S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 452–466 (2016) УДК 517.946

DOI 10.17377/semi.2016.13.039 MSC 35N99,35R99

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА

А.И. КОЖАНОВ, Г.А. ЛУКИНА

Abstract. We study the solvability of nonlocal problems for equations

$$u_{ttt} + Au = f(x,t)$$

$(0 < T < +\infty$, A - elliptic operator) with only two boundary conditions instead of three and with a special integral boundary condition. We prove the existence theorems for regular solutions and indicate a possible generalization of the obtained results.

Keywords: nonlocal problem, integral condition, odd order differential equation, regular solution, existence.

1. Введение

Задачами с интегральными условиями для дифференциальных уравнений в последнее время называют такие задачи, в которых вместо того или иного локального (точечного) граничного условия $lu = 0$ задается условие $lu - Bu = 0$ с некоторым интегральным оператором B, либо же вообще вместо указанного граничного условия задается условие $Bu = 0$. Подобные задачи, в основном с условиями вида $lu-Bu = 0$ (или с условиями, сводящимися к ним), достаточно хорошо изучены для классических эллиптических, параболических и гиперболических уравнений [1-12], для некоторых неклассических уравнений [13-19]. Непосредственно к предмету настоящей статьи примыкают работы, связанные

Kozhanov, A.I., Lukina, G.A., Nonlocal problems with an integral boundary condition for the differential equations of odd order.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 15-01-06582).

Поступила 22 февраля 2016 г., опубликована 1 июня 2016 г.

с разрешимостью нелокальных задач для параболических уравнений с условием $u(x,0) - Bu = 0$ [20-26], или же с условием второго типа $Bu = 0$ [27-31] с интегральным по времени оператором B. Задачи, о которых будет идти речь ниже — именно, задачи с интегральными условиями для $(2m+1)$-параболических уравнений — ранее не изучались.

2. Постановка задач

Для простоты ограничимся одномерным по пространственным переменным случаем, а также случаем уравнений третьего порядка по выделенной (временной) переменной; общий случай в рамках применяемой техники трактуется вполне аналогично изученному ниже.

Пусть Ω — интервал (0,1) оси Ox, Q — прямоугольник $\Omega\times(0,T)$, $T \in (0,+\infty)$, $f(x,t)$, $N(t)$ — функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$. Далее, пусть L есть дифференциальный оператор, действие которого на функциях $u(x,t)$ определяется равенством

$$Lu = u_{ttt} + (-1)^{m+1}\frac{\partial^{2m}u}{\partial x^{2m}},$$

A_j, $j = \overline{1,2m}$, есть операторы, действие которых на функциях $w(x)$ определяется равенствами

$$A_j w(x) = \sum_{i=0}^{2m-1} a_{ij} w^{(i)}(0) + \sum_{i=0}^{2m-1} \alpha_{ij} w^{(i)}(1)$$

(a_{ij}, α_{ij}, $i = \overline{1,2m-1}$, $j = \overline{1,2m}$ – заданные действительные числа).

Нелокальная задача I: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$Lu = f(x,t) \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$A_j u(x,t) = 0, \quad j = \overline{1,2m}, \quad 0 < t < T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u(x,T) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$\int_0^T N(t)u(x,t)dt = 0, \quad x \in \Omega. \tag{4}$$

Нелокальная задача II: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются условия* (2), (4), *а также условия*

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{5}$$

Нелокальная задача III: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются условия* (2), (4), *а также условия*

$$u(x,0) = u_{tt}(x,T) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{6}$$

Нелокальная задача IV: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются условия* (2), (4), *а также условия*

$$u_t(x,0) = u(x,T) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{7}$$

Нелокальная задача V: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются условия* (2), (4), *а также условия*

$$u_t(x,0) = u_{tt}(x,T) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{8}$$

Обозначим через H_0 множество функций

$$H_0 = \{w(x) : w(x) \in W_2^{2m}(\Omega), A_j w(x) = 0, j = \overline{1,2m}\}.$$

Ниже нам понадобится следующее условие:

Условие (A): *система граничных операторов $\{A_j\}$, $j = \overline{1,2m}$ такова, что дифференциальный оператор $(-1)^{m+1}\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$ с областью определения H_0 обладает полной ортонормированной в пространстве $L_2(\Omega)$ системой собственных функций $\{w_k(x)\}$, $k = \overline{1,\infty}$ с соответсвующими собственными числами λ_k, причем все эти числа отрицательны и упорядочены по убыванию.*

Выполним некоторые формальные выкладки.

Для решения $u(x,t)$ нелокальной задачи I обозначим через $\varphi_1(x)$ функцию $u_t(x,0)$. Полагая, что эта функция принадлежит множеству H_0, представим ее рядом Фурье:

$$\varphi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{1k} w_k(x).$$

Далее, определим функцию $v_1(x,t)$ как решение задачи

$$Lv_1 = f(x,t), \quad x \in \Omega,$$

$$A_j v_1(x,t) = 0, \quad j = \overline{1,2m}, \quad 0 < t < T,$$

$$v_1(x,0) = v_{1t}(x,0) = v_1(x,T) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Заметим, что если функция $f(x,t)$ принадлежит пространству $L_2(Q)$, то функция $v_1(x,t)$ будет определена корректно и будет принадлежать пространству $W_2^{2m,3}(Q)$ (см. [30,31]; нетрудно провести и непосредственное доказательство существования функции $v_1(x,t)$, используя метод Фурье).

Определим функцию $V_1(x,t)$:

$$V_1(x,t) = (t - \frac{t^2}{T})\varphi_1(x).$$

Решение $u(x,t)$ нелокальной задачи I будем искать в виде

$$u(x,t) = v_1(x,t) + V_1(x,t) + W_1(x,t); \tag{9}$$

функция $W_1(x,t)$ здесь должна быть решением задачи

$$LW_1 = (-1)^m \frac{\partial^{2m} V_1(x,t)}{\partial x^{2m}},$$

$$A_j W_1(x,t) = 0, \quad j = \overline{1,2m}, \quad 0 < t < T,$$

$$W_1(x,0) = W_{1t}(x,0) = W_1(x,T) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Определим функцию $W_1(x,t)$ рядом Фурье:

$$W_1(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{1k}(t) w_k(x),$$

функции $c_{1k}(t)$ здесь представляют собой решение задачи

$$\begin{array}{l} c_{1k}'''(t) + \lambda_k c_{1k}(t) = -(t - \frac{t^2}{T})\lambda_k a_{1k}, \\ c_{1k}(0) = c_{1k}'(0) = c_{1k}(T) = 0, \\ (k \in \mathbb{N}). \end{array}$$

Положим $\gamma_k = \sqrt[3]{|\lambda_k|}$, $k = 1, 2, ..., \gamma_k > 0$.

Искомые функции $c_{1k}(t)$ имеют вид

$$c_{1k}(t) = \left[C_{11,k} e^{\gamma_k t} + C_{12,k} e^{-\frac{\gamma_k t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k t + C_{13,k} e^{-\frac{\gamma_k t}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k t - (t - \frac{t^2}{T}) \right] a_{1k},$$

$$C_{11,k} = \frac{-2e^{-\frac{\gamma_k T}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T}{\sqrt{3}\gamma_k (e^{\gamma_k T} - e^{-\frac{\gamma_k T}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T - \sqrt{3} e^{-\frac{\gamma_k T}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T)},$$

$$C_{12,k} = \frac{2e^{-\frac{\gamma_k T}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T}{\sqrt{3}\gamma_k (e^{\gamma_k T} - e^{-\frac{\gamma_k T}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T - \sqrt{3} e^{-\frac{\gamma_k T}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T)},$$

$$C_{13,k} = \frac{2(e^{\gamma_k T} - e^{-\frac{\gamma_k T}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T)}{\sqrt{3}\gamma_k (e^{\gamma_k T} - e^{-\frac{\gamma_k T}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T - \sqrt{3} e^{-\frac{\gamma_k T}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T)}.$$

Условие (4) означает, что выполняется равенство

$$\int_0^T N(t) v_1(x,t) dt + \int_0^T (t - \frac{t^2}{T}) N(t) \varphi_1(x) dt + \int_0^T N(t) W_1(x,t) dt = 0. \tag{10}$$

Введем обозначения:

$$\psi_1(x) = -\int_0^T N(t) v_1(x,t) dt,$$

$$d_{1k} = C_{11,k} \int_0^T e^{\gamma_k t} N(t) dt + C_{12,k} \int_0^T e^{-\frac{\gamma_k t}{2}} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k t) N(t) dt$$
$$+ C_{13,k} \int_0^T e^{-\frac{\gamma_k t}{2}} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k t) N(t) dt, \quad k \in \mathbb{N}.$$

С учетом этих обозначений и с учетом вида функции $W_1(x,t)$ равенство (10) нетрудно преобразовать к виду

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{1k} d_{1k} w_k(x) = \psi_1(x). \tag{11}$$

Представим $\psi_1(x)$ рядом Фурье:

$$\psi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{1k} w_k(x).$$

Вследствие линейной независимости функций $w_k(x)$ равенство (11) дает алгебраические соотношения

$$a_{1k} d_{1k} = b_{1k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Предполагая, что $d_{1k} \neq 0, k \in \mathbb{N}$, находим числа a_{1k}, тем самым определяем функцию $\varphi_1(x)$ и далее – функцию $u(x,t)$.

Выполненные формальные выкладки позволяют получить точные результаты.

Теорема 1. *Пусть выполняются условие (A), а также условия*

$$f(x,t) \in L_2(Q), \quad N(t) \in C([0,T]); \tag{12}$$

$$d_{1k} \neq 0, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{13}$$

ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2 b_{1k}^2}{d_{1k}^2} \tag{14}$$

сходится. Тогда нелокальная задача I имеет решение, принадлежащее пространству $W_2^{2m,3}(Q)$.

Доказательство. Как уже говорилось выше, при выполнении условия (12) функция $v_1(x,t)$ определена корректно и принадлежит пространству $W_2^{2m,3}(Q)$. Далее, из условий (13) и (14) следует, что функция $\varphi_1(x)$ также определена корректно и является элементом пространства H_0. Очевидно теперь, что в уравнении для функции $W_1(x,t)$ правая часть принадлежит пространству $L_2(Q)$. Но тогда и функция $W_1(x,t)$ будет принадлежать пространству $W_2^{2m,3}(Q)$. Следовательно, функция $u(x,t)$, определенная равенством (9), будет определена корректно и будет принадлежать пространству $W_2^{2m,3}(Q)$. Выполнение для функции $u(x,t)$ уравнения (1) и условий (2)–(4) очевидно. $\square$

Теорема 2. *Пусть существует такое число k_0, что $d_{1k_0} = 0$, $b_{1k_0} = 0$. Тогда нелокальная задача I имеет бесконечно много решений в пространстве $W_2^{2m,3}(Q)$.*

Если же $d_{1k_0} = 0$, $b_{1k_0} \neq 0$, то нелокальная задача I не имеет решений в пространстве $W_2^{2m,3}(Q)$.

Доказательство. В случае $d_{1k_0} = b_{1k_0} = 0$ число a_{1k_0} может быть произвольным. Отсюда следует, что функций $\varphi_1(x)$ будет бесконечно много. Но тогда и решений нелокальной задачи I будет бесконечно много.

Пусть для некоторого натурального числа k_0 выполняется $d_{1k_0} = 0$, $b_{1k_0} \neq 0$. Предположим, что существует решение $u(x,t)$ нелокальной задачи I, принадлежащее пространству $W_2^{2m,3}(Q)$. Представляя это решение в виде (9), и представляя далее функции $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$, $W_1(x,t)$ соответствующими рядами Фурье, получим, что необходимо для всех натуральных чисел k должно выполняться равенство $a_{1k}d_{1k} = b_{1k}$. А это равенство при $k = k_0$ не выполняется. Полученное противоречие означает, что предположение о разрешимости нелокальной задачи I не верно. $\square$

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих теоремы 1 и 2.

Пусть $N(t) \equiv 1$. Тогда числа d_{1k} имеют вид

$$d_{1k} = \frac{e^{\gamma_k T} + e^{-\gamma_k T} - (e^{\frac{\gamma_k T}{2}} + e^{-\frac{\gamma_k T}{2}}) \cos \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T + \sqrt{3}(e^{\frac{\gamma_k T}{2}} + e^{-\frac{\gamma_k T}{2}}) \sin \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T}{\gamma_k^2 (e^{\gamma_k T} - e^{-\frac{\gamma_k T}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T - \sqrt{3} e^{-\frac{\gamma_k T}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T)}.$$

Справедливо равенство

$$d_{1k} = \frac{1 + a_k}{\gamma_k^2 (1 + b_k)},$$

и при этом выполняется $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = 0$. Отсюда, в частности, следует, что сходимость ряда (14) эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{\frac{10}{3}} b_{1k}^2.$$

Если теперь вспомнить, что числа b_{1k} связаны с коэффициентами Фурье функции $f(x,t)$, то нетрудно увидеть, что сходимость последнего ряда имеет место при достаточно быстром убывании коэффициентов Фурье функции $f(x,t)$.

Пусть теперь $N(t)\equiv t$. Числа d_{1k} имеют вид

$$d_{1k} = \frac{1}{\gamma_k^3(e^{\gamma_k T} - e^{-\frac{\gamma_k T}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T - \sqrt{3}e^{-\frac{\gamma_k T}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T)}\Big(e^{\gamma_k T} + (1+\gamma_k T)e^{-\gamma_k T}$$
$$- [(1+\gamma_k T)e^{\frac{\gamma_k T}{2}} + e^{-\frac{\gamma_k T}{2}}]\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T + \sqrt{3}[(1-\gamma_k T)e^{\frac{\gamma_k T}{2}} - e^{-\frac{\gamma_k T}{2}}]\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T\Big),$$

для них справедливо представление

$$d_{1k} = \frac{1+a_k}{\gamma_k^3(1+b_k)},$$

и вновь выполняются равенства $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = 0$. Отсюда вновь получаем, что выполнение условия (14) можно обеспечить условиями быстрого убывания коэффициентов Фурье функции $f(x,t)$.

Аналогичные рассуждения можно провести и в случае $N(t)=t^m$, $m\in N$, $N(t)=e^{\alpha t}$.

Пусть теперь число T таково, что для некоторого натурального числа k_0 выполняется

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{3}\gamma_{k_0}},$$

и пусть $N(t)$ есть функция $\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_{k_0}t$. Тогда $d_{1k_0}=0$, в случае $f(x,t)\equiv 0$ нелокальная задача I будет иметь бесконечно много решений, в случае же ненулевой функции $f(x,t)$ у нелокальной задачи I решений может не быть.

Перейдем к изучению разрешимости нелокальной задачи II.

Для решения $u(x,t)$ нелокальной задачи II обозначим через $\varphi_{21}(x)$ функцию $u(x,T)$. Полагая, что эта функция принадлежит множеству H_0, представим ее рядом Фурье:

$$\varphi_{21}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{21,k} w_k(x).$$

Далее, определим функцию $v_{21}(x,t)$ как решение задачи

$$Lv_{21} = f(x,t), \quad x\in\Omega,$$
$$A_j v_{21}(x,t) = 0, \quad j=\overline{1,2m}, \quad 0<t<T,$$
$$v_{21}(x,0) = v_{21t}(x,0) = v_{21}(x,T) = 0, \quad x\in\Omega.$$

При принадлежности функции $f(x,t)$ пространству $L_2(Q)$ функция $v_{21}(x,t)$ будет определена корректно и будет принадлежать пространству $W_2^{2m,3}(Q)$.

Определим функцию $V_{21}(x,t)$:

$$V_{21}(x,t) = \frac{t^2}{T^2}\varphi_{21}(x).$$

Решение $u(x,t)$ нелокальной задачи II будем искать в виде

$$u(x,t) = v_{21}(x,t) + V_{21}(x,t) + W_{21}(x,t);$$

функция $W_{21}(x,t)$ здесь должна быть решением задачи

$$LW_{21} = (-1)^m \frac{\partial^{2m} V_{21}(x,t)}{\partial x^{2m}},$$
$$A_j W_{21}(x,t) = 0, \quad j = \overline{1,2m}, \quad 0 < t < T,$$
$$W_{21}(x,0) = W_{21t}(x,0) = W_{21}(x,T) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Определим функцию $W_{21}(x,t)$ рядом Фурье:

$$W_{21}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{21,k}(t) w_k(x),$$

функции $c_{21,k}(t)$ здесь представляют собой решение задачи

$$\begin{array}{l} c'''_{21,k}(t) + \lambda_k c_{21,k}(t) = -\frac{t^2}{T^2}\lambda_k a_{21,k}, \\ c_{21,k}(0) = c'_{21,k}(0) = c_{21,k}(T) = 0, \\ (k = 1,2,...). \end{array}$$

Искомые функции $c_{21,k}(t)$ имеют вид

$$c_{21,k}(t)$$
$$= \left[C_{21,1,k} e^{\gamma_k t} + C_{21,2,k} e^{-\frac{\gamma_k t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k t + C_{21,3,k} e^{-\frac{\gamma_k t}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k t - \frac{t^2}{T^2} \right] a_{21,k},$$

$$C_{21,1,k} = \frac{1}{e^{\gamma_k T} - e^{-\frac{\gamma_k T}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T - \sqrt{3} e^{-\frac{\gamma_k T}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T},$$
$$C_{21,2,k} = \frac{-1}{e^{\gamma_k T} - e^{-\frac{\gamma_k T}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T - \sqrt{3} e^{-\frac{\gamma_k T}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T},$$
$$C_{21,3,k} = \frac{-\sqrt{3}}{e^{\gamma_k T} - e^{-\frac{\gamma_k T}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T - \sqrt{3} e^{-\frac{\gamma_k T}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T}.$$

Условие (4) означает, что выполняется равенство

$$\int_0^T N(t) v_{21}(x,t)\,dt + \frac{1}{T^2}\int_0^T t^2 N(t)\varphi_{21}(x)\,dt + \int_0^T N(t) W_{21}(x,t)\,dt = 0. \qquad (15)$$

Введем обозначения:

$$\psi_{21}(x) = -\int_0^T N(t) v_{21}(x,t)\,dt,$$

$$d_{21,k} = C_{21,1,k}\int_0^T e^{\gamma_k t} N(t)\,dt + C_{21,2,k}\int_0^T e^{-\frac{\gamma_k t}{2}} \cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k t) N(t)\,dt$$
$$+ C_{21,3,k}\int_0^T e^{-\frac{\gamma_k t}{2}} \sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k t) N(t)\,dt, \quad k = 1,2,...$$

С учетом этих обозначений и с учетом вида функции $W_{21}(x,t)$ равенство (15) нетрудно преобразовать к виду

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{21,k} d_{21,k} w_k(x) = \psi_{21}(x). \qquad (16)$$

Представим $\psi_{21}(x)$ рядом Фурье:

$$\psi_{21}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{21,k} w_k(x).$$

Вследствие линейной независимости функций $w_k(x)$ равенство (16) дает алгебраические соотношения

$$a_{21,k} d_{21,k} = b_{21,k}, k \in \mathbb{N}.$$

Предполагая, что $d_{21,k} \neq 0, k \in \mathbb{N}$, находим числа $a_{21,k}$, тем самым определяем функцию $\varphi_{21}(x)$ и далее – функцию $u(x,t)$.

Теорема 3. *Пусть выполняются условие (A), а также условия*

$$f(x,t) \in L_2(Q), \quad N(t) \in C([0,T]);$$
$$d_{21,k} \neq 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2 b_{21,k}^2}{d_{21,k}^2}$$

сходится. Тогда нелокальная задача II имеет решение, принадлежащее пространству $W_2^{2m,3}(Q)$.

Теорема 4. *Пусть существует такое число k_0, что $d_{21,k_0} = 0$, $b_{21,k_0} = 0$, $d_{21,k} \neq 0$ при $k \neq k_0$. Тогда нелокальная задача II имеет бесконечно много решений в пространстве $W_2^{2m,3}(Q)$.*

Если же $d_{21,k_0} = 0$, $b_{21,k_0} \neq 0$, то нелокальная задача II не имеет решений в пространстве $W_2^{2m,3}(Q)$.

Приведем еще один вариант исследования разрешимости нелокальной задачи II.

Для решения $u(x,t)$ нелокальной задачи II обозначим через $\varphi_{22}(x)$ функцию $u_{tt}(x,T)$. Вновь представим ее рядом Фурье:

$$\varphi_{22}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{22,k} w_k(x).$$

Далее, определим функцию $v_{22}(x,t)$ как решение задачи

$$Lv_{22} = f(x,t), \quad x \in \Omega,$$
$$A_j v_{22}(x,t) = 0, \quad j = \overline{1,2m}, \quad 0 < t < T,$$
$$v_{22}(x,0) = v_{22t}(x,0) = v_{22tt}(x,T) = 0, \quad x \in \Omega.$$

При принадлежности функции $f(x,t)$ пространству $L_2(Q)$, функция $v_{22}(x,t)$ будет определена корректно и будет принадлежать пространству $W_2^{2m,3}(Q)$.

Обозначим

$$C_{22,1,k} = \frac{1}{\gamma_k^2(e^{\gamma_k T} + 2e^{-\frac{\gamma_k T}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T)},$$
$$C_{22,2,k} = \frac{-1}{\gamma_k^2(e^{\gamma_k T} + 2e^{-\frac{\gamma_k T}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T)},$$
$$C_{22,3,k} = \frac{-\sqrt{3}}{\gamma_k^2(e^{\gamma_k T} + 2e^{-\frac{\gamma_k T}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T)},$$

$$\psi_{22}(x) = -\int\limits_0^T N(t)v_{22}(x,t)dt,$$

$$d_{22,k} = C_{22,1,k}\int\limits_0^T e^{\gamma_k t}N(t)dt + C_{22,2,k}\int\limits_0^T e^{-\frac{\gamma_k t}{2}}\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k t)N(t)dt$$
$$+C_{22,3,k}\int\limits_0^T e^{-\frac{\gamma_k t}{2}}\sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k t)N(t)dt, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Представим функцию $\psi_{22}(x)$ рядом Фурье:

$$\psi_{22}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{22,k}w_k(x).$$

Теорема 5. *Пусть выполняются условие (A), а также условия*

$$f(x,t) \in L_2(Q), \quad N(t) \in C([0,T]);$$
$$d_{22,k} \neq 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2 b_{22,k}^2}{d_{22,k}^2}$$

сходится.

Тогда нелокальная задача II имеет решение, принадлежащее пространству $W_2^{2m,3}(Q)$.

Теорема 6. *Пусть существует такое число k_0, что $d_{22,k_0} = 0$, $b_{22,k_0} = 0$, $d_{22,k} \neq 0$ при $k \neq k_0$. Тогда нелокальная задача II имеет бесконечно много решений в пространстве $W_2^{2m,3}(Q)$.*

Если же $d_{22,k_0} = 0$, $b_{22,k_0} \neq 0$, то нелокальная задача II не имеет решений в пространстве $W_2^{2m,3}(Q)$.

Теоремы 3 и 5, 4 и 6 очевидным образом связаны друг с другом. Например, если выполняется $d_{21,k} \neq 0$ для всех k, то будет выполняться $d_{22,k} \neq 0$ для всех k, и наоборот, если существует натуральное число k_0 такое что $d_{21,k_0} = 0$, то найдется натуральное число k_1 такое, что выполняется $d_{22,k_1} = 0$, и наоборот.

Обратимся теперь к нелокальной задаче III.

Для решения $u(x,t)$ нелокальной задачи III обозначим через $\varphi_3(x)$ функцию $u_t(x,0)$. Полагая, что эта функция принадлежит множеству H_0, представим ее рядом Фурье:

$$\varphi_3(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{3k}w_k(x).$$

Далее, определим функцию $v_3(x,t)$ как решение задачи

$$Lv_3 = f(x,t), \quad x \in \Omega,$$
$$A_j v_3(x,t) = 0, \quad j = \overline{1,2m}, \quad 0 < t < T,$$
$$v_3(x,0) = v_{3t}(x,0) = v_{3tt}(x,T) = 0, \quad x \in \Omega.$$

При принадлежности функции $f(x,t)$ пространству $L_2(Q)$, функция $v_3(x,t)$ будет определена корректно и будет принадлежать пространству $W_2^{2m,3}(Q)$.

Введем обозначения:

$$C_{31,k}=\frac{e^{-\frac{\gamma_k T}{2}}(\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T+\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T)}{\sqrt{3}\gamma_k(e^{\gamma_k T}+2e^{-\frac{\gamma_k T}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T)},$$

$$C_{32,k}=\frac{-e^{-\frac{\gamma_k T}{2}}(\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T+\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T)}{\sqrt{3}\gamma_k(e^{\gamma_k T}+2e^{-\frac{\gamma_k T}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T)},$$

$$C_{33,k}=\frac{2e^{\gamma_k T}+e^{-\frac{\gamma_k T}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T-\sqrt{3}e^{-\frac{\gamma_k T}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T}{\sqrt{3}\gamma_k(e^{\gamma_k T}+2e^{-\frac{\gamma_k T}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T)},$$

$$\psi_3(x)=-\int\limits_0^T N(t)v_3(x,t)dt,$$

$$d_{3k}=C_{31,k}\int\limits_0^T e^{\gamma_k t}N(t)dt+C_{32,k}\int\limits_0^T e^{-\frac{\gamma_k t}{2}}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k t)N(t)dt$$
$$+C_{33,k}\int\limits_0^T e^{-\frac{\gamma_k t}{2}}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k t)N(t)dt,\quad k\in\mathbb{N}.$$

Представим $\psi_3(x)$ рядом Фурье:

$$\psi_3(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_{3k}w_k(x).$$

Теорема 7. *Пусть выполняются условие (A), а также условия*

$$f(x,t)\in L_2(Q),\quad N(t)\in C([0,T]);$$
$$d_{3k}\neq 0,\quad k\in\mathbb{N},$$

ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k^2 b_{3k}^2}{d_{3k}^2}$$

сходится.

Тогда нелокальная задача III имеет решение, принадлежащее пространству $W_2^{2m,3}(Q)$.

Теорема 8. *Пусть существует такое число k_0, что $d_{3k_0}=0$, $b_{3k_0}=0$, $d_{3k}\neq 0$ при $k\neq k_0$. Тогда нелокальная задача III имеет бесконечно много решений в пространстве $W_2^{2m,3}(Q)$.*

Если же $d_{3k_0}=0$, $b_{3k_0}\neq 0$, то нелокальная задача III не имеет решений в пространстве $W_2^{2m,3}(Q)$.

Разрешимость нелокальной задачи IV.

Для решения $u(x,t)$ нелокальной задачи IV обозначим через $\varphi_4(x)$ функцию $u(x,0)$. Вновь представим ее рядом Фурье:

$$\varphi_4(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{4k}w_k(x).$$

Определим функцию $v_4(x,t)$ как решение задачи

$$Lv_4=f(x,t),\quad x\in\Omega,$$
$$A_jv_4(x,t)=0,\quad j=\overline{1,2m},\quad 0<t<T,$$

$$v_4(x,0) = v_{4t}(x,0) = v_4(x,T) = 0, \quad x \in \Omega.$$

При принадлежности функции $f(x,t)$ пространству $L_2(Q)$, функция $v_4(x,t)$ будет определена корректно и будет принадлежать пространству $W_2^{2m,3}(Q)$.

Введем обозначения:

$$C_{41,k} = \frac{\sqrt{3}e^{-\frac{\gamma_k T}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T + e^{-\frac{\gamma_k T}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T}{\sqrt{3}(-e^{\gamma_k T} + e^{-\frac{\gamma_k T}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T + \sqrt{3}e^{-\frac{\gamma_k T}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T)},$$

$$C_{42,k} = \frac{-\sqrt{3}e^{\gamma_k T} + 2e^{-\frac{\gamma_k T}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T}{\sqrt{3}(-e^{\gamma_k T} + e^{-\frac{\gamma_k T}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T + \sqrt{3}e^{-\frac{\gamma_k T}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T)},$$

$$C_{43,k} = \frac{-e^{\gamma_k T} - 2e^{-\frac{\gamma_k T}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T}{\sqrt{3}(-e^{\gamma_k T} + e^{-\frac{\gamma_k T}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T + \sqrt{3}e^{-\frac{\gamma_k T}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T)},$$

$$\psi_4(x) = -\int\limits_0^T N(t)v_4(x,t)dt,$$

$$d_{4k} = C_{41,k}\int\limits_0^T e^{\gamma_k t}N(t)dt + C_{42,k}\int\limits_0^T e^{-\frac{\gamma_k t}{2}}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k t)N(t)dt +$$
$$+ C_{43,k}\int\limits_0^T e^{-\frac{\gamma_k t}{2}}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k t)N(t)dt, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Представим $\psi_4(x)$ рядом Фурье:

$$\psi_4(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{4k}w_k(x).$$

Теорема 9. *Пусть выполняются условие (A), а также условия*

$$f(x,t) \in L_2(Q), \quad N(t) \in C([0,T]);$$
$$d_{4k} \neq 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k^2 b_{4k}^2}{d_{4k}^2}$$

сходится.

Тогда нелокальная задача IV имеет решение, принадлежащее пространству $W_2^{2m,3}(Q)$.

Теорема 10. *Пусть существует такое число k_0, что $d_{4k_0} = 0$, $b_{4k_0} = 0$, $d_{4k} \neq 0$ при $k \neq k_0$. Тогда нелокальная задача IV имеет бесконечно много решений в пространстве* $W_2^{2m,3}(Q)$.

Если же $d_{4k_0} = 0$, $b_{4k_0} \neq 0$, то нелокальная задача IV не имеет решений в пространстве $W_2^{2m,3}(Q)$.

Разрешимость нелокальной задачи V.

Для решения $u(x,t)$ нелокальной задачи V обозначим через $\varphi_5(x)$ функцию $u(x,0)$. Вновь представим ее рядом Фурье:

$$\varphi_5(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{5k}w_k(x).$$

Далее, определим функцию $v_5(x,t)$ как решение задачи

$$Lv_5 = f(x,t), \quad x \in \Omega,$$

$$A_j v_5(x,t) = 0, \quad j = \overline{1,2m}, \quad 0 < t < T,$$

$$v_5(x,0) = v_{5t}(x,0) = v_{5tt}(x,T) = 0, \quad x \in \Omega.$$

При принадлежности функции $f(x,t)$ пространству $L_2(Q)$, функция $v_5(x,t)$ будет определена корректно и будет принадлежать пространству $W_2^{2m,3}(Q)$.

Обозначим

$$C_{51,k} = \frac{\sqrt{3}e^{-\frac{\gamma_k T}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T - e^{-\frac{\gamma_k T}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T}{\sqrt{3}(e^{\gamma_k T} + 2e^{-\frac{\gamma_k T}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T)},$$

$$C_{52,k} = \frac{\sqrt{3}e^{\gamma_k T} + \sqrt{3}e^{-\frac{\gamma_k T}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T + e^{-\frac{\gamma_k T}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T}{\sqrt{3}(e^{\gamma_k T} + 2e^{-\frac{\gamma_k T}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T)},$$

$$C_{53,k} = \frac{e^{\gamma_k T} - e^{-\frac{\gamma_k T}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T + \sqrt{3}e^{-\frac{\gamma_k T}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T}{\sqrt{3}(e^{\gamma_k T} + 2e^{-\frac{\gamma_k T}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k T)},$$

$$\psi_5(x) = -\int_0^T N(t)v_5(x,t)dt,$$

$$d_{5k} = C_{51,k}\int_0^T e^{\gamma_k t}N(t)dt + C_{52,k}\int_0^T e^{-\frac{\gamma_k t}{2}}\cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k t)N(t)dt$$
$$+C_{53,k}\int_0^T e^{-\frac{\gamma_k t}{2}}\sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\gamma_k t)N(t)dt, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Представим $\psi_5(x)$ рядом Фурье:

$$\psi_5(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{5k}w_k(x).$$

Теорема 11. *Пусть выполняются условие (A), а также условия*

$$f(x,t) \in L_2(Q), \quad N(t) \in C([0,T]);$$

$$d_{5k} \neq 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2 b_{5k}^2}{d_{5k}^2}$$

сходится. Тогда нелокальная задача V имеет решение, принадлежащее пространству $W_2^{2m,3}(Q)$.

Теорема 12. *Пусть существует такое число k_0, что $d_{5k_0} = 0$, $b_{5k_0} = 0$, $d_{5k} \neq 0$ при $k \neq k_0$. Тогда нелокальная задача V имеет бесконечно много решений в пространстве* $W_2^{2m,3}(Q)$.

Если же $d_{5k_0} = 0$, $b_{5k_0} \neq 0$, то нелокальная задача V не имеет решений в пространстве $W_2^{2m,3}(Q)$.

Теоремы 3,5,7,9,11 доказываются вполне аналогично доказательству теоремы 1, теоремы 4,6,8,10,12 доказываются аналогично доказательству теоремы 2.

К теоремам 3-12 также нетрудно привести примеры, их иллюстрирующие; эти примеры строятся вполне аналогично примерам к теоремам 1 и 2.

3. Комментарии и обобщения

1. Представленные выше результаты очевидным образом переносятся на многомерный случай, на случай пространственного оператора с переменными коэффициентами при выполнении условия существования полной ортонормированности системы собственных функций (т.е. при выполнении условия (A)). Нетрудно их перенести и на некоторые уравнения соболевского типа - например, на уравнение

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3}(u + \alpha\Delta u) + \beta\Delta u = f(x,t)$$

и на другие подобные уравнения.

2. Нелокальное условие (4) во всех задачах можно заменить условием вида

$$\int_0^T (\Phi u)(x,t)dt = 0$$

с оператором Φ, являющимся интегральным оператором Фредгольма

$$(\Phi u)(x,t) = \int_0^T N(t,\tau)u(x,\tau)d\tau$$

(условие (4) соответсвует оператору Φ, являющемуся оператором умножения). Можно предложить и другие примеры операторов Φ, позволяющих применить используемую в настоящей работе технику.

3. В целом аналогично, но с более громоздкими выкладками, можно провести исследование разрешимости нелокальных задач для уравнения (1) с заданием одного локального условия при $t = 0$ или при $t = T$ и двух интегральных условий

$$\int_0^T N_1(t)u(x,t)dt = 0, \quad \int_0^T N_2(t)u(x,t)dt = 0$$

(с линейно независимыми функциями $N_1(t)$ и $N_2(t)$), с заданием трех интегральных условий. Как и в п. 2, операторы умножения здесь можно заменить интегральными операторами Фредгольма.

4. Полученные в теоремах 2,4,6,8,10 и 12 результаты о существовании бесконечного множества решений можно трактовать как результаты о том, что число 0 является собственным числом соотвествующих нелокальныз задач. Так же, как в [29], можно провести исследование разрешимости и собственно спектральных нелокальных задач - именно, задач

$$u_{ttt} + \Delta u = \mu u + f(x,t)$$

со спектральным параметром μ.

5. Во всех указанных выше уравнениях и задачах допускается зависимость ядер интегральных условий от пространственных переменных. Отличие состоит лишь в том, что вместо числовых рядов появятся функциональные. Далее, во всех случаях интегральные условия могут быть и неоднородными.

6. Наличие у оператора $(-1)^{m+1}\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$ нулевого собственного числа не меняет принципиально ситуацию, выкладки лишь незначительно изменятся.

References

[1] J.R. Cannon, *The solution of the Heat Equation Subject to the Specification of Energy*, Quart. Appl. Math., **21** (1963), 155–160.

[2] L.I. Kamynin, *A boundary value problem in the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition*, USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, **4**:6 (1964), 33–59.

[3] N. I. Ionkin, *The solution of a certain boundary-value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition*, Differ. Uravn., **13**:2 (1977), 294—304. Zbl 0349.35040

[4] A.K. Gushchin, V.P. Mikhailov, *On solvability of nonlocal problems for a second-order elliptic equation*, Russian Academy of Sciences. Sbornik Mathematics, **81**:1 (1995), 101—136. Zbl 0849.35025

[5] A. K. Gushchin, *A condition for the compactness of operators in a certain class and its application to the analysis of the solubility of non-local problems for elliptic equations*, Sb. Math., **193**:5 (2002), 649—668. Zbl 1085.35058

[6] A. Bouziani, *On a class a parabolic equations with a nonlocal boundary condition*, Bulletin de la Classe des Sciences. Academie Royale de Belgique, **X**:6 (1999), 61–77. Zbl 1194.35200

[7] A. Bouziani, *Strong solution for a mixed problem with nonlocal condition for certain pluriparabolic equation*, Hiroshima Mathematical Journal, **27**:3 (1997), 373–390. Zbl 0893.35061

[8] A.I. Kozhanov, *On the solvability of boundary value problems with nonlocal integral conditions for parabolic equations*, Nelineynyye granichnyye zadachi, Inst. prikladnoy matematiki i mekhaniki NAN Ukrainy, **20** (2009), 54–76.

[9] A.I. Kozhanov, L.S. Pulkina, *On the solvability of some boundary value problems for linear hyperbolic equations*, Mathem. Journ., **9**:2(32) (2009), 78–92.

[10] L. S. Pulkina, *Some Problems with Nonclassical Conditions for Hyperbolic Equations*, Izdat. Samarsk. Univ., Samara, 2012.

[11] A.I. Kozhanov, N.S. Popov, *Solvability of nonlocal boundary value problems for pseudoparabolic equations*, Journal of Mathematical Sciences, **186**:3 (2012), 438-452.

[12] N.S. Popov, *On the solvability of boundary value problems for multidimensional pseudoparabolic equations with a nonlocal boundary condition of integral form*, Mat. Zametki YaGU, **19**:1 (2012), 82–95. Zbl 1274.35211

[13] A.M. Abdrakhmanov, A.I. Kozhanov, *A problem with a nonlocal boundary condition for one class of odd-order equations*, Russian Mathematics, **51**:5 (2007), 151–159. Zbl 1159.35321

[14] A.M. Abdrakhmanov, *Solvability of a boundary-value problem with an integral boundary condition of the second kind for equations of odd order*, Mathematical Notes, **88**:2 (2010), 151–159. Zbl 1254.35055

[15] G. A. Lukina, *Solvability of the space nonlocal boundary value problems for third order equations*, Mat. Zametki YaGU, **17**:1 (2010), 35–46. Zbl 1274.35053

[16] G. A. Lukina, *Boundary value problems with time integral conditions for third order equations*, Mat. Zametki YaGU, **17**:2 (2010), 75–97. Zbl 1274.35054

[17] A.I. Kozhanov, *On the solvability of spatially nonlocal problems with conditions of integral form for some classes of nonstationary equations*, Differential Equations, **51**:8 (2015), 1043–1050. Zbl 1332.35006

[18] A. A. Kerefov, *Nonlocal boundary value problems for parabolic equations*, Differential Equations, **15**:1 (1979), 52–54. Zbl 0421.35032

[19] J. Chabrowski, *On the nonlocal problem with a functional for parabolic equation*, Funkcial. Ekvac. Ser. Intern., **27** (1984), 101–123. Zbl 0568.35046

[20] V. V. Shelukhin, *A variational principle for linear evolution problems nonlocal in time*, Siberian Math. J., **34**:2 (1993), 369–384. Zbl 0835.34078

[21] V. V.Shelukhin, *A problem nonlocal in time for the equations of the dynamics of a barotropic ocean*, Siberian Math. J., **36**:3 (1995), 608–630. Zbl 0855.76089

[22] G. Lieberman, *Nonlocal problems for quasilinear parabolic equations*, Nonlinear Problems in Mathematical Physics and Related Topics International Mathematical Series, Novosibirsk, **1** (2002), 233—254. Zbl 1047.35066

[23] A.I. Kozhanov, *A time-nonlocal boundary value problem for linear parabolic equations*, Sibirsk. Zh. Industr. Mat., **7**:1 (2004), 51–60. Zbl 1049.35003

[24] M. V. Uvarova, *On some nonlocal boundary value problems for evolution equations*, Siberian Adv. in Math., **21**:3 (2011), 211—231.

[25] I. V. Tikhonov, *Uniqueness theorems for linear non-local problems for abstract differential equations*, Izv. Math., **67**:2 (2003), 333—363. Zbl 1073.34071

[26] I. V. Tikhonov, *Solvability of a problem with a nonlocal integral condition for a differential equation in a Banach space*, Differential Equations, **34**:6 (1998), 841—844. Zbl 1075.34522

[27] I. V. Tikhonov, *Nonlocal problem with a "periodical"integral condition for a differential equation in Banach space.* Integralnye preobrazovaniya i spetsialnye funktsii, **4**:1 (2004), 49–69.

[28] V. E. Fedorov, N. D. Ivanova, Yu. Yu. Fedorova, *On a time nonlocal problem for inhomogeneous evolution equations*, Siberian Math. J., **55**:4 (2014), 721—733. Zbl 1320.47044

[29] A. I. Kozhanov, *Solvability of Boundary Value Problems for Linear Parabolic Equations with an Integral Condition in a Time Variable*, Yakutian Math. journal, **21**:4 (2014), 15–25.

[30] Yu. A. Dubinskii, *Boundary value problems for elliptic-parabolic equations*, Izvestiya AN Arm. SSR. Math., **4**:3 (1969), 192—214.

[31] I. E. Egorov, V. E. Fedorov, *Higher-Order Nonclassical Equations of Mathematical Physics*,Vychisl. Tsentr Sibirsk. Otdel. Ros. Akad. Nauk, Novosibirsk, 1995.

Alexandr Ivanovich Kozhanov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
Novosibirsk State University,
ul. Pirogova, 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: `kozhanov@math.nsc.ru`

Galina Alexandrovna Lukina
Mirny Polytechnic Institute (branch) of Ammosov North-Eastern Federal University,
ul. Tikhonova, 5 korp. 1,
678170, Mirny, Russia
E-mail address: `lukina-g@mail.ru`