S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 467–477 (2016) УДК 512.554

DOI 10.17377/semi.2016.13.040 MSC 16R40,17D99

ГИПЕРЦЕНТРАЛЬНЫЕ АВТОМОРФИЗМЫ НИЛЬТРЕУГОЛЬНЫХ ПОДАЛГЕБР АЛГЕБР ШЕВАЛЛЕ

В.М. ЛЕВЧУК, А.В. ЛИТАВРИН

Abstract. Let $N\Phi(K)$ be the nil-triangular subalgebra of the Chevalley algebra over an associative commutative ring K with the identity associated with a root system Φ. (All elements $e_r \in \Phi^+$ of Chevalley basis give its basis.) We study automorphisms of the Lie ring $N\Phi(K)$; this problem is closely related to the modeltheoretic study of Lie rings $N\Phi(K)$. Our main theorem shows that the largest height of hypercentral automorphisms of $N\Phi(K)$ is bounded by a constant, except orthogonal cases B_n and D_n, when $2K \neq K$.

Keywords: Chevalley algebra, nil-triangular subalgebra, height of hypercentral automorphism.

1. Введение

Следуя [1], алгеброй Шевалле над ассоциативно-коммутативным кольцом K с единицей мы называем алгебру Ли над K с базисом Шевалле, сопоставленным [2, § 4.3] произвольной системе корней Φ. Элементы e_r ($r \in \Phi^+$) базиса Шевалле образуют базис подалгебры $N\Phi(K)$, называемой *нильтреугольной.* Для типа A_{n-1} она изоморфна алгебре Ли, ассоциированной с алгеброй $NT(n, K)$ нижних нильтреугольных $n \times n$ матриц над K, то есть с нулями на главной диагонали и над ней; присоединенная группа кольца $NT(n, K)$ изоморфна унитреугольной группе $UT(n, K)$.

Levchuk, V.M., Litavrin, A.V., Hypercentral automorphisms of nil-triangular subalgebras in Chevalley algebras.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 16-01-00707.

Поступила 26 февраля 2016 г., опубликована 7 июня 2016 г.

Автоморфизмы унипотентной подгруппы U в подгруппе Бореля группы лиева типа над полем K описали Дж. Гиббс [3] при $K = 2K = 3K$ и (решение проблемы (1.5) из обзора [4]) В. М. Левчук [5].

С теорией автоморфизмов и изоморфизмов линейных групп и колец тесно связаны теоретико-модельные исследования, восходящие к А.И. Мальцеву [6]. Их развивали А.В. Михалев, С.И. Бейдар, Е.И. Бунина для классических линейных групп ([7], [8]) и групп Шевалле над локальными кольцами [9]. Соответствие Мальцева на кольца $NT(n, K)$ над любым ассоциативным (не обязательно коммутативным) кольцом K с единицей перенес Видела [10], пользуясь описанием автоморфизмов из [11] (случаи полей K см. Роуз [12] и Велер [13]); усиление теоремы Видела см. [14]. Взаимосвязанное описание в [11], [15] автоморфизмов присоединенной группы кольца $NT(n, K)$ и ассоциированного кольца Ли позволило при коммутативных кольцах K также перенести на них соответствие Мальцева (О.В. Белеградек [16], В.М. Левчук и Е.В. Минакова [17]), а при некоммутативных кольцах K привело в [17] к обобщению для них соответствия Мальцева.

В 1990 г. Видела [18] переносил соответствие Мальцева на унипотентные подгруппы $U = U\Phi(K)$ групп Шевалле над полями K, пользуясь описанием Aut U из [3], то есть при $K = 2K = 3K$, см. также [19, Теорема 3.1]. Подробнее см. обзор [19]; там же отмечаются вопросы описания автоморфизмов и элементарных эквивалентностей колец Ли $N\Phi(K)$.

Автоморфизм группы или кольца Ли, тождественный по модулю центра, называют центральным. В [5] и [20] введено обобщение: *автоморфизм группы или кольца Ли R, являющийся внешним автоморфизмом по модулю $(m-1)$-го гиперцентра и единичным по модулю m-го гиперцентра, называют гиперцентральным высоты m или, кратко, гиперцентральным автоморфизмом, когда R не совпадает с m-м гиперцентром.*

При условии нильпотентности R с неединичным гиперцентральным автоморфизмом естественно определена функция χ наивысшей высоты гиперцентральных автоморфизмов; значением $\chi(R)$ в этом случае считаем наибольшее натуральное число m такое, что R не совпадает с m-м гиперцентром и обладает гиперцентральным автоморфизмом высоты m. Заметим, что все центральные автоморфизмы 2-ступенно нильпотентной группы $UT(3, Z)$ (Z – кольцо целых чисел) – внутренние и поэтому к ее гиперцентральным автоморфизмам можно отнести только единичный автоморфизм; в этом случае полагаем $\chi(R) = 0$.

Описание автоморфизмов алгебры Ли $N\Phi(K)$ на основе перенесения методов [3] устанавливаются в [21], когда в K элемент 2 обратимый или (тип D_n и E_n) его аннулятор $\mathcal{A}_2$ в K нулевой; высота гиперцентральных автоморфизмов в этих случаях < 3.

Задача описания автоморфизмов кольца Ли $N\Phi(K)$ ставилась также в [5] и там же решена для типа D_4. Ступень нильпотентности кольца Ли $N\Phi(K)$ ограничена числом Коксетера $h = h(\Phi)$ системы корней Φ, см. § 1. Поэтому для функции $\chi = \chi(\Phi, K)$ наивысшей высоты гиперцентральных автоморфизмов кольца Ли $N\Phi(K)$ имеем $\chi(\Phi, K) \leq h(\Phi) - 2$.

В силу основной теоремы из [5], гиперцентральные автоморфизмы унипотентной подгруппы U в любой группе лиева типа над полем K имеют высоту ≤ 5, причем наибольшая высота достигается при $char K = 2$.

Как показывают известные описания автоморфизмов колец Ли $N\Phi(K)$ типа A_n и C_n (В.М. Левчук [15] и А.В. Литаврин [22], соответственно), функция $\chi(\Phi, K)$ в этих случаях ограничена константой и, в частности, не зависит от ранга Φ.

Естественно возникает вопрос о наилучшей оценке функции $\chi(\Phi, K)$. Оказывается, для оставшихся классических типов — ортогональные типы B_n и D_n — функция $\chi(\Phi, K)$, вообще говоря, неограничена константой. Это показывает основная в статье

Теорема 1. *Функция $\chi(\Phi, K)$ наивысшей высоты гиперцентральных автоморфизмов кольца Ли $N\Phi(K)$ ограничена константой, кроме случаев:*

(1) $\chi(\Phi, K) = n - 1$, *если* $\mathcal{A}_2 = 0$, $2K \neq K$ *и* Φ *типа* B_n*;*

(2) $\chi(\Phi, K) = h(\Phi) - 2$, *если* $\mathcal{A}_2 \neq 0$, $2K \neq 0$ *и* Φ *типа* B_n *или* $\mathcal{A}_2 \neq 0$ *и* Φ *типа* D_n*;*

(3) $\chi(\Phi, K) = h(\Phi) - 4 = 2n - 4$, *если* $\mathcal{A}_2 \neq 0$, $2K = 0$ *и* Φ *типа* B_n.

Основная теорема доказывается в § 3. В § 2 приведены теоремы о группах автоморфизмов колец Ли $N\Phi(K)$ типа B_n и D_n и схема их доказательства. Для построения и описания автоморфизмов удается переносить методы из [5] исследования Aut U; представление Φ^+-матрицами алгебр Ли $N\Phi(K)$ классических типов дает наиболее простую запись структурных констант выбранного базиса (лемма 4).

2. Группы автоморфизмов колец Ли $N\Phi(K)$ типа B_n и D_n

Автоморфизм всякой алгебры определяется действием на базе. Алгебру Шевалле над ассоциативно-коммутативным кольцом K с единицей, ассоциированную с системой корней Φ, обозначаем через $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$. Структурные константы базы $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$ алгебры Ли $N\Phi(K)$ выявляет теорема Шевалле о базисе [2, § 4.2]:

$$[e_r, e_s] = 0 \;\; (r + s \notin \Phi), \quad [e_r, e_s] = N_{r,s} e_{r+s} \;\; (r + s \in \Phi^+),$$

где $N_{r,s}$ – целые числа с условием

$$1 \leq |N_{r,s}| \leq p(\Phi), \;\; p(\Phi) := max\{(r, r)/(s, s) |\; r, s \in \Phi\}.$$

Для классических типов имеем $N_{r,s} = \pm 1$, кроме случаев $N_{r,s} = \pm 2$ для типа B_n и C_n, когда r, s – короткие корни, а $r + s$ – длинный корень.

Известно, что дифференцирование ad.e_r : $y \to [y, e_r]$ комплексной алгебры Ли $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$ при любом $r \in \Phi$ есть нильпотентное преобразование, а $x_r(t) := \exp(t \cdot \mathrm{ad}.e_r)$ $(t \in C)$ – автоморфизм алгебры $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$ с обратимой матрицей преобразования над кольцом $Z[t]$ в базисе Шевалле и даже с определителем ± 1. Это позволяет перейти от алгебры $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$ к произвольной алгебре Шевалле $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ с автоморфизмами $x_r(t)$ $(t \in K, r \in \Phi)$, порождающими группу Шевалле, [2]. Корневые автоморфизмы $x_r(t)$ $(r \in \Phi^+, t \in K)$ индуцируют автоморфизмы подалгебры $N\Phi(K)$, порождающие *подгруппу ее внутренних автоморфизмов.*

Аналогично группам в произвольном кольце Ли R вводят нижний центральный ряд

$$R = \Gamma_1 \supseteq \Gamma_2 \supseteq \cdots \supseteq \Gamma_n \supseteq \cdots \;, \quad \Gamma_{n+1}(R) := [\Gamma_n(R), R] \;(n \geq 1),$$

и верхний центральный или гиперцентральный ряд

$$0 = Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \cdots , \quad Z_{i+1}(R) := \{g \in R \mid [g, R] \subseteq Z_i(R)\} \ \ (i \geq 0).$$

В частности, центр кольца Ли R и аннулятор $Ann(R) = \{x \in R \mid [x, R] = 0\}$ совпадают.

В алгебре $N\Phi(K)$ *стандартным центральным* называют ряд

$$L_1 \supset L_2 \supset \cdots \supset L_{h-1} \supset L_h = 0, \ L_i := \langle Ke_r | \ \ r \in \Phi^+, \ ht(r) \geq i\rangle \ (1 \leq i \leq h-1).$$

Как в [23] и [2], используем функцию высоты $ht(r)$ на корнях r системы Φ, максимальный корень ρ и число Кокстера $h := ht(\rho) + 1$. По аналогии с [5, Лемма 1] справедлива

Лемма 1. *Верхний, нижний и стандартный центральные ряды кольца Ли* $N\Phi(K)$ *при* $p(\Phi)!K = K$ *совпадают :* $\Gamma_i = L_i = Z_{h-i}$ $(1 \leq i \leq h)$.

Кольцо Ли $N\Phi(K)$ порождают множества Ke_r, $r \in \Phi^+$ (при $p(\Phi)!K = K$ даже Ke_r, $r \in \Pi(\Phi)$). Теорема Шевалле о базисе дает основные соотношения в терминах этих порождающих (помимо соотношений в кольце коэффициентов). Отсюда вытекает

Лемма 2. *Автоморфизм* ϕ *аддитивной группы кольца Ли* $N\Phi(K)$ *является его автоморфизмом тогда и только тогда, когда* ϕ *сохраняет основные соотношения:*

$$xe_r + ye_r = (x + y)e_r \quad (r \in \Phi^+, \ x, y \in K);$$

$$[xe_r, ye_s] = xyN_{r,s}e_{r+s} \ \ (r, s, r+s \in \Phi^+), \quad [xe_r, ye_s] = 0 \ \ (r, s \in \Phi^+, r+s \notin \Phi^+).$$

Если в евклидовом n-мерном пространстве V граф Кокстера системы Φ корней одной длины допускает симметрию порядка $m > 1$, то она определяет изометрию τ пространства V, индуцирующую подстановки $^-$ на Φ и на Φ^+, причем либо $m = 2$ и Φ типа A_n, D_n или E_6, либо $m = 3$ и Φ типа D_4. Согласно [2, Предложения 12.2.2, 12.2.3], *графовый автоморфизм* алгебры Шевалле $\mathcal{L}_{\mathcal{K}}$ и подалгебры $N\Phi(K)$ определяется по правилу $e_r \to \gamma_r e_{\bar{r}}$ $(r \in \Phi)$ для констант $\gamma_r = \pm 1$ $(r \in \Phi)$ с условием $\gamma_s = 1$ $(s \in \Pi(\Phi))$.

Как и в [2, § 7.1], *диагональный автоморфизм* алгебры Ли $N\Phi(K)$ сопоставляют каждому K-характеру решетки корней, то есть гомоморфизму подгруппы $< \Phi >$ аддитивной группы V^+ в мультипликативную группу K^* обратимых элементов кольца K. *Индуцированный кольцевой автоморфизм* $\widetilde{\theta} : xe_r \to x^\theta e_r$ $(r \in \Phi^+, \ x \in K)$ кольца Ли $N\Phi(K)$ сопоставляют любому автоморфизму θ основного кольца K коэффициентов.

Автоморфизмы кольца Ли $N\Phi(K)$, порождаемые кольцевыми, графовыми, диагональными, внутренними и центральными автоморфизмами, называют *стандартными.*

Укажем автоморфизмы с нестандартным действием по модулю Γ_2. Согласно [15, § 4],

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, K) \ : \ 2a_{11}a_{12} = 2a_{21}a_{22} = 0 \right\}$$

есть подгруппа группы $\mathrm{SL}(2, K)$. В системах корней Φ типа D_n можно выбрать симметрию $^{-}$ порядка 2 и пару простых симметричных корней r и $\bar{r}$, причем однозначно, кроме типа D_4. Как и в [15, § 4] для типа $A_3 = D_3$, любой матрице $A \in S$ соответствует автоморфизм

$$(1) \quad \widetilde{A}: \quad e_r \to a_{11}e_r + a_{12}e_{\bar{r}}, \quad e_{\bar{r}} \to a_{21}e_r + a_{22}e_{\bar{r}}, \quad e_s \to e_s \ (s \in \Pi(\Phi) \setminus \{r, \bar{r}\}),$$

характеризуемый действием на порождающих множествах Ke_s $(s \in \Pi(\Phi))$, и справедлива

Лемма 3. *Отображение* $^{\sim}: \ A \to \widetilde{A}$ $(A \in S)$ *есть изоморфизм подгруппы* S *в группу автоморфизмов алгебры Ли* $\mathrm{Aut}\ ND_n(K)$.

Ясно, что $S = \mathrm{SL}(2, K)$ при $2K = 0$. Когда K – кольцо Z_n классов вычетов целых чисел с четным $n > 2$, нестандартный по модулю Γ_2 автоморфизм $\widetilde{A}$ вида (1) получаем, например, при

$$A = \begin{pmatrix} 1 - n/2 & -n/2 \\ n/2 & 1 + n/2 \end{pmatrix} \in S \subseteq \mathrm{SL}(2, K).$$

Для построения и описания автоморфизмов колец Ли $N\Phi(K)$ удается переносить методы из [5] исследования $\mathrm{Aut}\ U$; там же унипотентная подгруппа $U = U\Phi(K)$ представлена присоединенной группой кольца Ли $N\Phi(K)$.

Группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}\ N\Phi(K)$ ранее была описана в [15] взаимосвязано с $\mathrm{Aut}\ U$ для типа A_n и в [5] для типа D_4. Далее нам потребуется представление из [5] алгебр $N\Phi(K)$ классического типа $\neq A_n$.

С учетом [23, Таблицы I – IV], корни системы Φ ранга n линейно выражаются через ортонормированный базис $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n$ евклидова пространства, и каждый корень $r \in \Phi^+$ в [5] записан в виде

$$r = p_{i,mj} := \varepsilon_i - m\varepsilon_j, \quad 1 \leq j < i \leq n, \ m \in \{0, -1, 1\}.$$

Сумма корней $p_{ij} + p_{kv}$ есть корень лишь когда $k = j$ или $v = i$ или $v = -j$. Полагая $e_r = e_{i,mj}$, произвольный элемент из $N\Phi(K)$ представляем суммой $\sum a_{iv}e_{iv}$ и Φ^+-матрицей $||a_{iv}||$ над K. В частности, B_n^+- матрица имеет вид

$$\begin{matrix} & & & a_{10} & & & \\ & & a_{2,-1} & a_{20} & a_{21} & & \\ & & & \dots & & & \\ a_{n,-n+1} & \dots & a_{n,-1} & a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn-1}. \end{matrix}$$

Отбрасывая нулевой столбец, получаем D_n^+-матрицу. В подалгебре $NC_n(K)$ базу дают элементы $e_{iv}, \ -i \leq v < i \leq n, \ v \neq 0$. Согласно [5, Лемма 2], верна

Лемма 4. *Знаки структурных констант базиса Шевалле можно выбрать так, что* $[e_{ij}, e_{jv}] = e_{iv}$ *и выполняются следующие равенства:*

$$\Phi = B_n, D_n : [e_{jv}, e_{i,-v}] = e_{i,-j} \quad (i > j > |v| > 0);$$

$$\Phi = C_n : [e_{jm}, e_{i,-m}] = [e_{im}, e_{j,-m}] = e_{i,-j} \quad (i > j > m \geq 1);$$

$$\Phi = B_n : [e_{i0}, e_{j0}] = 2e_{i,-j} \quad (i > j), \qquad \Phi = C_n : [e_{ij}, e_{i,-j}] = 2e_{i,-i} \quad (i > j \geq 1).$$

Автоморфизмы, не являющиеся стандартными, как правило, дают гиперцентральные автоморфизмы высоты > 1. Для классических типов A_n и C_n они описаны в [15] и [22].

Выделим такие автоморфизмы для ортогональных типов B_n и D_n. К порождающим множествам Ke_{ii-1} $(1 \le i \le n)$ кольца Ли $NB_n(K)$ при $2K \neq K$ следует добавить $Ke_{2,-1}$, с учетом леммы 4 и равенства $[Ke_{20}, Ke_{10}] = 2Ke_{2,-1}$.

Сопоставим в Aut $NB_n(K)$ каждому элементу $f \in K$ *полувнутренний* автоморфизм (при $f/2 \in K$ это внутренний автоморфизм $x_r(f/2)$, $r = p_{n0}$)

$$\alpha = ||a_{uv}|| \to \alpha + f \sum_{i=1}^{n-1} a_{i0} e_{n,-i} \tag{2}$$

и, по аналогии с [3], автоморфизм

$$\alpha = ||a_{uv}|| \to \alpha + f a_{n-1n-2} e_{n,-n+2}. \tag{3}$$

Каждому элементу $t \in \mathcal{A}_2$ сопоставляем гиперцентральные высоты ≤ 5 автоморфизмы:

$$\alpha = ||a_{uv}|| \to \alpha + t a_{n-1n-2} e_{n,-n+3}, \tag{4}$$

$$\alpha \to \alpha + t(a_{nn-1} e_{n-2,-n+3} + a_{nn-2} e_{n-1,-n+3} + a_{nn-3} e_{n-1,-n+2}), \tag{5}$$

$$\alpha \to \alpha + t a_{nn-1} e_{n-1,0}, \tag{6}$$

$$\alpha \to \alpha + t(a_{nn-1} e_{n-2,0} + a_{nn-2} e_{n-1,0}). \tag{7}$$

Соответствующие в [5] автоморфизмы группы $UB_n(K)$ имеют более жесткие ограничения на параметр t. С помощью леммы 2 получаем также автоморфизмы

$$\chi_{t,d} : \alpha \to \alpha + \sum_{k=2}^{n-1} a_{k,-1}(t e_{k0} + d e_{n,-k}) \qquad (t, d \in \mathcal{A}_2), \tag{8}$$

$$\zeta_{i,t} :\ \alpha = ||a_{uv}|| \to \alpha + t \sum_{k=i+1}^{n} a_{ki} e_{k,-i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-2, \tag{9}$$

аддитивные по t, d и t, соответственно. Сходный с (9) автоморфизм группы $UC_n(K)$ над совершенным полем K характеристики 2, изоморфной $UB_n(K)$, указан в [20]; он специфичен именно для типа B_n, принимая во внимание описание автоморфизмов из [22] и не изоморфность алгебр $NC_n(K)$ и $NB_n(K)$ [24].

Когда $c = 1+t \in 1+\mathcal{A}_2$ – обратимый элемент, находим еще *полудиагональный* автоморфизм

$$\delta_c :\ e_{kv} \to c e_{kv}\ (0 < -v < k \le n), \quad e_{kv} \to e_{kv}\ (0 \le v < k \le n).$$

Можно показать, что перечисленные автоморфизмы вместе со стандартными порождают группу автоморфизмов кольца Ли $NB_n(K)$. Пусть $V(B_n)$ — подгруппа автоморфизмов, которую порождают гиперцентральные автоморфизмы (2)–(8) и $\zeta_{i,t}$ при $2 \le i \le n-2,\ t \in \mathcal{A}_2$.

Теорема 2. *Всякий автоморфизм кольца Ли $NB_n(K)$ $(n > 4)$ есть произведение стандартного автоморфизма, гиперцентрального автоморфизма из $V(B_n)$ и подходящих автоморфизмов вида $\delta_c^{(-1)}$, $\zeta_{1,t}$.*

Описание автоморфизмов кольца Ли $ND_4(K)$ дано в [5, Ч. I, Теорема 8].

Алгебра Ли $ND_n(K)$, в силу леммы 4, представляется подалгеброй в $NB_n(K)$. При $n > 4$ она инвариантна относительно автоморфизмов (3) – (5), (9), ограничения которых порождают подгруппу автоморфизмов (далее ее обозначаем через $V(D_n)$) алгебры $ND_n(K)$. Отображение $t \to \zeta_{1,t}$ $(t \in \mathcal{A}_2)$, очевидно, есть изоморфизм группы $(\mathcal{A}_2, +)$ на пересечение $V(D_n) \cap \widetilde{S}$. Справедлива

Теорема 3. *Всякий автоморфизм кольца Ли $ND_n(K)$, $n \geq 5$, есть произведение стандартного автоморфизма на автоморфизм из $\widetilde{S} \cdot V(D_n)$.*

Исследование произвольного автоморфизма в доказательствах теорем 2 и 3 на первом этапе редуцируется к гиперцентральным автоморфизмам.

По аналогии с [5], используем идеал T_{im} всех Φ^+-матриц $||a_{uv}|| \in N\Phi(K)$ таких, что $a_{uv} = 0$ при $u < i$ или $v > m$, а также описание Aut $NA_n(K)$ [15, Теоремы 1 и 2]. Для кольца Ли $ND_n(K)$ $(n \geq 5)$ устанавливается характеристичность идеалов T_{iv} при $0 < |v| < i < n$, $v \neq -1$ и используются изоморфизмы $ND_n(K)/T_{21} \simeq NA_{n-2}(K) \simeq NT(n-1, K)$.

Будем говорить, что для автоморфизма ϕ выполняется некоторое свойство, с точностью до умножения на внутренний автоморфизм, если это свойство выполняется для произведения автоморфизма ϕ и подходящего внутреннего автоморфизма. Далее применяется

Лемма 5. *Если автоморфизм ϕ кольца Ли $ND_n(K)$, $n \geq 5$, тождественен по модулю $T_{3,-1}$, то, с точностью до умножения на внутренний автоморфизм, верны включения*

$$(xe_{2,-1})^\phi \in xe_{2,-1}+Z_1, \quad (xe_{ii-1})^\phi \in xe_{ii-1}+Ke_{i,-i+1}+Z_1 \ (2 \leq i \leq n-2, \ x \in K),$$

$$(xe_{n-1,n-2})^\phi \in xe_{n-1,n-2} + Ke_{n-1,-n+2} + T_{n,-n+3},$$

$$(xe_{nn-1})^\phi \in xe_{nn-1} + Z_1 + Ke_{n-2,-n+3}.$$

Доказательство. Исследуем образы $(xe_{ii-1})^\phi = ||x^{(i)}_{uv}||, \ 2 \leq i \leq n, \ x \in K$.

Для фиксированного $i < n$, в силу характеристичности идеала T_{ii-1}, получаем равенства $x^{(i)}_{u,v} = 0$ при всех $v < u < i$ и $x \in K$. С точностью до умножения ϕ на сопряжение элементом из $T_{2,-1}$, можно считать выполненными также равенства

(10) $$1^{(i)}_{i,-m} = 0 \ \ (1 \leq m < i-1, \ 2 \leq i \leq n); \quad 1^{(i)}_{n,-i} = 0 \ \ (2 \leq i < n-1).$$

Учитывая перестановочность образа $||x^{(i)}_{uv}||$ и e^ϕ_{j+1j} $(2 \leq i < j < n)$, получаем, что ненулевые элементы матрицы $||x^{(i)}_{uv}||$ лежат лишь в i -той и n - той строках.

Когда $2 \leq i \leq n-3$, имеем $x^{(i)}_{n,-m} = 0$ при всех $m \neq i, n-1$, поскольку элемент $(xe_{ii-1})^\phi$ перестановочен с элементами e^ϕ_{n-1m} $(1 \leq m \leq n-2, \ m \neq i)$. Из перестановочности xe_{n-2n-3} с элементами e_{n-1m} $(m = 1, 2, ..., n-3)$ получаем, что $x^{(i)}_{n,-m} = 0$ при $m \neq n-1, n-2$. Перестановочность xe_{n-1n-2} с элементами e_{ii-1} $(2 \leq i \leq n-3)$ дает $x^{(n-1)}_{n,-s} = 0, \ \ 0 < s < n-3$. Из перестановочности xe_{nn-1} с элементами e_{ii-1} $(2 \leq i \leq n-2)$ и $e_{3,1}$ получаем

$$(xe_{nn-1})^\phi \in xe_{nn-1} + T_{n-1,-n+2} + \sum_{s=3}^{n-2} Ke_{s,-s+1}.$$

При $2 \le i \le n-2,\ x, y \in K$ находим произведение

$$[(ye_{i+1i})^{\phi}, (xe_{ii-1})^{\phi}] = yxe_{i+1i-1} + \sum_{m=1}^{i-1} x^{(i)}_{i,-m} ye_{i+1,-m} \pm x^{(i)}_{n,-i} ye_{n,-i-1}$$
$$\pm y^{(i+1)}_{i+1,-i+1} xe_{i+1,-i} \pm xye^{(i+1)}_{n,-i+1} e_{n,-i}.$$

Его $(i+1, m)$ - координата равна $yx^{(i)}_{im}$ $(-i < m < 0)$, а $(n, -i-1)$ - координата равна $x^{(i)}_{n,-i} y$. Пользуясь симметричностью по $x, y \in K$, приходим к равенству $yx^{(i)}_{im} = xy^{(i)}_{im}$. Подстановка $x = 1$ и соотношения (10) дают $y^{(i)}_{im} = 0$ при $m \ne -i+1$; аналогично, при всех $y \in K$ находим $y^{(i)}_{n,-i} = 0$. Симметричность по x и y произведения $[(ye_{nn-1})^{\phi}, (xe_{n-1,n-2})^{\phi}]$ приводит к равенствам $x^{(n-1)}_{n-1,-m} = 0$ при $0 < m < n-2$. Таким образом,

$$(xe_{ii-1})^{\phi} \in xe_{ii-1} + Ke_{i,-i+1} + Ke_{n,n-1} \quad (2 \le i \le n-3,\ x \in K),$$
$$(xe_{n-1,n-2})^{\phi} \in xe_{n-1,n-2} + Ke_{n-1,-n+2} + T_{n,-n+3},$$
$$(xe_{nn-1})^{\phi} \in xe_{nn-1} + T_{n-1,-n+2} + \sum_{s=3}^{n-2} Ke_{s,-s+1}.$$

Покажем, что оценку образа $(xe_{nn-1})^{\phi}$ можно улучшить. Учитывая равенства

$$e^{\phi}_{i+1,i-1} = [e^{\phi}_{i+1,i}, e^{\phi}_{ii-1}] = e_{i+1,i-1} + 1^{(i)}_{i,-i+1} e_{i+1,-i+1} \quad (2 \le i \le n-3,\ n \ge 5),$$

получаем соотношения

$$0 = [(xe_{nn-1})^{\phi}, e^{\phi}_{31}] = x^{(n)}_{2,-1} e_{3,-2} \quad (i = 2,\ n \ge 5),$$
$$0 = [(xe_{nn-1})^{\phi}, e^{\phi}_{i+1,i-1}] = x^{(n)}_{i,-i+1} e_{i+1,-i} + x^{(n)}_{i-1,-i+2} e_{i+1,-i+2} \ (3 \le i \le n-3,\ n \ge 6).$$

Они дают равенства $x^{(n)}_{i,-i+1} = 0$ при $2 \le i \le n-3,\ n \ge 5$. Отсюда, получаем включение

$$(xe_{nn-1})^{\phi} \in xe_{nn-1} + Ke_{n-2,-n+3} + T_{n-1,-n+2}$$

и находим ϕ-образ e_{nn-2}:

$$(e_{nn-2})^{\phi} = [(e_{nn-1})^{\phi}, (e_{n-1,n-2})^{\phi}]$$
$$= e_{nn-2} + 1^{(n-1)}_{n-1,-n+2} e_{n,-n+2} - 1^{(n)}_{n-2,-n+3} e_{n-1,-n+3}.$$

Поэтому соотношения

$$0 = [(xe_{nn-1})^{\phi}, (e_{nn-2})^{\phi}] = x^{(n)}_{n-1,-n+2} e_{n,-n+1} - x^{(n)}_{n-2,-n+3} e_{n,-n+3}$$
$$-x1^{(n)}_{n-2,-n+3} e_{n,-n+3} = x^{(n)}_{n-1,-n+2} e_{n,-n+1} - (x^{(n)}_{n-2,-n+3} + x1^{(n)}_{n-2,-n+3}) e_{n,-n+3}$$

приводят к равенствам

$$x^{(n)}_{n-1,-n+2} = 0, \quad (x^{(n)}_{n-2,-n+3} + x1^{(n)}_{n-2,-n+3}) = 0 \quad (x \in K).$$

Элемент $(xe_{nn-2})^{\phi}$ имеет $(n, -n+1)$ -координату $x^{(n)}_{n,-n+2}$, поскольку

$$(xe_{nn-2})^{\phi} = [(xe_{nn-1})^{\phi}, (e_{n-1,n-2})^{\phi}] =$$
$$= xe_{nn-2} + 1^{(n-1)}_{n-1,-n+2} e_{n,-n+2} - x^{(n)}_{n,-n+2} e_{n,-n+1} - x^{(n)}_{n-2,-n+3} e_{n-1,-n+3}.$$

Учитывая равенство

$$[(xe_{nn-1})^{\phi}, (e_{n-1,n-2})^{\phi}] = [(e_{nn-1})^{\phi}, (xe_{n-1,n-2})^{\phi}] = (xe_{nn-2})^{\phi},$$

находим $x^{(n)}_{n,-n+2} = x1^{(n)}_{n,-n+2}$. Поскольку $1^{(n)}_{n,-n+2} = 0$, то получаем $x^{(n)}_{n,-n+2} = 0$ и

$$(xe_{nn-1})^{\phi} \in xe_{nn-1} + Z_1 + Ke_{n-2,-n+3} \quad (x \in K).$$

Учитывая перестановочность $xe_{2,-1}$ с элементами $e_{i,i-1}$ $(4 \le i \le n)$ и e_{21}, получаем включение $(xe_{2,-1})^{\phi} \in xe_{2,-1} + Z_1 + Ke_{n,-2}$. Полагая $(xe_{2,-1})^{\phi} = ||x^{(1)}_{uv}||$, с точностью до умножения ϕ на Ke_{n1}-сопряжение, имеем $1^{(1)}_{n,-2} = 0$. Симметричность по x, y элемента

$$(xye_{3,-1})^{\phi} = [(xe_{3,2})^{\phi}, (ye_{2,-1})^{\phi}] = xye_{3,-1} + xy^{(1)}_{n,-2}e_{n,-3} \quad (x, y \in K)$$

дает $x^{(1)}_{n,-2} = 1^{(1)}_{n,-2}x = 0$ при любом $x \in K$. Отсюда $(xe_{2,-1})^{\phi} \in xe_{2,-1} + Z_1$. $\square$

Наряду с идеалами Γ_j и Z_i, характеристическими являются их централизаторы. Центральные ряды кольца Ли $NB_n(K)$ при $2K \neq K$ строятся сложнее. Пусть $L^{[0}_i$ - подмодуль в L_i с базой $\{e_{uv} \mid 0 \le v < u \le n,\ u - v \ge i\}$ и $R_j := \sum_{i=j}^{n} Ke_{i0},\ 1 \le j \le n$. Используя лемму 4, получаем следующую лемму.

Лемма 6. *Центральные ряды кольца Ли $NB_n(K)$ записываются в виде:*

$$\Gamma_i = L^{[0}_i + L_{i+2} + 2L_i \ (1 < i \le n), \quad \Gamma_i = L_{i+2} + 2L_i \ (n < i \le 2n-3),$$
$$\Gamma_i = 2L_i \ (i \ge 2n-2);$$
$$Z_i = L_{2n-i} + \mathcal{A}_2 R_{n+1-i} \ (1 \le i \le n-2), \quad Z_{n-1} = L_{n+1} + \mathcal{A}_2 R_2 + \mathcal{A}_2 e_{n1},$$
$$Z_{n+i} = L_{n-i} + \mathcal{A}_2 R_1 + \mathcal{A}_2 L^{[0}_{n-i-2} \ (0 \le i \le n-3), \quad Z_{2n-2} = L_2 + \mathcal{A}_2 L_1.$$

3. Доказательство теоремы 1

Известная оценка $\chi(\Phi, K) < h(\Phi)$ дает числовую верхнюю границу $\chi(\Phi, K)$ для исключительных типов G_2, F_4, E_6, E_7 и E_8; здесь число Кокстера $h = h(\Phi)$ равно, соответственно, $6, 12, 12, 18$ и 30, [23, Таблицы V - IX]. Поэтому доказательство требуется лишь для классических типов A_n, B_n, C_n и D_n.

Подалгебра $N\Phi(K)$ типа A_{n-1} изоморфна алгебре Ли, ассоциированной с алгеброй $NT(n, K)$ нижних нильтреугольных $n \times n$ матриц над K (с нулями на главной диагонали и над ней). Известно, что унитреугольная группа $UT(n, K)$ изоморфна присоединенной группе кольца $NT(n, K)$. Группы автоморфизмов присоединенной группы и ассоциированного с $NT(n, K)$ кольца Ли (их пересечение дает группу автоморфизмов кольца $NT(n, K)$) над любым ассоциативным (не обязательно коммутативным) кольцом K с единицей взаимосвязано описаны в [11], [15]. Высота гиперцентральных автоморфизмов здесь ≤ 4 и поэтому $\chi(A_n, K) \le 4$, где $\chi(A_n, K)$ – значение функции $\chi(\Phi, K)$ для Φ типа A_n.

Полное описание автоморфизмов кольца Ли $N\Phi(K)$ симплектического типа дано в статье А. В. Литаврина [22] : *всякий автоморфизм кольца Ли $NC_n(K)$ при $n > 4$ есть произведение стандартного и гиперцентрального высоты ≤ 5 автоморфизмов, причем эта оценка высоты для типа C_n неулучшаема.* (См. также [25, § 2].)

Всякий гиперцентральный автоморфизм кольца Ли $ND_n(K)$ при $\mathcal{A}_2 = 0$ порождается, по теореме 3, центральными автоморфизмами и автоморфизмами вида (3) высоты 2. Если $\mathcal{A}_2 \neq 0$, то гиперцентральные автоморфизмы образуют подгруппу автоморфизмов $V(D_n)$ из теоремы 3 и поэтому здесь оценка $\chi(D_n, K) \leq h(\Phi) - 2 = 2n - 4$ неулучшаемая.

Для типа B_n $(n > 4)$ по теореме 2 аналогично получаем $\chi(B_n, K) = 2$ при $2K = K$. Если же $2K \neq K$, но $\mathcal{A}_2 = 0$, то гиперцентральные автоморфизмы наибольшей высоты $n - 1$ дают полувнутренние автоморфизмы.

По лемме 6, при $\mathcal{A}_2 \neq 0$ ступень нильпотентности кольца Ли $NB_n(K)$ также равна $h(\Phi)-2$, если $2K \neq 0$; здесь $\chi(B_n, K) = h(\Phi)-2 = 2n-2$. Наконец, когда $2K = 0$, ступень нильпотентности равна $h(\Phi)-4$ и $\chi(B_n, K) = h(\Phi)-4 = 2n-4$, по теореме 2.

Тем самым, доказательство теоремы 1 завершено. $\square$

References

[1] Hurley J. F. *Ideals in Chevalley algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., **137**:3 (1969), 245–258. Zbl 0177.05602

[2] Carter R., *Simple groups of Lie type*, New York: Wiley and Sons, 1972. Zbl 0248.20015

[3] Gibbs J., *Automorphisms of certain unipotent groups*, J. Algebra,**14**:2 (1970), 203–228. Zbl 0191.02001

[4] Kondratiev A. S., *Subgroups of finite Chevalley groups*, Uspekhi matem. nauk, **41**:1(247) (1986), 57–96.

[5] Levchuk V.M., *Automorphisms of unipotent subgroups of Chevalley groups*, Algebra and Logic, **29**:2 (1990), 97–112 (I), **29**:3, 211–224 (II). Zbl 0763.20017, Zbl 0721.20035

[6] Mal'cev A. I., *About one correspondence between rings and groups*, Math. Sbornik, **50** (1960), 257–266. Zbl 0100.01401

[7] Beidar C.I., Mikhalev A.V. *On Malcev's theorem on elementary equivalence of linear groups*, Contemporary Math., **131** (1992), 29–35. Zbl 0796.20037

[8] Bunina E. I., Mikhalev A. V. *Elementary properties of linear groups and related questions*, J. Math. Sciences., **123**:2 (2004), 3921–3985. Zbl 1077.20059

[9] Bunina E. I. *Elementary equivalence of Chevalley groups over local rings*, Math. sb., **201**:3 (2010), 3–20. Zbl 1201.20048

[10] Videla C. R., *On the model theory of the ring NT (n, R)*, J. of Pure and Appl. Algebra, **55** (1988), 289–302. Zbl 0658.03020

[11] Levchuk V.M., *Automorphisms of some nilpotent matrix groups and rings*, Soviet Math. Dokl., **16**:3 (1975), 756–760. Zbl 0347.20023

[12] Rose, B.I., *The χ_1-categoricity of strictly upper triangular matrix rings over algebraically closed fields* , J. Symbolic Logic, **43**:2 (1978), 250–259. Zbl 0385.03026

[13] Wheeler, W.H. *Model Theory of strictly upper triangular matrix ring* J. Symbolic Logic, **45** (1980), 455–463. Zbl 0471.03027

[14] Minakova E.V. *On the model theory of the rings of niltriangular matrices*, Journal SFU, Series Maths. and physics., **2** 2008, 221–227.

[15] Levchuk V.M., *Connections between the unitriangular group and certain rings. Part 2. Groups of automorphisms.*, Siberian Mat. J., **24**:4 (1983), 543–557. Zbl 0543.20029

[16] Belegradek O. V., *Model theory of unitriangular groups*, Amer. Math. Soc. Transl., **195**:2 (1999), 1–116. Zbl 0931.03053

[17] Levchuk V.M., Minakova E.V., *Elementary equivalence and isomorphisms of locally nilpotent matrix groups and rings*, Dokl. RAN, **425**:2 (2009), 165–168. Zbl 1176.16020

[18] Videla C. R., *On the Mal'cev correspondence*, Proceed. AMS., **109**:2 (1990), 493–502. Zbl 0713.20039

[19] Levchuk V.M., *Questions of theoretic-model and structural for algebras and Chevalley groups*, Mathem. Forum. Groups and Graphs.-Vladikavkaz: SMI VSC RAN, **6** (2011), 71–80.

[20] Levchuk V. M., *Chevalley groups and their unipotent subgroups*, Contemp. Math., AMS, **131** (1992), part 1, 227–242. Zbl 0824.20042

[21] Cao Y., Jiang D., Wang D., *Automorphisms of certain nilpotent algebras over commutative rings*, J. Algebra, **17**:3 (2007), 527–555. Zbl 1127.17011

[22] Litavrin A.V., *Automorphisms of the nilpotent subalgebra $N\Phi(K)$ Chevalley algebra of symplectic type*, Izvestiya Irkutsk St. Univ., series math., **8**:3 (2015), 41–55.

[23] Bourbaki N., *Groupes et algebraes de Lie (Chapt. IV-VI)*, Hermann, Paris, 1972.

[24] Egorychev G. P., Levchuk V. M., *Enumeration in the Chevalley algebras.*, ACM SIGSAM Bulletin, **35**:2 (2001), 439–452. Zbl 1050.17003

[25] Levchuk V.M., Litavrin A.V., Hodyunya N.D., Tsigankov V.V., *Niltriangular subalgebras of the Chevalley algebras and their generalizations*, Vladikavkaz matem. zh., **17**:2 (2015), 37–46.

Vladimir Mikhailovich Levchuk
Inst. Math. and Found. Inform. of Siberian Federal University,
Pr. Svobodny, 79,
660041, Krasnoyarsk, Russia
E-mail address: vlevchuk@sfu-kras.ru

Andrey Victorovich Litavrin
Inst. Math. and Found. Inform. of Siberian Federal University,
Pr. Svobodny, 79,
660041, Krasnoyarsk, Russia
E-mail address: vlevchuk@sfu-kras.ru