-j}+1) - \mathbb{E}g(\eta_{n-j})\right) \mathbb{P}\{S_j \geqslant b\}, \end{aligned} \tag{2}$$

где случайные величины $\{\eta_i\}_{i=1}^{n}$ *имеют биномиальное распределение с параметрами* i *и* $p := \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \mathbb{P}\{S_j \geqslant 0\}$.

В частности, для $k \in \mathbb{N}$ *и* $\mu > 0$ *выполняется*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}T_n^k(b) &\geqslant \sum_{j=1}^{n} \left((p(n-j)+1)^k - (p(n-j))^k\right) \mathbb{P}\{S_j \geqslant b\}, \\ \mathbb{E}T_n^k(b) &\leqslant \sum_{j=1}^{n} \left((n-j+1)^k - (n-j)^k\right) \mathbb{P}\{S_j \geqslant b\}, \end{aligned} \tag{3}$$

$$1 + (e^{\mu} - 1) \sum_{j=1}^{n} q_1^{n-j} \mathbb{P}\{S_j \geqslant b\} \leqslant \mathbb{E}e^{\mu T_n(b)} \leqslant 1 + (e^{\mu} - 1) \sum_{j=1}^{n} q_2^{n-j} \mathbb{P}\{S_j \geqslant b\}, \tag{4}$$

где $q_1 = (1 - p + pe^{\mu})$, $q_2 = e^{\mu}$.

Замечание. Вместо условия (1) можно потребовать, чтобы для всех натуральных $k \leqslant n$ выполнялось:

$$\sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} g(j) \geqslant 0.$$

Эта теорема позволяет получать оценки для моментов $T_n^k(b)$ на основе имеющихся оценок для $\mathbb{P}\{S_j \geqslant b\}$.

Далее будем предполагать, что $\mathbb{E}X = 0$, $\sigma^2 := \mathbb{E}X^2 < \infty$. В работе рассмотрены две ситуации. Первая из них касается случайных блужданий, у которых распределение скачков удовлетворяет правостороннему условию Крамера. Это означает, что существует такое $\lambda > 0$, что

$$\psi(\lambda) := \mathbb{E}e^{\lambda X} < \infty. \tag{5}$$

В другой ситуации мы требуем лишь существования $\mathbb{E}|X|^m < \infty$ при некотором $m > 2$.

Напомним некоторые определения, требующиеся для формулировки полученных результатов.

Пусть выполнено условие (5). Тогда функцией уклонений случайной величины X называется

$$\Lambda(\alpha) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} (\alpha\lambda - \ln \psi(\lambda)).$$

Положим

$$\lambda_+ := \sup\{\lambda \ : \ \mathbb{E}e^{\lambda X} < \infty\} > 0, \qquad \alpha_+ := \frac{\psi'(\lambda_+ - 0)}{\psi(\lambda_+ - 0)}.$$

Далее определим функцию $\lambda(\alpha)$ на $[0;\infty)$. Пусть $\lambda(0) = 0$. Известно (см. [1], стр. 230), что $\Lambda(\alpha)$ аналитична на $(0;\alpha_+)$. Положим на этом интервале $\lambda(\alpha) = \Lambda'(\alpha)$. Если $\alpha_+ = \infty$, то мы полностью определили $\lambda(\alpha)$. При $\alpha_+ < \infty$ рассмотрим следующие два случая.

(1) $\lambda_+ = \infty$. Тогда $\Lambda(\alpha) = \infty$ на $(\alpha_+;\infty)$. В этом случае также положим $\lambda(\alpha) = \infty$ на $(\alpha_+;\infty)$ и $\lambda(\alpha_+) = \lambda_+$.

(2) $\lambda_+ < \infty$. Тогда $\Lambda(\alpha)$ линейна с углом наклона λ_+ и в граничной точке α_+ сохраняется непрерывность первых производных. В этом случае положим $\lambda(\alpha) = \lambda_+$ на $[\alpha_+;\infty)$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbb{E}X = 0$, $\mathbb{E}X^2 < \infty$ *и выполнено условие* (5). *Положим* $q = q_n(b) := \exp\left\{\Lambda(b/n) - \frac{b}{n}\lambda(b/n)\right\} < 1$. *Тогда для всех целых* $k \geqslant 1$

$$\mathbb{E}T_n^k(b) \leqslant \frac{k!(e-1)}{(1-q)^k} e^{-n\Lambda(b/n)}. \tag{6}$$

Кроме того, для любого $\mu > 0$ *выполняется*

$$\mathbb{E}e^{\mu T_n(b)} \leqslant 1 + (e-1)\frac{e^{n\mu - b\lambda(b/n)} - e^{-n\Lambda(b/n)}}{e^{\mu}q - 1}.$$

В случае, когда отношение b/n достаточно мало, значения $\dfrac{1}{1-q_n(b)}$ становятся близки к $2\sigma^2 n^2/b^2$, что позволяет переписать неравенство (6) в более простом виде.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2 *и пусть для* $0 < \alpha < \alpha_*$ *верно представление*

$$\lambda(\alpha) = \frac{\alpha}{\sigma^2} + h(\alpha), \qquad |h(\alpha)| < H\alpha^2,$$

где α_*, H *— некоторые константы. Тогда для* $k \geqslant 1$ *и* $b/n < \min\{\alpha_*, \sigma, \rho\}$ *выполнено неравенство*

$$\mathbb{E}T_n^k(b) \leqslant k!(e-1)\left(\frac{\gamma_{b,n} n^2}{b^2}\right)^k e^{-n\Lambda(b/n)},$$

где $\rho = \dfrac{24\sigma}{16H\sigma^3 + 11H^2\sigma^6 + 3}$, $\quad \gamma_{b,n} = \dfrac{2\sigma^2}{1 - b/(\rho n)} > 0.$

Следующая теорема касается другой ситуации, когда мы требуем лишь существования $\mathbb{E}|X|^m < \infty$ при некотором $m > 2$. Всюду ниже через $B(\cdot,\cdot)$ будем обозначать бета–функцию. Положим

$$K_m = 1 + \frac{(m+1)^{m+2}}{e^m}, \qquad Q_k(n,v) = v3^{v+k-1}B(v,k+1)n^{k+v-1} + n^k + v2^{v-1}(n-1)^k.$$

Теорема 3. *Пусть* $\mathbb{E}X = 0$ *и* $\alpha_m := \mathbb{E}|X|^m < \infty$ *для некоторого натурального* $m > 2$. *Тогда для всякого* y, *удовлетворяющего соотношению*

$$(K_m\alpha_m)^{1/m} n^{1/m} < y \leqslant b,$$

имеет место неравенство

(7)
$$\mathbb{E}T_n^k(b) \leqslant \mathbb{P}\{X \geqslant b\} \sum_{j=1}^{n} j^k + Q_k(n, b/y) \exp\left\{2n\left(\frac{m \ln y}{y}\right)^2 + 1\right\} \left(\frac{K_m \alpha_m}{y^m}\right)^{b/y}.$$

Снова приведем следствие, содержащее упрощенный результат.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3, *тогда для всякого целого* $s \geqslant 1$ *и* $b > s\left(K_m \mathbb{E}|X|^m\right)^{1/m} n^{1/m}$ *верно неравенство*

$$\mathbb{E}T_n^k(b) \leqslant \mathbb{P}\{X \geqslant b\} \sum_{j=1}^{n} j^k + A_{m,s} \frac{Q_k(n,s)\exp\left\{2m^2 \frac{n \ln^2 b}{b^2}\right\}}{b^{ms}},$$

где $A_{m,s} = e(sK_m \mathbb{E}|X|^m)^s$.

Отметим, что $Q_k(n,s)$ — полином от переменной n степени $k+s-1$, чьи коэффициенты зависят только от k и s.

Замечание. Минимизация полученных оценок по параметрам y и s возможна, однако минимизирующие значения не выражаются в элементарных функциях.

Можно показать, что в ряде ситуаций оценка сверху в (2) будет сближаться с главным членом асимптотики $\mathbb{E}g(T_n)$ при $n \to \infty$.

Сначала рассмотрим случай с растущей границей b_n, чья скорость роста соответствует области больших уклонений для случайного блуждания $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$. Будем говорить что две последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ асимптотически эквивалентны и обозначать это через $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n$, если $\dfrac{a_n}{b_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

Отметим также, что в приведенных ниже результатах нам более не понадобится условие (1) на функцию $g(\cdot)$.

Теорема 4. *Пусть* $\mathbb{E}X = 0$, $\mathbb{E}X^2 < \infty$, $b_n/\sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ *и существует такая последовательность положительных чисел* Δ_n, *что*

$$\Delta_n/\sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty, \quad \mathbb{P}\{S_j \geqslant b_n + \Delta_n\} \underset{n\to\infty}{\sim} \mathbb{P}\{S_j \geqslant b_n\},$$

равномерно по всем $1 \leqslant j \leqslant n$. *Тогда для всякой функции* g *такой, что* $g(0) = 0$, *при* $n \to \infty$ *имеет место*

$$\mathbb{E}g(T_n(b_n)) = \sum_{j=1}^{n} \left(g(n-j+1) - g(n-j)\right) \mathbb{P}\{S_j \geqslant b_n\}$$

$$+o\left(\sum_{j=1}^{n} |g(n-j+1) - g(n-j)|\, \mathbb{P}\{S_j \geqslant b_n\}\right).$$

Следствие 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 4 *и, кроме того,* g — *монотонная функция. Тогда*

$$\mathbb{E}g(T_n(b_n)) \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{j=1}^{n} \left(g(n-j+1) - g(n-j)\right) \mathbb{P}\{S_j \geqslant b_n\}.$$

Таким образом, в условиях теоремы 4, главный член асимптотики $\mathbb{E}g(T_n(b_n))$ совпадает с верхней оценкой (2) для всех монотонных функций g.

Вычислим главный член асимптотики $\mathbb{E}g(T_n(b_n))$ для двух частных классов распределений. Обозначим правый хвост распределения X через

$$F_+(x) := \mathbb{P}\{X \geqslant x\}, \quad x \geqslant 0.$$

Будем говорить что выполнено условие $[Z_\beta]$, если верно одно из следующих утверждений.

(1) $F_+(x)$ — правильно меняющаяся функция (п.м.ф), $\mathbb{E}X^2 < \infty$. В этом случае будем говорить, что X имеет правильное распределение.

(2) $F_+(x) = e^{-l(x)}$, где $l(x)$ — непрерывно дифференцируемая п.м.ф. с показателем $0 < \beta < 1$, и $l'(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \dfrac{\beta l(x)}{x}$, а также $\mathbb{E}|X|^b < \infty$ при $b = \left\lfloor \dfrac{1}{1-\beta} \right\rfloor + 2$. При выполнении этих условий будем говорить, что X имеет семиэкспоненциальное распределение.

Следствие 4. *Пусть $\mathbb{E}X = 0$, выполнено условие $[Z_\beta]$ и g — монотонная функция. Тогда*

$$\mathbb{E}g(T_n(b_n)) \underset{n\to\infty}{\sim} F_+(b_n)\sum_{j=1}^{n} g(j).$$

В частности, для $s > 0$

$$\mathbb{E}T_n^s(b_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{s+1}}{s+1} F_+(b_n),$$

где $b_n/\sqrt{n\ln n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ в случае правильного распределения X и $b_n/n^{1/(2-2\beta)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ в случае семиэкспоненциального.

Рассмотрим ещё один случай, в котором $b = 0$, а X имеет симметричное распределение с целочисленными значениями. Обозначим верхнюю оценку из (3) при $b = 0$ через

$$\bar{E}_n(k) := \sum_{j=1}^{n} \left((n-j+1)^k - (n-j)^k\right) \mathbb{P}\{S_j \geqslant 0\}.$$

Теорема 5. *Пусть X — целочисленная случайная величина, имеющая невырожденное симметричное распределение. Тогда*

$$\mathbb{E}T_n^k(0) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^k}{\pi} B\left(k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

а также

$$\frac{\bar{E}_n(k)}{\mathbb{E}T_n^k(0)} \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{k+1/2}.$$

2. Вспомогательные результаты

Лемма 1. *Пусть выполнено условие* (5). *Тогда*

$$\Lambda(\alpha) \geqslant \Lambda(\alpha_0) + \lambda(\alpha_0)(\alpha - \alpha_0), \qquad \alpha \geqslant \alpha_0 \geqslant 0, \tag{8}$$

$$\Lambda(\alpha) \leqslant \alpha\lambda(\alpha), \qquad \alpha \geqslant 0. \tag{9}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $\alpha \leqslant \alpha_+$. Известно, что $\Lambda(\alpha)$ — выпуклая функция (см. [1], глава 9), а значит,

$$\Lambda(\alpha) \geqslant \Lambda(\alpha_0) + \lambda(\alpha_0)(\alpha - \alpha_0).$$

Из формулы конечных приращений следует

$$\frac{\Lambda(\alpha) - \Lambda(0)}{\alpha - 0} = \lambda(c),$$

где c принадлежит интервалу $(0;\alpha)$. Так как $\Lambda(0) = \lambda(0) = 0$ и $\lambda(\alpha)$ есть неубывающая функция, то

$$\Lambda(\alpha) \leqslant \alpha\lambda(\alpha).$$

В случае, когда $\alpha > \alpha_+$ и $\Lambda(\alpha) = \lambda(\alpha) = \infty$ неравенства очевидны.

Остается рассмотреть лишь случай, когда $\alpha > \alpha_+$ и функция $\Lambda(\alpha)$ линейна, а $\lambda(\alpha) = \lambda_+$ на $(\alpha_+;\infty)$. Для $\alpha_0 < \alpha_+$ имеем

$$\Lambda(\alpha) = (\Lambda(\alpha) - \Lambda(\alpha_+)) + \Lambda(\alpha_+) \geqslant \lambda_+(\alpha - \alpha_+) + \Lambda(\alpha_0) + \lambda(\alpha_0)(\alpha_+ - \alpha_0)$$
$$\geqslant \Lambda(\alpha_0) + \lambda(\alpha_0)(\alpha - \alpha_0).$$

Для $\alpha_0 \geqslant \alpha_+$ в силу линейности $\Lambda(\alpha)$ на $(\alpha_+;\infty)$, очевидно, выполняется

$$\Lambda(\alpha) = \Lambda(\alpha_0) + \lambda(\alpha_0)(\alpha - \alpha_0),$$

что доказывает неравенство (8). Неравенство (9) следует из оценки

$$\Lambda(\alpha) = \Lambda(\alpha_+) + \lambda_+(\alpha - \alpha_+) \leqslant \alpha_+\lambda(\alpha_+) + \lambda(\alpha)(\alpha - \alpha_+) = \alpha\lambda(\alpha).$$

□

Лемма 2. *В условиях леммы 1 для всякой функции* $g(x) \geqslant 0$ *имеет место*

$$\sum_{j=1}^{n} g(n-j)e^{-j\Lambda(b/j)} \leqslant e^{-n\Lambda(b/n)} \sum_{j=0}^{n-1} g(j)q^j,$$

где $q = \exp\left\{\Lambda(b/n) - \frac{b}{n}\lambda(b/n)\right\} < 1$.

Доказательство. Воспользуемся леммой 1. Неравенство $q < 1$ сразу следует из неравенства (9). И из неравенства (8) имеем

$$\sum_{j=1}^{n} g(n-j)e^{-j\Lambda(b/j)} \leqslant \sum_{j=1}^{n} g(n-j)\exp\left\{-j\left(\Lambda(b/n) + b\lambda(b/n)\frac{n-j}{nj}\right)\right\}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} g(n-j)\exp\left\{-j\Lambda(b/n) - \frac{b}{n}\lambda(b/n)(n-j)\right\}$$
$$= e^{-n\Lambda(b/n)} \sum_{j=1}^{n} g(n-j)\exp\left\{(n-j)\left(\Lambda(b/n) - \frac{b}{n}\lambda(b/n)\right)\right\} = e^{-n\Lambda(b/n)} \sum_{j=0}^{n-1} g(j)q^j,$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 3. *Пусть* g *— произвольная функция,* $g(0) = 0$*, тогда*

$$\sum_{j=1}^{n} j\left(g(n-j+1) - g(n-j)\right) = \sum_{j=1}^{n} g(j).$$

Если $\delta \geqslant 1$, то

$$\sum_{j=1}^{n} j^{\delta}\left(g(n-j+1)-g(n-j)\right) \leqslant g(n)+\delta \sum_{j=1}^{n-1}(j+1)^{\delta-1} g(n-j).$$

Доказательство.

$$\sum_{j=1}^{n} j^{\delta}\left(g(n-j+1)-g(n-j)\right)=\sum_{j=1}^{n} j^{\delta} g(n-j+1)-\sum_{j=1}^{n} j^{\delta} g(n-j)$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)^{\delta} g(n-j)-\sum_{j=1}^{n-1} j^{\delta} g(n-j)=g(n)+\sum_{j=1}^{n-1}\left((j+1)^{\delta}-j^{\delta}\right) g(n-j). \tag{10}$$

Применив формулу конечных приращений для функции $f(t)=t^{\delta}$, получаем для $t_2>t_1$:

$$t_2^{\delta}-t_1^{\delta}=f(t_2)-f(t_1) \leqslant f'(t_2)(t_2-t_1)=\delta t_2^{\delta-1}(t_2-t_1).$$

Отсюда следует

$$\sum_{j=1}^{n} j^{\delta}\left(g(n-j+1)-g(n-j)\right) \leqslant g(n)+\delta \sum_{j=1}^{n-1}(j+1)^{\delta-1} g(n-j).$$

При $\delta=1$ из (10) получаем

$$\sum_{j=1}^{n} j\left(g(n-j+1)-g(n-j)\right)=g(n)+\sum_{j=1}^{n-1} g(n-j)=\sum_{j=1}^{n} g(j).$$

□

Лемма 4. *Пусть $m \geqslant 1$, а функция $g(x)$ такова, что $g(0)=0$ и*

$$\frac{\mathrm{d}^m g}{\mathrm{d}x^m}(x) \geqslant 0$$

для всех $x \in (0;m)$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{m}(-1)^{m-j}\binom{m}{j} g(j) \geqslant 0.$$

Доказательство. Определим оператор конечной разности Δ и его степени:

$$\Delta g(x):=\Delta^1 g(x)=g(x+1)-g(x),$$
$$\Delta^m g(x):=\Delta\left(\Delta^{m-1} g(x)\right).$$

Нетрудно видеть, что

$$\Delta^m g(x)=\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\binom{m}{j} g(x+j). \tag{11}$$

Покажем это по индукции. Очевидно, что для $m=1$ формула (11) верна. Если же она верна для $m-1$, то

$$\Delta^m g(x)=\Delta\left(\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^{m-j-1}\binom{m-1}{j} g(x+j)\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{m} \left((-1)^{m-j-2} \binom{m-1}{j-1} - (-1)^{m-j-1} \binom{m-1}{j} \right) g(x+j)$$

$$= \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \left(\binom{m-1}{j-1} + \binom{m-1}{j} \right) g(x+j) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} g(x+j),$$

что и доказывает (11) для всех натуральных m.

Заметим, что интересующая нас сумма есть не что иное как выражение $\Delta^m g(x)$, взятое в точке $x = 0$, и что

$$\Delta x^j = (x+1)^j - x^j = jx^{j-1} + \sum_{i=0}^{j-2} \binom{j}{i} x^i.$$

Но тогда, если $P_m(x)$ — полином степени m со старшим коэффициентом Ax^m, то $\Delta P_m(x)$ — полином степени $m-1$ со старшим коэффициентом Amx^{m-1}, и

$$\Delta^m P_m(x) = Am! \equiv \frac{\mathrm{d}^m P_m(x)}{\mathrm{d}x^m} \equiv const.$$

Возьмем в качестве $P_m(x)$ полином, совпадающий с $g(x)$ в точках $0,\ 1, \ldots, m$. Тогда, в силу линейности оператора Δ, выполняется

$$\Delta^m g(0) - \Delta^m P_m(0) = \Delta^m \left(g(x) - P_m(x) \right) \Big|_{x=0}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} \left(g(x+j) - P_m(x+j) \right) \right) \Bigg|_{x=0} = 0,$$

$$\Delta^m g(0) = \Delta^m P_m(0).$$

С другой стороны, $g(x) - P_m(x)$ обращается в нуль в точках $0,\ 1, \ldots, m$. Тогда по теореме Ролля существуют m точек $x_1,\ x_2, \ldots, x_m$,

$$0 < x_1 < 1 < x_2 < 2 < \ldots < m-1 < x_m < m,$$

таких, что $g'(x) - P'_m(x)$ обращается в них в нуль. Применяя теорему Ролля ещё $m-1$ раз, находим точку $0 < x_* < m$, в которой

$$\frac{\mathrm{d}^m g}{\mathrm{d}x^m}(x_*) = \frac{\mathrm{d}^m P_m}{\mathrm{d}x^m}(x_*) \equiv \Delta^m P_m(0) \geqslant 0.$$

Но тогда

$$\Delta^m g(0) = \frac{\mathrm{d}^m g}{\mathrm{d}x^m}(x_*) \geqslant 0,$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 5. *Пусть выполняются условия теоремы* 4. *Тогда для* $1 \leqslant j < j_1 < \ldots < j_m \leqslant n$ *равномерно по всевозможным наборам* $j, j_1, \ldots, j_m$ *имеет место*

$$\mathbb{P}\{S_j \geqslant b_n, S_{j_1} \geqslant b_n, S_{j_2} \geqslant b_n, \ldots, S_{j_m} \geqslant b_n\} \underset{n\to\infty}{\sim} \mathbb{P}\{S_j \geqslant b_n\}.$$

Доказательство. Фиксируем m, набор индексов $j < j_1 < \ldots < j_m$ и обозначим

$$A_j^{(n)} := \{S_j \geqslant b_n\}, \quad B_j^{(n)} := \{S_j \geqslant b_n + \Delta_n\}, \quad C_j^{(n)} := A_j \backslash B_j,$$

$$\bar{S}_{l_1,l_2} := \inf_{l_1 \leqslant l \leqslant l_2} (X_{l_1} + \ldots + X_l), \quad \bar{S}_l := \bar{S}_{1,l},$$

$$D_{j_1,\ldots,j_m}^{(n)} := \{S_{j_1} \geqslant b_n, S_{j_2} \geqslant b_n, \ldots, S_{j_m} \geqslant b_n\}, \quad D_j^{'(n)} := \{\bar{S}_{j+1,n} \geqslant -\Delta_n\},$$

где событие $D_j^{'(n)}$ не зависит от $B_j^{(n)}$. Всюду ниже будем для простоты опускать верхний индекс n и писать $A_j, B_j, C_j, D_{j_1,\dots,j_m}, D'_{j_1,\dots,j_m}$.

Нетрудно видеть, что имеют место следующие соотношения:

(12)
$$\mathbb{P}(A_j) = \mathbb{P}(B_j) + \mathbb{P}(C_j), \quad \mathbb{P}(D'_j) \geqslant \mathbb{P}\{\bar{S}_n \geqslant -\Delta_n\}, \quad B_j^{(n)} D_j^{'(n)} \subset B_j^{(n)} D_{j_1,\dots,j_m}^{(n)}.$$

Нам необходимо показать, что

$$\mathbb{P}(A_j D_{j_1,\dots,j_m}) = \mathbb{P}(B_j D_{j_1,\dots,j_m}) + \mathbb{P}(C_j D_{j_1,\dots,j_m}) \underset{n\to\infty}{\sim} \mathbb{P}(A_j).$$

По условиям леммы $\mathbb{P}(A_j) \underset{n\to\infty}{\sim} \mathbb{P}(B_j)$ равномерно по всем $1 \leqslant j \leqslant n$, поэтому из первого равенства в (12) следует

$$\mathbb{P}(C_j D_{j_1,\dots,j_m}) \leqslant \mathbb{P}(C_j) = o(\mathbb{P}(A_j)),$$

причем приведенная оценка сверху равномерна по всем наборам $m, j, j_1, \dots, j_m$.

Нам остается показать лишь равномерную эквивалентность $\mathbb{P}(B_j D_{j_1,\dots,j_m}) \underset{n\to\infty}{\sim} \mathbb{P}(B_j)$. Из (12) и независимости D'_j и B_j получаем

$$\mathbb{P}(B_j D_{j_1,\dots,j_m}) \geqslant \mathbb{P}(B_j D'_{j_1,\dots,j_m}) = \mathbb{P}(B_j)\mathbb{P}(D'_{j_1,\dots,j_m}).$$

Заметим, что из неравенства Леви–Колмогорова, условий $\mathbb{E}X^2 < \infty$ и $\Delta_n/\sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ следует

$$\mathbb{P}\{-\bar{S}_n > \Delta_n\} = \mathbb{P}\{\max_{1\leqslant l\leqslant n}(-S_l) > \Delta_n\} \leqslant 2\mathbb{P}\{S_n \leqslant -\Delta_n + \sqrt{2}\sigma\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

откуда имеем

$$\mathbb{P}(D'_{j_1,\dots,j_m}) \geqslant \mathbb{P}\{\bar{S}_n \geqslant -\Delta_n\} = 1 - \mathbb{P}\{-\bar{S}_n > \Delta_n\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1, \tag{13}$$

а значит

$$\mathbb{P}(B_j D_{j_1,\dots,j_m}) \geqslant \mathbb{P}(B_j)\mathbb{P}(D'_{j_1,\dots,j_m}) \underset{n\to\infty}{\sim} \mathbb{P}(B_j). \tag{14}$$

Очевидно, что

$$\mathbb{P}(B_j D_{j_1,\dots,j_m}) \leqslant \mathbb{P}(B_j), \tag{15}$$

поэтому $\mathbb{P}(B_j D_{j_1,\dots,j_m}) \underset{n\to\infty}{\sim} \mathbb{P}(B_j)$. Из (13) следует, что нижняя оценка (14) сходится к верхней оценке (15) равномерно по всем наборам $m, j, j_1, \dots, j_m$. Это и завершает доказательство леммы. □

3. Доказательства основных результатов

Доказательство теоремы 1. Обозначим $I_m = I_{\{S_m \geqslant b\}}$ и покажем, что для любой функции g такой, что $g(0) = 0$, имеет место следующее представление:

$$g(T_n(b)) = \sum_{m=1}^{n} a_m \sum_{1\leqslant j_1<\dots<j_m\leqslant n} I_{j_1} \dots I_{j_m}, \tag{16}$$

где $a_m = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} g(j)$. Рассмотрим события $A_i = \{T_n(b) = i\}$, $i = 0, \dots, n$. Очевидно, что пространство элементарных исходов Ω представимо в виде $\Omega = \cup_{i=0}^{n} A_i$, и что (16) выполняется для каждого элементарного исхода $\omega \in A_0$. Покажем, что это равенство будет верно и для всех $\omega \in A_N$, $N \geqslant 1$. Действительно, для любого $\omega \in A_N$ существует набор индексов $i_1, \dots, i_N$ такой, что $I_{i_1}(\omega)=1,\dots,I_{i_N}(\omega)=1$ и $I_i(\omega)=0$ для $i\notin\{i_1,\dots,i_N\}$. Тогда для любого фиксированного $\omega\in A_N$ имеем

$$\sum_{m=1}^{n} a_m \sum_{1\leqslant j_1<\ldots<j_m\leqslant n} I_{j_1}\ldots I_{j_m} = \sum_{m=1}^{N} a_m \sum_{1\leqslant j_1<\ldots<j_m\leqslant n} I_{j_1}\ldots I_{j_m} = \sum_{m=1}^{N}\binom{N}{m}a_m$$

$$= \sum_{m=1}^{N}\binom{N}{m}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{m-j}\binom{m}{j}g(j) = \sum_{j=1}^{N} g(j)\sum_{m=j}^{N}(-1)^{m-j}\binom{N}{m}\binom{m}{j}.$$

В то же время

$$\sum_{m=j}^{N}(-1)^{m-j}\binom{N}{m}\binom{m}{j} = \binom{N}{j}\sum_{m=j}^{N}(-1)^{m-j}\binom{N-j}{m-j}$$

$$(17)\qquad = \binom{N}{j}\sum_{m=0}^{N-j}(-1)^{m}\binom{N-j}{m} = \binom{N}{j}(1-1)^{N-j} = I_{\{j=N\}},$$

откуда для ранее выбранного ω имеем

$$\sum_{m=1}^{n} a_m \sum_{1\leqslant j_1<\ldots<j_m\leqslant n} I_{j_1}\ldots I_{j_m} = \sum_{j=1}^{N} g(j)I_{\{j=N\}} = g(N) = g(T_n(b)).$$

Следовательно, равенство (16) имеет место на всех элементарных исходах $\omega\in\Omega$.

Из леммы 4 следует, что $a_m\geqslant 0$ для всех $m\geqslant 1$. Это позволяет нам сделать следующую оценку:

$$\mathbb{E}g(T_n(b)) = \sum_{m=1}^{n} a_m \sum_{1\leqslant j<j_1<\ldots<j_{m-1}\leqslant n} \mathbb{P}\{S_j\geqslant b, S_{j_1}\geqslant b,\dots,S_{j_{m-1}}\geqslant b\}$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{n} a_m \sum_{j=1}^{n-m+1}\binom{n-j}{m-1}\mathbb{P}\{S_j\geqslant b\}$$

$$(18)\qquad = \sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}\{S_j\geqslant b\}\sum_{m=1}^{n-j+1} a_m\left(\binom{n-j+1}{m}-\binom{n-j}{m}\right),$$

где полагаем $\binom{n-j}{n-j+1}=0$. Далее, поступая аналогично (17), получаем

$$\sum_{m=1}^{n-j+1} a_m\binom{n-j+1}{m} = \sum_{m=1}^{n-j+1}\binom{n-j+1}{m}\sum_{l=1}^{m}(-1)^{m-l}\binom{m}{l}g(l)$$

$$= \sum_{l=1}^{n-j+1} g(l)\sum_{m=l}^{n-j+1}(-1)^{m-l}\binom{n-j+1}{m}\binom{m}{l} = g(n-j+1),$$

а также,

$$\sum_{m=1}^{n-j+1} a_m\binom{n-j}{m} = \sum_{m=1}^{n-j} a_m\binom{n-j}{m} = g(n-j).$$

Подставляя это в (18), получаем

$$\mathbb{E}g(T_n(b)) \leqslant \sum_{j=1}^{n} (g(n-j+1) - g(n-j))\, \mathbb{P}\{S_j \geqslant b\},$$

откуда

$$\mathbb{E}T_n^k(b) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \left((n-j+1)^k - (n-j)^k\right) \mathbb{P}\{S_j \geqslant b\},$$

$$\mathbb{E}e^{\mu T_n(b)} \leqslant 1 + \sum_{j=1}^{n} \left(e^{(n-j+1)\mu} - e^{(n-j)\mu}\right) \mathbb{P}\{S_j \geqslant b\}$$

$$= 1 + (e^{\mu} - 1) \sum_{j=1}^{n} e^{(n-j)\mu} \mathbb{P}\{S_j \geqslant b\} = 1 + (q_2 - 1) \sum_{j=1}^{n} q_2^{n-j} \mathbb{P}\{S_j \geqslant b\},$$

где $q_2 = e^{\mu}$.

Докажем теперь оценку снизу. Действуя аналогично (18), имеем

$$\mathbb{E}g(T_n(b)) = \sum_{m=1}^{n} a_m \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_{m-1} < j \leqslant n} \mathbb{P}\{S_{j_1} \geqslant b, \ldots, S_{j_{m-1}} \geqslant b, S_j \geqslant b\}$$

$$\geqslant \sum_{m=1}^{n} a_m \sum_{j=1}^{n-m+1} \binom{m-j}{m-1} p^{m-1} \mathbb{P}\{S_j \geqslant b\}$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}\{S_j \geqslant b\} \sum_{m=1}^{n-j+1} a_m p^m \left(\binom{n-j+1}{m} - \binom{n-j}{m} \right), \tag{19}$$

где полагаем $\binom{j-1}{j} = 0$. Далее,

$$\sum_{m=1}^{n-j+1} a_m p^m \binom{n-j+1}{m} = \sum_{m=1}^{n-j+1} p^m \binom{n-j+1}{m} \sum_{l=1}^{m} (-1)^{m-l} \binom{m}{l} g(l)$$

$$= \sum_{l=1}^{n-j+1} g(l) p^l \binom{n-j+1}{l} \sum_{m=0}^{n-j-l+1} (-1)^m p^m \binom{n-j-l+1}{m}$$

$$= \sum_{l=0}^{n-j+1} g(l) \binom{n-j+1}{l} p^l (1-p)^{n-j+1-l} = \mathbb{E}g(\eta_{n-j+1}),$$

а также

$$\sum_{m=1}^{n-j+1} a_m p^m \binom{n-j}{m} = \mathbb{E}g(\eta_{n-j}).$$

Наконец, подставив это в (19), получаем

$$\mathbb{E}g(T_n(b)) \geqslant \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{n} (\mathbb{E}g(\eta_{n-j+1}) - \mathbb{E}g(\eta_{n-j}))\, \mathbb{P}\{S_j \geqslant b\}, \tag{20}$$

откуда

$$\mathbb{E}g(T_n(b)) \geqslant 1 + \frac{q_1 - 1}{p} \sum_{j=1}^{n} q_1^{n-j} \mathbb{P}\{S_j \geqslant b\} = 1 + (e^{\mu} - 1) \sum_{j=1}^{n} q_1^{n-j} \mathbb{P}\{S_j \geqslant b\},$$

где $q_1 = (1 - p + pe^{\mu})$.

Введем теперь последовательность независимых бернуллиевских случайных величин $\{\xi_{i,j}\}_{i,j=1}^{\infty}$ с параметром p, а также их суммы $\zeta_j := \sum\limits_{i=1}^{j} \xi_{i,j}$, имеющие биномиальное распределение с параметрами j и p. Обозначив $\zeta'_j := \sum\limits_{i=1}^{j} \xi_{i,j+1} = \zeta_{j+1} - \xi_{j+1,j+1}$, получим

$$\mathbb{E}\eta_{n-j+1}^k - \mathbb{E}\eta_{n-j}^k = \mathbb{E}\zeta_{n-j+1}^k - \mathbb{E}\zeta_{n-j}^k$$

$$= \mathbb{E}\left(\zeta'_{n-j} + \xi_{n-j+1,n-j+1}\right)^k - \mathbb{E}\zeta_{n-j}^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mathbb{E}\zeta_{n-j}^i \xi_{n-j+1,n-j+1}^{k-i} - \mathbb{E}\zeta_{n-j}^k$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \mathbb{E}\zeta_{n-j}^i \xi_{n-j+1,n-j+1}^{k-i} = p \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \mathbb{E}\zeta_{n-j}^i \geqslant p \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \left(\mathbb{E}\zeta_{n-j}\right)^i$$

$$= p \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} (p(n-j))^i = p\left((p(n-j)+1)^k - (p(n-j))^k\right).$$

Отсюда и следует, что

$$\mathbb{E}T_n^k(b) \geqslant \sum_{j=1}^{n} \left((p(n-j)+1)^k - (p(n-j))^k\right) \mathbb{P}\{S_j \geqslant b\}.$$

Закончим доказательство, избавившись от множителя $1/p$ в правой части (20). Действительно,

$$\mathbb{E}g(\eta_{n-j+1}) - \mathbb{E}g(\eta_{n-j}) = \mathbb{E}g(\zeta_{n-j+1}) - \mathbb{E}g(\zeta_{n-j})$$
$$= \mathbb{E}g(\zeta_{n-j} + \xi_{n-j+1}) - \mathbb{E}g(\zeta_{n-j}) = p\mathbb{E}g(\zeta_{n-j}+1) + (1-p)\mathbb{E}g(\zeta_{n-j}) - \mathbb{E}g(\zeta_{n-j})$$
$$= p\left(\mathbb{E}g(\zeta_{n-j}+1) - \mathbb{E}g(\zeta_{n-j})\right) = p\left(\mathbb{E}g(\eta_{n-j}+1) - \mathbb{E}g(\eta_{n-j})\right),$$

откуда имеем

$$\mathbb{E}g(T_n(b)) \geqslant \sum_{j=1}^{n} \left(\mathbb{E}g(\eta_{n-j}+1) - \mathbb{E}g(\eta_{n-j})\right) \mathbb{P}\{S_j \geqslant b\}.$$

□

Замечание. Заметим, что доказательство верхних оценок в теореме 1 можно дословно повторить и для произвольной суммы индикаторов

$$\tilde{T}_n = \sum_{j=1}^{n} I_{B_j},$$

где $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ — любая последовательность событий, определенных на одном вероятностном пространстве.

Доказательство теоремы 2. Используя экспоненциальное неравенство Чебышева (см. [1, гл. 9, §1])

$$\mathbb{P}\{S_n \geqslant b\} \leqslant \exp\{-n\Lambda(b/n)\} \tag{21}$$

и (3), получаем

$$\mathbb{E}T_n^k(b) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \left((n-j+1)^k - (n-j)^k\right) e^{-j\Lambda(b/j)} = \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{n} \binom{k}{m} (n-j)^m e^{-j\Lambda(b/j)}.$$

Из леммы 2 имеем

$$\sum_{j=1}^{n}(n-j)^m e^{-j\Lambda(b/j)} = e^{-n\Lambda(b/n)}\sum_{j=0}^{n-1} j^m q^j$$

$$\leqslant e^{-n\Lambda(b/n)}\sum_{j=m}^{\infty} j(j-1)\dots(j-(m-1))q^{j-m} = e^{-n\Lambda(b/n)}\frac{m!}{(1-q)^{m+1}}.$$

Отсюда получаем

$$\mathbb{E}T_n^k(b) \leqslant e^{-n\Lambda(b/n)}\sum_{m=0}^{k-1}\binom{k}{m}\frac{m!}{(1-q)^{m+1}} = e^{-n\Lambda(b/n)}\sum_{m=0}^{k-1}\frac{k!}{(k-m)!}\frac{1}{(1-q)^{m+1}}$$

$$= e^{-n\Lambda(b/n)}k!\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m!}\frac{1}{(1-q)^{k-m+1}} = e^{-n\Lambda(b/n)}\frac{k!}{(1-q)^k}\sum_{m=1}^{k}\frac{(1-q)^{m-1}}{m!}$$

$$\leqslant \frac{k!(e-1)}{(1-q)^k}e^{-n\Lambda(b/n)},$$

что доказывает первую часть теоремы.

Далее, из неравенств (4) и (21) имеем

$$\mathbb{E}e^{\mu T_n(b)} \leqslant 1 + (e-1)\sum_{j=1}^{n} e^{\lambda(n-j)}e^{-j\Lambda(b/j)}.$$

Снова применяя лемму 2, получаем

$$\sum_{j=1}^{n} e^{\mu(n-j)}e^{-j\Lambda(b/j)} \leqslant e^{-n\Lambda(b/n)}\sum_{j=0}^{n-1}(e^{\mu}q)^j =$$

$$e^{-n\Lambda(b/n)}\frac{e^{n\mu}q^n-1}{e^{\mu}q-1} = \frac{e^{n\mu-b\lambda(b/n)}-e^{-n\Lambda(b/n)}}{e^{\mu}q-1},$$

откуда

$$\mathbb{E}e^{\mu T_n(b)} \leqslant 1 + (e-1)\frac{e^{n\mu-b\lambda(b/n)}-e^{-n\Lambda(b/n)}}{e^{\mu}q-1}.$$

□

Доказательство следствия 1. Так как $\Lambda(0)=\lambda(0)=0$, то

$$\Lambda(b/n) - \frac{b}{n}\lambda(b/n) = \frac{b^2}{2\sigma^2 n^2} - \frac{b^2}{\sigma^2 n^2} + r(b/n) = -\frac{b^2}{2\sigma^2 n^2} + r(b/n),$$

где функция $r(x) = \int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t - xh(x)$ ограничена по абсолютной величине:

$$|r(b/n)| \leqslant H\int_0^{b/n} t^2\,\mathrm{d}t + H\left(\frac{b}{n}\right)^3 = \frac{4H}{3}\left(\frac{b}{n}\right)^3.$$

Далее, так как $e^{-t} \leqslant 1 - t + \frac{t^2}{2}$ и $(a+b)^2 \leqslant 3(a^2+b^2)$, то

$$1-q = 1-\exp\left\{\Lambda(b/n) - \frac{b}{n}\lambda(b/n)\right\} \geqslant \frac{b^2}{2\sigma^2 n^2} - r(b/n) - \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{2\sigma^2 n^2} - r(b/n)\right)^2$$

$$\geqslant \frac{b^2}{2\sigma^2 n^2} - \frac{4H}{3}\left(\frac{b}{n}\right)^3 - \frac{3}{8\sigma^4}\left(\frac{b}{n}\right)^4 - \frac{8H^2}{9}\left(\frac{b}{n}\right)^6 \geqslant \left(1-\frac{b}{\rho n}\right)\frac{b^2}{2\sigma^2 n^2}.$$

Так как $\left(1-\dfrac{b}{\rho n}\right) > 0$, то верна оценка $\dfrac{1}{1-q} \leqslant \dfrac{2\sigma^2 n^2}{(1-b/(\rho n))\, b^2}$, откуда напрямую вытекает утверждение следствия. □

Для доказательства следующей теоремы нам потребуются ещё одно неравенство, полученое в [3] при условии $c_m = \mathbb{E}|X|^m < \infty$:

(22)
$$\mathbb{P}\{S_n \geqslant b\} < n\mathbb{P}\{X \geqslant b\} + \exp\left\{2n\left[\frac{m\ln y - \ln(nc_m K_m)}{y}\right]^2 + 1\right\}\left(\frac{nc_m K_m}{y^m}\right)^{x/y},$$

где $x > 0$, $y > 0$, $m > 2$.

Доказательство теоремы 3. Зафиксируем $m > 2$ и $y > 0$. Так как $y > (nc_m K_m)^{1/m}$, то неравенство (22) можно привести к следующему виду:

$$\mathbb{P}\{S_j \geqslant b\} \leqslant j\mathbb{P}\{X \geqslant b\} + hj^{b/y},$$

$$h_{y,m}(b,n) = \exp\left\{2n\left(\frac{m\ln y}{y}\right)^2 + 1\right\}\left(\frac{c_m K_m}{y^m}\right)^{b/y}.$$

Тогда из (3) получаем

$$\mathbb{E}T_n^k(b) \leqslant \sum_{j=1}^{n} j\left((n-j+1)^k - (n-j)^k\right)\mathbb{P}\{X \geqslant b\}$$

$$+h_{y,m}(b,n)\sum_{j=1}^{n}\left((n-j+1)^k - (n-j)^k\right)j^{b/y}.$$

Первая сумма, согласно лемме 3, равна $\mathbb{P}\{X \geqslant b\}\sum_{j=1}^{n} j^k$. Остается оценить вторую сумму. Так как $b/y \geqslant 1$, то мы снова можем применить лемму 3:

$$\sum_{j=1}^{n} j^{b/y}\left((n-j+1)^k - (n-j)^k\right) \leqslant n^k + \frac{b}{y}\sum_{j=1}^{n-1}(j+1)^p(n-j)^k, \tag{23}$$

где $p = (b/y) - 1$. Верна следующая оценка:

$$\sum_{j=1}^{n-1}(j+1)^p(n-j)^k = 2^p(n-1)^k + \sum_{j=2}^{n}\left(\frac{j+1}{j-1}\right)^p(j-1)^p(n-j)^k$$

$$\leqslant 2^p(n-1)^k + 3^p\sum_{j=1}^{n}(j-1)^p(n-j)^k. \tag{24}$$

Если t принадлежит отрезку $[j-1; j]$, то $j-1 \leqslant t$ и $n-j \leqslant n-t$. Тогда мы можем оценить j–ое слагаемое интегралом по $[j-1; j]$:

$$\sum_{j=1}^{n}(j-1)^p(n-j)^k \leqslant \int_0^n t^p(n-t)^k\,\mathrm{d}t$$

$$= n^{p+k+1}\int_0^1 t^p(1-t)^k\,\mathrm{d}t = n^{(b/y)+k}B\left(\frac{b}{y}, k+1\right). \tag{25}$$

Совмещая (23), (24) и (25), получаем

$$\sum_{j=1}^{n}\left((n-j+1)^k-(n-j)^k\right)j^{b/y}$$

$$\leqslant n^k+\frac{b}{y}\left(2^{(b-y)/y}(n-1)^k+(3n)^{(b-y)/y}n^kB\left(\frac{b}{y},k+1\right)\right)=Q_k(n,b/y). \tag{26}$$

Отсюда имеем

$$\mathbb{E}T_n^k(b)\leqslant\mathbb{P}\{X\geqslant b\}\sum_{j=1}^{n}j^k+Q_k(n,b/y)\exp\left\{2n\left(\frac{m\ln y}{y}\right)^2+1\right\}\left(\frac{c_mK_m}{y^m}\right)^{b/y}.$$

□

Доказательство следствия 2. Положим $y=b/s$. Тогда из $b>s\,(K_m\mathbb{E}\alpha_m)^{1/m}\,n^{1/m}$ следует $y=b/s>(K_mc_mn)^{1/m}$, а значит выполнено неравенство (7).

Очевидно, что $Q_k(n,b/y)=Q_k(n,s)$ есть полином степени $k+s-1$, чьи коэффициенты зависят лишь от k и s. Далее, обозначив $A_{m,s}=e(c_mK_ms)^s$, получаем

$$e\left(\frac{c_mK_m}{y^m}\right)^{b/y}=A_{m,s}/b^{ms},\qquad\exp\left\{2n\left(\frac{m\ln y}{y}\right)^2\right\}\leqslant\exp\left\{2m^2\frac{n\ln b}{b^2}\right\}.$$

В итоге мы приходим к неравенству

$$\mathbb{E}T_n^k(b)\leqslant\mathbb{P}\{X\geqslant b\}\sum_{j=1}^{n}j^k+A_{m,s}\frac{Q_k(n,s)\exp\left\{2m^2\frac{n\ln^2 b}{b^2}\right\}}{b^{ms}},$$

что и требовалось доказать. □

Доказательство теоремы 4. Вернемся к доказательству теоремы 1 и заметим, что используя утверждение леммы 5 вместо оценки (18), мы можем выписать следующее равенство при $b_n\to\infty$:

$$\mathbb{E}g(T_n(b_n))=\sum_{m=1}^{n}a_m\sum_{1\leqslant j<j_1<\ldots<j_{m-1}\leqslant n}\mathbb{P}\{S_j\geqslant b_n,S_{j_1}\geqslant b_n,\ldots,S_{j_{m-1}}\geqslant b_n\}$$

$$=\sum_{m=1}^{n}a_m\sum_{j=1}^{n-m+1}\binom{n-j}{m-1}\left(\mathbb{P}\{S_j\geqslant b_n\}+o\left(\mathbb{P}\{S_j\geqslant b_n\}\right)\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\mathbb{P}\{S_j\geqslant b_n\}+o\left(\mathbb{P}\{S_j\geqslant b_n\}\right)\right)\sum_{m=1}^{n-j+1}a_m\left(\binom{n-j+1}{m}-\binom{n-j}{m}\right),$$

где все остаточные члены $o\left(\mathbb{P}\{S_j\geqslant b_n\}\right)$ будут равномерно ограниченны по всем $1\leqslant j\leqslant n$.

Так как при доказательстве верхней оценки в теореме 1 все остальные переходы были тождественными, то, повторяя их дословно, получаем

$$\mathbb{E}g(T_n(b_n))=\sum_{j=1}^{n}\left(g(n-j+1)-g(n-j)\right)\left(\mathbb{P}\{S_j\geqslant b_n\}+o\left(\mathbb{P}\{S_j\geqslant b_n\}\right)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (g(n-j+1) - g(n-j))\, \mathbb{P}\{S_j \geqslant b_n\}$$

$$+o\left(\sum_{j=1}^{n} |g(n-j+1) - g(n-j)|\, \mathbb{P}\{S_j \geqslant b_n\}\right)$$

при $n \to \infty$, что и требовалось доказать. □

Доказательство следствия 3. Из теоремы 4 и монотонности функции g сразу получаем

$$\mathbb{E}g(T_n(b_n)) \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{j=1}^{n} (g(n-j+1) - g(n-j))\, \mathbb{P}\{S_j \geqslant b_n\},$$

что и требовалось доказать. □

В результатах [2] содержится следующая теорема (§4.4, §5.4.2).

Теорема A. *Пусть выполнено условие* $[Z_\beta]$. *Тогда*

$$\mathbb{P}\{S_j > b_n\} \underset{n\to\infty}{\sim} jF_+(b_n)$$

равномерно по всем $1 \leqslant j \leqslant n$, *где* $b_n/\sqrt{n \ln n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ *в случае правильного распределения* X *и* $b_n/n^{1/(2-2\beta)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ *в случае семиэкспоненциального.*

Доказательство следствия 4. Покажем что мы попадаем в условия теоремы 4. Из теоремы A следует

$$\frac{\mathbb{P}\{S_j \geqslant b_n + \Delta_n\}}{\mathbb{P}\{S_j \geqslant b_n\}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{F_+(b_n + \Delta_n)}{F_+(b_n)}.$$

Нам необходимо показать, что $\dfrac{F_+(b_n + \Delta_n)}{F_+(b_n)} \underset{n\to\infty}{\sim} 1$, откуда сразу же будет следовать, что $\mathbb{P}\{S_j \geqslant b_n + \Delta_n\} \underset{n\to\infty}{\sim} \mathbb{P}\{S_j \geqslant b_n\}$ равномерно по всем $1 \leqslant j \leqslant n$.

Если $F_+(t)$ — п.м.ф., то $F_+(t) = t^{-\beta}L(t)$, где $L(t)$ — медленно меняющаяся функция (м.м.ф.). Взяв такое Δ_n, что $\Delta_n/b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, получаем:

$$\frac{F_+(b_n + \Delta_n)}{F_+(b_n)} = \frac{(b_n + \Delta_n)^{-\beta} L(b_n + \Delta_n)}{b_n^{-\beta} L(b_n)} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{L(b_n(1 + \Delta_n/b_n))}{L(b_n)} \underset{n\to\infty}{\sim} 1.$$

Покажем, что то же верно и для случая, когда $F_+(x) = e^{-l(x)} = e^{-t^\beta L(x)}$, где $L(x)$ - м.м.ф. Действительно, имеем

(27)

$$\frac{F_+(b_n + \Delta_n)}{F_+(b_n)} = \frac{e^{-(b_n+\Delta_n)^\beta L(b_n+\Delta_n)}}{e^{-b_n^\beta L(b_n)}} = \exp\left\{-(b_n + \Delta_n)^\beta L(b_n + \Delta_n) + b_n^\beta L(b_n)\right\},$$

где

$$-(b_n + \Delta_n)^\beta L(b_n + \Delta_n) + b_n^\beta L(b_n)$$

$$= -(b_n + \Delta_n)^\beta \left(L(b_n + \Delta_n) - L(b_n)\right) + \left(b_n^\beta - (b_n + \Delta_n)^\beta\right) L(b_n).$$

Покажем что оба слагаемые стремятся к нулю при $n \to \infty$. Для этого обозначим $A_n := b_n/n^{1/(2-2\beta)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ и $B_n := \Delta_n/n^{1/2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Существует $0 \leqslant \varepsilon_n \leqslant 1$ такое, что

$$\left((b_n+\Delta_n)^\beta - b_n^\beta\right) = \beta b_n^{\beta-1}\varepsilon_n\Delta_n \leqslant \frac{\beta\Delta_n}{(n^{1/(2-2\beta)}A_n)^{1-\beta}} = \frac{\beta\Delta_n}{n^{1/2}A_n^{1-\beta}} = \frac{\beta B_n}{A_n^{1-\beta}},$$

откуда, взяв последовательность $\{B_m\}_{m=1}^\infty$ достаточно медленно растущей, получаем

$$\left((b_n+\Delta_n)^\beta - b_n^\beta\right) L(b_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{28}$$

Рассмотрим теперь разность $L(b_n+\Delta_n) - L(b_n)$. Известно (см., например, [1], приложение 6), что для некоторого $x_0 > 0$ имеет место представление

$$L(x) = c(x)\exp\left\{\int_{x_0}^x \frac{\epsilon(u)}{u}\,\mathrm{d}u\right\}, \qquad x \geqslant x_0,$$

где функции $c(x)$ и $\epsilon(x)$ измеримы, причем $c(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} c \in (0;\infty)$ и $\epsilon(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Из этого представления для достаточно больших b_n следует

$$L(b_n+\Delta_n) - L(b_n) =$$

$$L(b_n)\left(\frac{L(b_n+\Delta_n)}{L(b_n)} - 1\right) \underset{n\to\infty}{\sim} L(b_n)\left(\exp\left\{\int_{b_n}^{b_n+\Delta_n} \frac{\epsilon(u)}{u}\,\mathrm{d}u\right\} - 1\right)$$

$$\leqslant L(b_n)\left(e^{\Delta_n/b_n} - 1\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\Delta_n}{b_n}L(b_n),$$

откуда

$$0 \leqslant (b_n+\Delta_n)^\beta\left(L(b_n+\Delta_n) - L(b_n)\right) \leqslant (b_n+\Delta_n)^\beta\frac{\Delta_n}{b_n}L(b_n)(1+o(1))$$

$$= (1+\Delta_n/b_n)^\beta b_n^{\beta-1}\Delta_n L(b_n)(1+o(1)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

$$(b_n+\Delta_n)^\beta\left(L(b_n+\Delta_n) - L(b_n)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{29}$$

Из (27), (28) и (29) следует, что существует подходящая условиям теоремы 4 последовательность $\{\Delta_n\}_{n=1}^\infty$, для которой

$$F_+(b_n+\Delta_n) \underset{n\to\infty}{\sim} F_+(b_n).$$

Наконец, из теоремы A, следствия 3 и леммы 3 имеем

$$\mathbb{E}g(T_n(b_n)) \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{j=1}^n \left(g(n-j+1) - g(n-j)\right)\mathbb{P}\{S_j \geqslant b_n\}$$

$$\underset{n\to\infty}{\sim} F_+(b_n)\sum_{j=1}^n j\left(g(n-j+1) - g(n-j)\right) = F_+(b_n)\sum_{j=1}^n g(j).$$

В частности,

$$\mathbb{E}T_n^s(b_n) \underset{n\to\infty}{\sim} F_+(b_n)\sum_{j=1}^n j^s \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{s+1}}{s+1}F_+(b_n).$$

□

Доказательство теоремы 5. Если выполнены условия теоремы 5, то, в силу известного закона арксинуса (см., например, [4], §4.20, теорема 2), имеет место

$$\mathbb{P}\left\{\frac{T_n(0)}{n} < x\right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Пусть случайная величина $\xi \geqslant 0$ распределена в соответствии с предельным распределением в законе арксинуса. Тогда

$$\mathbb{E}T_n^k = n^k\mathbb{E}\left(\frac{T_n}{n}\right)^k \underset{n\to\infty}{\sim} n^k\mathbb{E}\xi^k = \frac{n^k}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{x^k}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{n^k}{\pi}\int\limits_0^1 x^{(k+1/2)-1}(1-x)^{1/2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{n^k}{\pi}B\left(k+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

Так как $b = 0$, а распределение X симметрично, то верхняя оценка примет следующий вид:

$$\bar{E}_n(k) = \sum_{j=1}^{n}\big((n-j+1)^k - (n-j)^k\big)\,\mathbb{P}\{S_j \geqslant 0\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(n-j+1)^k - (n-j)^k = \frac{n^k}{2}.$$

Наконец, из того, что при фиксированном y выполняется $B(x,y) \underset{x\to\infty}{\sim} \Gamma(y)x^{-y}$, следует

$$\frac{\bar{E}_n(k)}{\mathbb{E}T_n^k} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{B\left(k+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{k+1/2}.$$

$\square$

References

[1] A. A. Borovkov, *Probability Theory*, M.: Librokom, 2009.

[2] A. A. Borovkov, K. A. Borovkov, *Asymptotical analysis of random walks. Vol. 1. Slowly varying distributions of jumps*, M.: Fizmatlit, 2008, 652 pages. Zbl 1231.60001

[3] S. V. Nagaev, *Some Limit Theorems for Large Deviations*, Theory of Probability and its Applications, **10**:2 (1965), 214—235. Zbl 0144.18704

[4] Spitzer F., *Principles of Random Walks*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1976. Zbl 0359.60003

Anton Sergeevich Tarasenko
Novosibirsk State University,
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: dkanus@gmail.com