S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 478–490 (2016) УДК 512.53
DOI 10.17377/semi.2016.13.041 MSC 06A12

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ НАД ПОЛУРЕШЕТКАМИ

А.Н. ШЕВЛЯКОВ

Abstract. We study semilattice equations which have the same solution in a given semilattice.

Keywords: semilattices, equations.

1. Введение

Данная статья посвящена следующей проблеме. Пусть Eq_m — множество всех уравнений от не более чем m переменных над заданной конечной полурешеткой S (строгое определение множества Eq_m приводится ниже в статье). Тогда для каждого подмножества $Y \subseteq S^m$ определено множество уравнений $\mathrm{Eq}_m(Y) \subseteq \mathrm{Eq}_m$, имеющих решение Y. В частности, множество $\mathrm{Eq}_m(\emptyset)$ совпадает с множеством всех несовместных над S уравнений от не более чем m переменных.

Результаты данной работы показывают, что для любой полурешетки S множество чисел $\{|\mathrm{Eq}_m(Y)| \mid Y \subseteq S^m\}$ имеет большой разброс значений (теорема 3). Так, например, для произвольной полурешетки S порядка n и множеств $Y_1 = \{x \mid x \geq a\}$ $(a \in S)$, $Y_2 = S$, $Y_3 = \emptyset$ величины $|\mathrm{Eq}_1(Y_i)|$ имеют соответственно порядки $O(1), O(n), O(n^2)$ (отметим, что в соответствии с определением, $|\mathrm{Eq}_1|$ — это величина порядка $O(n^2)$). Кроме того, для произвольной полурешетки S порядка n мы указываем интервал, в котором заключена величина $|\mathrm{Eq}_m(\emptyset)|$ (теорема 1) — это позволяет оценить (теорема 2) долю несовместных уравнений от не более чем m переменных над S.

Основным результатом (теорема 4) нашей работы является доказательство неравенства $|\mathrm{Eq}_1(Y)| < |\mathrm{Eq}_1(\emptyset)|$ для любого непустого множества $Y \subseteq S$, где S

Shevlyakov, A.N., Equivalent equations in semilattices.

Работа поддержана РФФИ (проект 14-01-00068, результаты параграфа 3.
Работа поддержана РНФ (проект 14-11-00085, результаты параграфа 4.
Поступила 24 августа 2015 г., опубликована 8 июня 2016 г.

— произвольная полурешетка порядка $n \geq 6$. Это означает, что при вычислении решения наудачу выбранного уравнения $\sigma(x) = \tau(x)$ от одной переменной наиболее вероятным исходом является несовместность уравнения $\sigma(x) = \tau(x)$ над полурешеткой S при $|S| \geq 6$.

Естественно, что все полученные результаты существенно зависят от выбора множества уравнений Eq_m над полурешеткой S. Альтернативные варианты выбора множества Eq_m обсуждаются в замечании 2.

Отметим, что подобные проблемы в классе групповых уравнений неоднократно становились предметом исследований (см. например работы [1, 2, 3] и особенно обзор В.А. Романькова [4]). В данных работах вычислялась вероятность того, что случайно выбранное уравнение будет несовместным. Проблема совместности, безусловно, является одной из важнейших при изучении уравнений, однако в этом направлении исследований возникают и другие интересные задачи. Приведем лишь некоторые из них (все указанные ниже проблемы сформулированы для полурешеток, но они допускают аналогичные формулировки и для других классов алгебраических систем).

(1) С какой вероятностью случайно выбранное уравнение будет иметь ровно n решений в полурешетке S.
(2) С какой вероятностью решение двух случайно выбранных уравнений от m переменных над полурешеткой S будут равны друг другу.
(3) С какой вероятностью решение Y случайно выбранного уравнения над полурешеткой S будет неприводимым алгебраическим множеством, вычислить математическое ожидание числа неприводимых компонент множества Y (определение неприводимости и неприводимых компонент см. в [5]).

Мы надеемся, что данные проблемы станут предметом дальнейших исследований.

2. Основные понятия

Предполагается, что все рассматриваемые ниже полурешетки конечны и содержат максимальный элемент 1 (единицу). Данное предположение не является искусственным (так как к любой полурешетке можно внешним образом добавить единичный элемент) и дополнительно обосновывается в замечании 1. Минимальный элемент полурешетки обозначается через 0, операция умножения (взятия точной нижней грани) обозначается символом $\cdot$. Несравнимые элементы $a, b \in S$ будем обозначать через $a \parallel b$. Элемент a полурешетки S называется *неразложимым*, если не существуют элементов $b > a$, $c > a$ таких, что $a = bc$.

Пусть S — полурешетка и $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ — множество переменных. *Уравнением над* S называется упорядоченная пара вида $(t(X)s_1, s(X)s_2)$ или $(t(X)s_1, s_2)$, где $t(X), s(X)$ — непустые произведения букв из множества X, $s_i \in S$. Уравнение над S далее будем записывать в традиционной форме с помощью знака $=$: $t(X)s_1 = s(X)s_2$, $t(X)s_1 = s_2$. Два уравнения называются *эквивалентными*, если они имеют одинаковое множество решений в полурешетке S.

Замечание 1. *Определение уравнения как упорядоченной пары связано с тем, что далее в работе выражения* $t(X)s_1 = s(X)s_2$ *и* $s(X)s_2 = t(X)s_1$ *считаются разными уравнениями. Благодаря данному предположению можно корректно говорить о правой и левой части уравнения. Заметим, также, что выражение* $s_1 = t(X)s_2$ *согласно формальному определению уравнением не является.*

Поскольку $1 \in S$, *то выражения вида* $t(X)s_1 = s(X)$, $t(X) = s(X)s_2$, $t(X) = s(X)$, $t(X) = s_2$ *также являются уравнениями над* S.

Напомним, что другие варианты определения множества уравнений над полурешеткой S *обсуждается в замечании 2.*

Уравнение вида $t(X)s_1 = s(X)s_2$ ($t(X)s_1 = s_2$) будем называть *уравнением первого (второго) рода*. Заметим, что все уравнения первого рода совместны, поскольку точка $(0, 0, \dots, 0)$ удовлетворяет любому такому уравнению.

Обозначим через Eq^i_m множество всех уравнений i-го рода над полурешеткой S, зависящих от не более чем m переменных. Обозначим $\mathrm{Eq}_m = \mathrm{Eq}^1_m \cup \mathrm{Eq}^2_m$ — множество всех уравнений от не более чем m переменных. Пусть порядок полурешетки S равен n. Поскольку произвольное уравнение из множества Eq^1_m имеет вид $t(X)s_1 = s(X)s_2$ (где $t(X), s(X)$ — непустые произведения переменных), то существует ровно $(2^m - 1)^2 n^2$ уравнений первого рода. Аналогично можно показать, что $|\mathrm{Eq}^2_m| = (2^m - 1)n^2$. Таким образом,

$$|\mathrm{Eq}_m| = (2^m - 1)^2 n^2 + (2^m - 1)n^2 = 2^m n^2 (2^m - 1).$$

Пусть $\mathrm{Eq}_m(Y) \subseteq \mathrm{Eq}_m$ — множество уравнений над полурешеткой S с решением $Y \subseteq S^m$. Множество решений уравнения $\tau(X) = \sigma(X)$ (здесь выражения $\tau(X), \sigma(X)$ могут содержать константы) в полурешетке S будем обозначать через $\mathrm{V}_S(\tau(X) = \sigma(X))$

3. Две серии полурешеток

Полученные в данном параграфе результаты будут использованы при доказательстве основных теорем параграфа 4.

Пусть L_n — линейно упорядоченная полурешетка, состоящая из n ($n \geq 2$) элементов $0 < 1 < 2 < \dots < n - 1$ (для удобства элементы полурешетки L_n обозначены натуральными числами, единицей полурешетки является элемент $n - 1$).

Лемма 1. *Для полурешетки* L_n *имеем равенство:*

$$|\mathrm{Eq}_m(\emptyset)| = (2^m - 1)\frac{n(n-1)}{2}.$$

Доказательство. Поскольку любое уравнение первого рода совместно над L_n, то найдем количество уравнений второго рода несовместных над L_n. Очевидно что уравнение $t(X)c = d$ несовместно над L_n тогда и только тогда, когда $c < d$. Общее количество пар $\{(c, d) \mid c < d\}$ равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

Поскольку существует ровно $2^m - 1$ непустых произведений $t(X)$ от не более чем m переменных, то общее число несовместных уравнений над L_n равно $(2^m - 1)\frac{n(n-1)}{2}$. □

Сведения об уравнениях от одной переменной над полурешеткой L_n и их решениях приведены в следующей таблице (ниже через $[a, b]$ обозначено множество $\{x \mid a \leq x \leq b\} \subseteq L_n$).

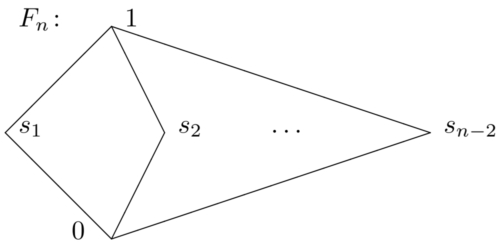
Таблица 1.

Множество $Y \subseteq L_n$	Уравнения с решением Y	Количество уравнений с решением Y
L_n	$\{xa = xa \mid a \in L_n\} \cup$ $\{x0 = 0\}$	$n + 1$
$[0, k]$ $(0 < k < n - 1)$	$\{xk = xa \mid a > k\} \cup$ $\{xa = xk \mid a > k\}$	$2(n - k)$
$[k, n]$ $(k > 0)$	$xk = k$	1
k $(0 < k < n - 1)$	$\{xa = k \mid a > k\}$	$n - k$
0	$\{x0 = xa \mid a \neq 0\} \cup$ $\{xa = x0 \mid a \neq 0\} \cup$ $\{xa = 0 \mid a \neq 0\}$	$3(n - 1)$
$\emptyset$	$\{xa = b \mid a < b\}$	$n(n - 1)/2$

Пусть F_n — веерная полурешетка, состоящая из n $(n \geq 2)$ элементов

$$0, s_1, s_2, \ldots, s_{n-2}, 1,$$

где множество элементов $s_1, s_2, \ldots, s_{n-2}$ образуют антицепь, которую мы будем обозначать через A_n.



Ясно, что при $n = 2, 3$ полурешетки F_n, L_n изоморфны друг другу.

Лемма 2. *Для полурешетки F_n имеем равенство:*

$$|\mathrm{Eq}_m(\emptyset)| = (2^m - 1)(n^2 - 3n + 3).$$

Доказательство. Поскольку любое уравнение первого рода совместно над F_n, то найдем количество уравнений второго рода несовместных над F_n. Очевидно что уравнение $t(X)c = d$ совместно над F_n тогда и только тогда, когда пара (c, d) принадлежит множеству

$$\{(c, 0) \mid c \in F_n\} \cup \{(s_i, s_i) \mid 1 \leq i \leq n - 2\} \cup \{(1, s_i) \mid 1 \leq i \leq n - 2\} \cup \{(1, 1)\}$$

Пользуясь тем, что указанные выше четыре множества попарно не пересекаются, находим общее количество пар (c, d), при которых уравнение $t(X)c = d$ совместно:

$$n + (n - 2) + (n - 2) + 1 = 3(n - 1).$$

Поскольку существует $2^m - 1$ непустых произведений $t(X)$ от не более чем m переменных, то общее число совместных уравнений второго рода над F_n равно

$3(2^m-1)(n-1)$. Соответственно число несовместных уравнений от не более чем m переменных над полурешеткой F_n равно:

$$(2^m-1)n^2-3(2^m-1)(n-1)=(2^m-1)(n^2-3n+3).$$

□

Сведения об уравнениях от одной переменной и их решениях над F_n $(n \geq 6)$ приведены в следующей таблице.

Таблица 2.

Множество $Y \subseteq F_n$	Уравнения с решением Y	Количество уравнений с решением Y
F_n	$\{xa = xa \mid a \in F_n\}$ $\cup\{x0 = 0\}$	$n+1$
$A_n \setminus \{a\}$ $(a \in A_n)$	$xa = 0, xa = x0, x0 = xa$	3
$A_n \setminus \{a,b\}$ $(a, b \in A_n,\ a \neq b)$	$xa = xb,$ $xb = xa$	2
a $(a \neq 0)$	$x1 = a$	1
0	$x1 = 0, x1 = x0, x0 = x1$	3
$\{0, a\}$ $(a \in A_n)$	$x1 = xa, xa = x1$	2
$\{a, 1\}$ $(a \in A_n)$	$xa = a$	1
$\emptyset$	$\{xa = b \mid a \ngeq b\}$	n^2-3n+3

Для полурешеток F_4, F_5 имеем следующие таблицы.

Таблица 3.

Множество $Y \subseteq F_4$	Уравнения с решением Y	Количество уравнений с решением Y
F_4	$\{xa = xa \mid a \in F_4\}$ $\cup\{x0 = 0\}$	5
$A_4 \setminus \{a\}$ $(a \in A_4)$	$xa = 0, xa = x0, x0 = xa$	3
a $(a \neq 0)$	$x1 = a$	1
0	$x1 = 0,\ x1 = x0,\ x0 = x1,$ $xs_1 = xs_2,\ xs_2 = xs_1$	5
$\{0, a\}$ $(a \in A_4)$	$x1 = xa, xa = x1$	2
$\{a, 1\}$ $(a \in A_4)$	$xa = a$	1
$\emptyset$	$\{xa = b \mid a \ngeq b\}$	7

Таблица 4.

Множество $Y \subseteq F_5$	Уравнения с решением Y	Количество уравнений уравнений с решением Y
F_5	$\{xa = xa \mid a \in F_5\}$ $\cup\{x0 = 0\}$	6
$A_5 \setminus \{a\}$ $(a \in A_5)$	$xa = 0, xa = x0, x0 = xa$	3
a $(a \neq 0)$	$x1 = a$	1
0	$x1 = 0$, $x1 = x0$, $x0 = x1$	3
$\{0, a\}$ $(a \in A_5)$	$x1 = xa, xa = x1$ $xb = xc$, $xc = xb$ $(b, c \in A_5 \setminus \{a\})$	4
$\{a, 1\}$ $(a \in A_5)$	$xa = a$	1
$\emptyset$	$\{xa = b \mid a \ngeq b\}$	13

4. Основные результаты

Теорема 1. *Для произвольной полурешетки S, состоящей из n элементов, выполнено*

$$(2^m - 1)\frac{n(n-1)}{2} \leq |\mathrm{Eq}_m(\emptyset)| \leq (2^m - 1)(n^2 - 3n + 3). \tag{1}$$

Доказательство. Поскольку любое уравнение первого рода совместно, то далее будем рассматривать лишь уравнения второго рода. Множество Eq^2_m можно представить в виде дизъюнктного объединения трех множеств уравнений:

$$\mathrm{Eq}^2_m = M_1 \cup M_2 \cup M_3 = \{t(X)c = d|c \geq d\} \cup \{t(X)c = d|c < d\} \cup \{t(X)c = d|c \parallel d\}.$$

Все уравнения из множества M_1 совместны (все они удовлетворяют точке $(d, d, \ldots, d)$). С другой стороны, все уравнения из множеств M_2, M_3 несовместны и поэтому $\mathrm{Eq}_m(\emptyset) = M_2 \cup M_3$. Поскольку $|\mathrm{Eq}^2_m| = (2^m - 1)n^2$, то

$$|\mathrm{Eq}_m(\emptyset)| = (2^m - 1)n^2 - |M_1|.$$

Величина $|M_1|$ равна количеству пар сравнимых элементов полурешетки S и в классе всех полурешеток порядка n величина $|M_1|$ достигает минимума (максимума) на полурешетке F_n (L_n). Следовательно, величина $|\mathrm{Eq}_m(\emptyset)|$ принимает минимальное (максимальное) значения на полурешетке L_n (F_n), и с помощью лемм 1, 2 мы получаем требуемое неравенство. □

Теорема 2. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число N такое, что для любой полурешетки порядка $n > N$ выполнено*

$$\frac{1}{2^{m+1}} - \varepsilon \leq \frac{\mathrm{Eq}_m(\emptyset)}{\mathrm{Eq}_m} \leq \frac{1}{2^m}. \tag{2}$$

Доказательство. Разделив все части двойного неравенства (1) на $|\mathrm{Eq}_m| = 2^m n^2(2^m - 1)$ получим

$$\frac{(2^m - 1)n(n-1)}{2 \cdot 2^m n^2(2^m - 1)} \leq \frac{|\mathrm{Eq}_m(\emptyset)|}{|\mathrm{Eq}_m|} \leq \frac{(2^m - 1)(n^2 - 3n + 3)}{2^m n^2(2^m - 1)},$$

$$\frac{1}{2^{m+1}}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{|\mathrm{Eq}_m(\emptyset)|}{|\mathrm{Eq}_m|} \leq \frac{1}{2^m}\left(1 - \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2}\right) \leq \frac{1}{2^m}.$$

Поскольку выражение $1-\frac{1}{n}$ стремится к 1 при $n\to\infty$, то начиная с некоторого натурального числа N будет выполнятся неравенство (2). □

Для некоторых подмножеств $A\subseteq S$ значение величины $|\mathrm{Eq}_1(A)|$ можно вычислить точно для любой полурешетки S.

Теорема 3. *Пусть S — произвольная полурешетка порядка n. Тогда верны следующие утверждения.*

(1) $|\mathrm{Eq}_1(S)|=n+1$.
(2) *Пусть $a\in S\setminus\{0\}$, тогда $|\mathrm{Eq}_1(\{x\mid x\geq a\})|=1$. В частности, $|\mathrm{Eq}_1(\{1\})|=1$*
(3) *Пусть $a\in S\setminus\{0,1\}$ — неразложимый элемент. Тогда $|\mathrm{Eq}_1(\{a\})|=|\{x\mid x>a\}|$.*
(4) *Пусть 0 является неразложимым элементом полурешетки S (то есть в S ровно один атом). Тогда $|\mathrm{Eq}_1(\{0\})|=3(n-1)$.*

Доказательство. (1) Допустим, что $\mathrm{V}_S(xc=d)=S$. Тогда

$$0\in\mathrm{V}_S(xc=d)\Rightarrow d=0,\ c\in\mathrm{V}_S(xc=0)\Rightarrow c=0.$$

Следовательно, единственным уравнением второго рода с решением S является $x0=0$.

Пусть теперь уравнение $xa=xb$ имеет решение S. Тогда

$$a\in\mathrm{V}_S(xa=xb)\Rightarrow a=ab,\ b\in\mathrm{V}_S(xa=xb)\Rightarrow ab=b,$$

и поэтому $a=b$. Таким образом, имеем ровно n уравнений первого рода с решением S. Следовательно (учитывая и уравнение $x0=0$), $|\mathrm{Eq}_1(S)|=n+1$.

(2) Обозначим множество $\{x\mid x\geq a\}$ через Y. Ясно, что никакое уравнение вида $xb=xc$ не может иметь решение Y, так как $0\in\mathrm{V}_S(xa=xb)\setminus Y$. Допустим, что $\mathrm{V}_S(xc=d)=Y$ для некоторых $c,d\in Y$. Имеем

$$a\in Y\Rightarrow ac=d\Rightarrow d\leq c\Rightarrow dc=d\Rightarrow d\in\mathrm{V}_S(xc=d)\Rightarrow d\in Y\Rightarrow d\geq a,$$

однако равенство $ac=d$ влечет $d\leq a$. Следовательно, $d=a$, но тогда

$$a\in Y\Rightarrow ac=a\Rightarrow c\geq a\Rightarrow c\in Y\Rightarrow c\in\mathrm{V}_S(xc=a)\Rightarrow cc=a\Rightarrow c=a.$$

Таким образом, мы получаем, что уравнение $xa=a$ является единственным уравнением во множестве Eq_1 с решением Y, и поэтому $|\mathrm{Eq}_1(Y)|=1$.

(3) Ясно, что множество $\mathrm{Eq}_1(\{a\})$ не содержит уравнений первого рода, поскольку каждое уравнение первого рода удовлетворяет точке 0. Рассмотрим уравнение второго рода $xb=c$ с решением $\{a\}$. Равенство $ab=c$ влечет $c\leq b$ и, следовательно, $c\in\mathrm{V}_S(xb=c)$. Поскольку $\mathrm{V}_S(xb=c)=\{a\}$, то $c=a$.

Покажем, что для любого $b>a$ уравнение $xb=a$ имеет решение $\{a\}$. Если существует отличный от a элемент $c\in\mathrm{V}_S(xb=a)$, то получаем $cb=a$, что противоречит неразложимости элемента a

Таким образом, $\mathrm{Eq}_1(\{a\})=\{xb=a\mid b>a\}$ и поэтому $|\mathrm{Eq}_1(\{a\})|=|\{b\mid b>a\}|$.

(4) Обозначим единственный атом полурешетки S через a. Допустим, что уравнение первого рода $xb=xc$ $(b,c\neq 0)$ имеет решение $\{0\}$. Поскольку $b,c\geq a$, то $ab=ac=a$ и поэтому $a\in\mathrm{V}_S(xb=xc)$ — противоречие.

Используя рассуждения из предыдущего пункта, мы получаем, что $V_S(xb = 0) = \{0\}$ для всех $b \neq 0$ и других уравнений второго рода с решением $\{0\}$ нет. Таким образом,

$$\mathrm{Eq}_1(\{0\}) = \{xb = 0 \mid b > 0\} \cup \{x0 = xb \mid b > 0\} \cup \{xb = x0 \mid b > 0\},$$

и поэтому

$$|\mathrm{Eq}_1(\{0\})| = |\{xb = 0 \mid b > 0\}| + |\{x0 = xb \mid b > 0\}| + |\{xb = x0 \mid b > 0\}| = 3(n-1).$$

□

Теорема 4. *Пусть S — произвольная полурешетка, $|S| = n \geq 6$, и $Y \subseteq S$ — непустое алгебраическое множество над S. Тогда*

$$|\mathrm{Eq}_1(Y)| < |\mathrm{Eq}_1(\emptyset)|.$$

Доказательство теоремы 4 будет следовать из приведенных ниже лемм.

Лемма 3. *Пусть S — произвольная полурешетка, $|S| = n \geq 6$, и $Y \subseteq S$ — непустое алгебраическое множество над S, $Y \neq \{0\}$. Тогда*

$$|\mathrm{Eq}_1(Y)| < |\mathrm{Eq}_1(\emptyset)|. \tag{3}$$

Доказательство. Множество $\mathrm{Eq}_1(Y)$ допускает представление в виде объединения $\mathrm{Eq}_1(Y) = \mathrm{Eq}_1^1(Y) \cup \mathrm{Eq}_1^2(Y)$, где $\mathrm{Eq}_1^i(Y)$ — множество уравнений i-го рода с решением Y. Множество $\mathrm{Eq}_1^1(Y)$ в свою очередь есть объединение

$$\mathrm{Eq}_1^1(Y) = \mathrm{Eq}_{\|}(Y) \cup \mathrm{Eq}_+(Y) \cup \mathrm{Eq}_-(Y) \cup \mathrm{Eq}_=(Y),$$

где $\mathrm{Eq}_{\|}(Y), \mathrm{Eq}_+(Y), \mathrm{Eq}_-(Y), \mathrm{Eq}_=(Y)$ — суть следующие подмножества в $\mathrm{Eq}_1^1(Y)$:

$$\mathrm{Eq}_{\|}(Y) = \{xa = xb \mid a \parallel b\},$$

$$\mathrm{Eq}_+(Y) = \{xa = xb \mid a < b\},\ \mathrm{Eq}_-^1(Y) = \{xa = xb \mid a > b\},$$

$$\mathrm{Eq}_=(Y) = \{\text{уравнения с одинаковой левой и правой частью}\}.$$

Поскольку все уравнения

$$x0 = a\ (a \neq 0), xa = 1\ (a \neq 1)$$

несовместны над S, то получаем следующую оценку снизу на мощность множества $\mathrm{Eq}_1(\emptyset)$:

$$2(n-1) \leq |\mathrm{Eq}_1(\emptyset)|. \tag{4}$$

Рассмотрим вначале простейшие случаи.

(1) Пусть $Y = S$ (то есть каждое уравнение из $\mathrm{Eq}_1(Y)$ удовлетворяет всем элементам полурешетки S). По теореме 3, $|\mathrm{Eq}_1(Y)| = n + 1$. Ясно, что при условии $n \geq 6$ мы имеем неравенство

$$|\mathrm{Eq}_1(Y)| = n + 1 < 2(n-1) \leq |\mathrm{Eq}_1(\emptyset)|,$$

и получаем (3).

(2) Допустим, что множество Y не содержит точку 0. В этом случае $\mathrm{Eq}_1^1(Y)=\emptyset$, а множество $\mathrm{Eq}_1^2(Y)$ не содержит уравнений вида $xa=0$. Пусть $xc=d, xc'=d'\in \mathrm{Eq}_1^2(Y)$. Так как данные уравнения совместны, то $d\le c$, $d'\le c'$ и поэтому $d,d'\in Y$. Следовательно, $dc'=d'$, $d'c=d$, и мы получаем $(d'c)c'=d'$ и $d'\le cc'\le c$. Тогда равенство $d'c=d$ превращается в $d'=d$, и поэтому

$$\mathrm{Eq}_1^2(Y)=\{xc=d\mid c\in S'\}$$

для некоторого $d\in S$ и некоторого $S'\subseteq S\setminus\{0\}$). Таким образом, получаем оценку

$$|\mathrm{Eq}_1(Y)|=|\mathrm{Eq}_1^2(Y)|=|S'|\le|S\setminus\{0\}|=n-1<2(n-1)\le|\mathrm{Eq}_1(\emptyset)|,$$

и неравенство (3) доказано.

Далее считаем, что множество Y содержит точку 0 и $Y\neq S$. Следовательно, множество $\mathrm{Eq}_1^2(Y)$ имеет вид

$$\mathrm{Eq}_1^2(Y)=\{xc=0\mid c\in S'\},$$

где S' — некоторое подмножество полурешетки S. Поскольку множество S' не может содержать 0, то $|\mathrm{Eq}_1^2(Y)|\le n-1$. Поскольку $Y\neq S$, то $\mathrm{Eq}_=^1(Y)=\emptyset$.

Пусть $\mathrm{Eq}_{+0}(Y)$ ($\mathrm{Eq}_{-0}(Y)$)— множество всех уравнений из $\mathrm{Eq}_+(Y)$ ($\mathrm{Eq}_-(Y)$) с левой (правой) частью $x0$. Несложно показать, что

$$\mathrm{Eq}_{+0}(Y)=\{x0=xa\mid a\in S'\},\ \mathrm{Eq}_{-0}(Y)=\{xa=x0\mid a\in S'\},$$

и поэтому множества $\mathrm{Eq}_{+0}^1(Y),\mathrm{Eq}_{-0}^1(Y),\mathrm{Eq}_1^2(Y)$ состоят из одного и того же числа элементов. Обозначим мощность данных множеств через k.

Пусть

$$\mathrm{Eq}_{++}(Y)=\mathrm{Eq}_+(Y)\setminus\mathrm{Eq}_{+0}(Y)=\{xa=xb\mid a<b,a\neq 0\}\cap\mathrm{Eq}_+(Y),$$

$$\mathrm{Eq}_{--}(Y)=\mathrm{Eq}_-(Y)\setminus\mathrm{Eq}_{-0}(Y)=\{xb=xa\mid a<b,a\neq 0\}\cap\mathrm{Eq}_-(Y).$$

Ниже для каждого из уравнений множеств $\mathrm{Eq}_\|(Y),\mathrm{Eq}_{++}(Y),\mathrm{Eq}_1^2(Y)$ будет построено множество $\mathrm{Eq}_\|(\emptyset),\mathrm{Eq}_{++}(\emptyset),\mathrm{Eq}_1^2(\emptyset)$ несовместных над S уравнений:

$$xa=xb\in\mathrm{Eq}_\|(Y)\Rightarrow xa=b\in\mathrm{Eq}_\|(\emptyset)$$

(уравнению $xb=xa\in\mathrm{Eq}_\|(Y)$ соответствует уравнение $xb=a\in\mathrm{Eq}_\|(\emptyset)$),

$$xa=xb\in\mathrm{Eq}_{++}(Y)\Rightarrow xb=a\in\mathrm{Eq}_{++}(\emptyset),$$

$$xa=0,xa'=0\in\mathrm{Eq}_1^2(Y)\Rightarrow\begin{cases}xa'=a\in\mathrm{Eq}_1^2(\emptyset), & \text{если } a\not\le a',\\ xa=a'\in\mathrm{Eq}_1^2(\emptyset), & \text{если } a\le a'\end{cases}$$

Из построения легко следует, что все уравнения множества

$$U=\mathrm{Eq}_\|(\emptyset)\cup\mathrm{Eq}_{++}(\emptyset)\cup\mathrm{Eq}_1^2(\emptyset)$$

несовместны над S.

Последовательно докажем следующие утверждения.

(1) *Докажем, что* $\mathrm{Eq}_\|(\emptyset)\cap\mathrm{Eq}_{++}(\emptyset)=\emptyset$. Действительно, множество $\mathrm{Eq}_\|(\emptyset)$ состоит из уравнений $xa=b$, где $a\parallel b$, однако множество $\mathrm{Eq}_{++}(\emptyset)$ состоит из уравнений $xa=b$, где $b>a$.

(2) *Докажем, что* $\mathrm{Eq}_{\|}(\emptyset) \cap \mathrm{Eq}_1^2(\emptyset) = \emptyset$. Допустим, что $xa = b \in \mathrm{Eq}_{\|}(\emptyset) \cap \mathrm{Eq}_1^2(\emptyset)$. Это означает, что существуют уравнения $xa = xb \in \mathrm{Eq}_{\|}(Y)$, $xa = 0, xb = 0 \in \mathrm{Eq}_1^2(Y)$ и $a \| b$. Поскольку все уравнения $xa = xb, xa = 0, xb = 0$ эквивалентны друг другу, то получаем

$$ab \in V_S(xa = xb) \Rightarrow ab \in V_S(xa = 0) \Rightarrow ab = 0 \Rightarrow \\ b \in \mathrm{V}_S(xa = 0) \Rightarrow b \in \mathrm{V}_S(xb = 0) \Rightarrow b = 0,$$

что противоречит $a \| b$.

(3) *Докажем, что* $\mathrm{Eq}_{++}(\emptyset) \cap \mathrm{Eq}_1^2(\emptyset) = \emptyset$. Допустим, что $xa = b \in \mathrm{Eq}_{++}(\emptyset) \cap \mathrm{Eq}_1^2(\emptyset)$. Это означает, что существуют уравнения $xa = xb \in \mathrm{Eq}_{++}(Y)$, $xa = 0, xb = 0 \in \mathrm{Eq}_1^2(Y)$ и $a < b$. Поскольку все уравнения $xa = xb, xa = 0, xb = 0$ эквивалентны друг другу, то получаем

$$a \in V_S(xa = xb) \Rightarrow a \in V_S(xa = 0) \Rightarrow a = 0 \Rightarrow x0 = xb \in \mathrm{Eq}_{++}(Y).$$

что противоречит определению множества $\mathrm{Eq}_{++}(Y)$.

(4) Из доказанных выше утверждений следует, что *множества*

$$\mathrm{Eq}_{\|}(\emptyset), \mathrm{Eq}_{++}(\emptyset), \mathrm{Eq}_1^2(\emptyset)$$

попарно не пересекаются.

(5) Из построения множеств $\mathrm{Eq}_{\|}(\emptyset), \mathrm{Eq}_{++}(\emptyset), \mathrm{Eq}_1^2(\emptyset)$ находим их мощности:

$$|\mathrm{Eq}_{\|}(\emptyset)| = |\mathrm{Eq}_{\|}(Y)|,\ |\mathrm{Eq}_{++}(\emptyset)| = |\mathrm{Eq}_{++}(Y)|,$$

$$|\mathrm{Eq}_1^2(\emptyset)| = \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}.$$

(6) *Докажем, что* $|\mathrm{Eq}_{--}(Y)| = |\mathrm{Eq}_{++}(Y)| \leq (n-1) - k$. Равенство

$$|\mathrm{Eq}_{--}(Y)| = |\mathrm{Eq}_{++}(Y)|$$

легко следует из определения множеств $\mathrm{Eq}_{--}(Y)$, $\mathrm{Eq}_{++}(Y)$. Допустим, что существуют уравнения $xa = xb \in \mathrm{Eq}_{+}(Y)$, $xa' = xb \in \mathrm{Eq}_{+}(Y)$, где $a \neq a'$, $a < b, a' < b$.

Используя эквивалентность уравнений $xa = xb$, $xa' = xb$, получаем

$$a, a' \in \mathrm{V}_S(xa = xb) = \mathrm{V}_S(xa' = xb) \Rightarrow a'a = a'b, aa' = ab \Rightarrow \\ a'a = a', aa' = a \Rightarrow a = a',$$

что противоречит выбору уравнений $xa = xb$, $xa' = xb$.

Следовательно, *каждое уравнение* $xa = xb$ *множества* $\mathrm{Eq}_{+}(Y)$ *однозначно определяется константой в правой части уравнения.*

Пусть $xa = xb \in \mathrm{Eq}_{++}(Y)$. Поскольку $b \neq 0$, то по доказанному выше элемент b не может входить ни в одно из k уравнений множества $\mathrm{Eq}_{+0}(Y) \subseteq \mathrm{Eq}_{+}(Y)$, и мы получаем не более $(n-1) - k$ возможных значений для b. Следовательно, $|\mathrm{Eq}_{--}(Y)| = |\mathrm{Eq}_{++}(Y)| \leq (n-1) - k$.

(7) *Существует не менее* $2n - 3$ *несовместных над* S *уравнений, не входящих во множество* U. Пусть

$$U' = \{x0 = a \mid a \neq 0\} \cup \{xa = 1 \mid a \notin A\},$$

где

$$A = \begin{cases} \{1, c\}, & \text{если } Y = \{x \mid x \leq c\}, \\ \{1\}, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Ясно, что все уравнения из множества U' несовместны и $|U'| \geq n-1+n-2=2n-3$. Покажем, что $U' \cap U = \emptyset$. Из построения множества U следует, что уравнения вида $x0=a$ не могут принадлежать множеству U. Допустим, что $xa = 1 \in U' \cap U$ для некоторого $a \in S$. Следовательно, либо $xa = x1 \in \mathrm{Eq}_{++}(Y)$ либо $xa = 0, x1 = 0 \in \mathrm{Eq}_1^2(Y)$. В первом случае получаем $Y = \{x \mid x \leq a\}$, но тогда $A = \{1, a\}$, и уравнение $xa = 1$ не могло попасть в множество U'. Во втором случае имеем $Y = \{0\}$, что противоречит выбору множества Y.

Осталось показать, что выполнении условия $n \geq 6$ мы получаем $|U| + |U'| > |\mathrm{Eq}_1(Y)|$. Имеем

$$\begin{aligned}|\mathrm{Eq}_1(Y)| = |\mathrm{Eq}_{\|}(Y)| + |\mathrm{Eq}_{++}(Y)| + |\mathrm{Eq}_{--}(Y)| + |\mathrm{Eq}_1^2(Y)| \\ + |\mathrm{Eq}_{+0}(Y)| + |\mathrm{Eq}_{-0}(Y)| = |\mathrm{Eq}_{\|}(Y)| + |\mathrm{Eq}_{++}(Y)| \\ + |\mathrm{Eq}_{--}(Y)| + 3k \leq |\mathrm{Eq}_{\|}(Y)| + |\mathrm{Eq}_{++}(Y)| + (n-1) + 2k,\end{aligned}$$

$$|U| = |\mathrm{Eq}_{\|}(\emptyset)| + |\mathrm{Eq}_{++}(\emptyset)| + |\mathrm{Eq}_1^2(\emptyset)| = |\mathrm{Eq}_{\|}(Y)| + |\mathrm{Eq}_{++}(Y)| + \frac{k(k-1)}{2}.$$

Следовательно,

$$|U| + |U'| \geq |\mathrm{Eq}_{\|}(Y)| + |\mathrm{Eq}_{++}(Y)| + \frac{k(k-1)}{2} + 2n - 3.$$

Выясним, когда выполнено неравенство $|\mathrm{Eq}_1(Y)| < |U| + |U'|$:

$$|\mathrm{Eq}_{\|}(Y)| + |\mathrm{Eq}_{++}(Y)| + (n-1) + 2k < |\mathrm{Eq}_{\|}(Y)| + |\mathrm{Eq}_{++}(Y)| + \frac{k(k-1)}{2} + 2(n-1)$$

$$\Leftrightarrow (n-1) + 2k < \frac{k(k-1)}{2} + 2n - 3 \Leftrightarrow k^2 - 5k + 2n - 4 > 0.$$

Дискриминант левой части последнего неравенства равен $D = 25 - 4(2n-4)$ и при $n \geq 6$ мы имеем $D < 0$. Следовательно, неравенство $k^2 - 5k + 2(n-1) > 0$ выполнено для любого k, и мы получили (3). □

Элемент $s \in S$ будем называть *суператомным*, если для каждого атома a полурешетки S выполнено $s \geq a$. Множество всех суператомных элементов полурешетки S будем обозначать через $Super(S)$. Отметим, что для любой полурешетки S порядка $n \geq 2$ множество $Super(S)$ непусто, поскольку $1 \in Super(S)$. Например, $Super(L_n) = \{1, 2, \ldots, n-1\}$, $Super(F_n) = \{1\}$.

Лемма 4. *Для любого элемента b полурешетки S выполнено*

$$\mathrm{V}_S(xb = 0) = \{0\} \Leftrightarrow b \in Super(S).$$

Доказательство. Если существует атом $a \nleq b$, то $ab = 0$ и $a \in \mathrm{V}_S(xb = 0)$.

Докажем обратное утверждение. Допустим, что существует ненулевой элемент $a \in \mathrm{V}_S(xb = 0)$ и a' — произвольный атом со свойством $a' \leq a$. Тогда неравенство $0 = ab \geq a'b$ влечет $a'b = 0$ и поэтому $a' \nleq b$, что противоречит $b \in Super(S)$. □

Лемма 5. *Пусть S — произвольная полурешетка, $|S| = n \geq 6$ и $Y = \{0\}$. Тогда*

$$|\mathrm{Eq}_1(Y)| < |\mathrm{Eq}_1(\emptyset)|.$$

Доказательство. Ниже мы будем использовать обозначения, введенные в доказательстве леммы 3.

Поскольку $Y = \{0\}$, то $\mathrm{Eq}_{++}(Y) = \mathrm{Eq}_{--}(Y) = \emptyset$. Пусть $xa = 0 \in \mathrm{Eq}_1^2(Y)$, тогда по лемме 4 $a \in Super(S)$. Таким образом,

$$\mathrm{Eq}_1^2(Y) = \{xa = 0 \mid a \in Super(S)\},$$

$$\mathrm{Eq}_{+0}(Y) = \{x0 = xa \mid a \in Super(S)\},\ \mathrm{Eq}_{-0}(Y) = \{xa = x0 \mid a \in Super(S)\}.$$

Обозначим $k = |\mathrm{Eq}_1^2(Y)| = |\mathrm{Eq}_{+0}(Y)| = |\mathrm{Eq}_{-0}(Y)| = |Super(S)|$. Из определения величины k мы получаем $1 \leq k \leq n-1$.

Множества $\mathrm{Eq}_{\|}(\emptyset), \mathrm{Eq}_1^2(\emptyset)$ определяются как в лемме 3, и поэтому $|\mathrm{Eq}_{\|}(\emptyset)| = |\mathrm{Eq}_{\|}(Y)|$, $|\mathrm{Eq}_1^2(\emptyset)| = k(k-1)/2$. Обозначим объединение множеств $\mathrm{Eq}_{\|}(\emptyset), \mathrm{Eq}_1^2(\emptyset)$ через U.

Рассмотрим множество уравнений

$$U' = \{xa = b \mid a \notin Super(S), b \in Super(S)\},\ |U'| = k(n-k).$$

Докажем следующие утверждения.

(1) *Все уравнения из множества U' несовместны.* Допустим, что $s \in \mathrm{V}_S(xa = b)$, тогда

$$sa = b \Rightarrow a \geq b \Rightarrow a \in Super(S),$$

что противоречит свойствам элемента a.

(2) *Докажем, что $U \cap U' = \emptyset$.* Уравнение $xa = b$ принадлежит множеству U ровно в двух случаях: либо $xa = 0, xb = 0 \in \mathrm{Eq}_1^2(Y)$ либо $xa = xb \in \mathrm{Eq}_{\|}(Y)$. В первом случае по лемме 4 получаем $a \in Super(S)$ и поэтому уравнение $xa = b$ не может принадлежать множеству U'.

Рассмотрим второй случай и допустим, что $xa = b \in U'$. Так как $a \parallel b$, то $a \neq 0$. Точка $s = ab$ является решением уравнения $xa = xb$. Поскольку $Y = \{0\}$, то $ab = 0$. Однако если рассмотреть произвольный атом $0 < a' \leq a$, то в силу $b \in Super(S)$ имеем

$$0 = a'0 = a'(ab) = (a'b)a = a'a = a',$$

что противоречит выбору элемента $a' \neq 0$.

Лемма будет доказана, если

$$|\mathrm{Eq}_1(Y)| < |U| + |U'|. \tag{5}$$

Имеем

$$|\mathrm{Eq}_1(Y)| = |\mathrm{Eq}_{\|}(Y)| + 3k,$$

$$|U| + |U'| = |\mathrm{Eq}_{\|}(Y)| + \frac{k(k-1)}{2} + k(n-k).$$

Неравенство (5) эквивалентно выполнению следующих неравенств для всех $k \in [1, n-1]$.

$$3k < \frac{k(k-1)}{2} + k(n-k) \Leftrightarrow$$

$$k^2 + 7k - 2kn < 0 \Leftrightarrow k(k - (2n-7)) < 0 \Leftrightarrow$$

$$0 < k < 2n - 7 \tag{6}$$

При $n \geq 7$ справедливо неравенство $2n-7 > n-1$, и поэтому неравенство (6) выполнено для всех $k \in [1, n-1]$. Рассмотрим теперь случай $n = 6$. Неравенство (6) выполнено для всех полурешеток с $0 < k < 2 \cdot 6 - 7 = 5$. Осталось показать, что неравенство (6) выполнено для каждой полурешетки порядка 6 с $k = |Super(S)| = 5$. Однако единственной полурешеткой с параметрами $n = 6, k = 5$ является полурешетка L_6, для которой неравенство (6) следует непосредственно из приведенной в параграфе 3 таблицы 1. $\square$

Теорема 4 непосредственно следует из лемм 3, 5. Заметим, что при $n = 5$ утверждение теоремы 4 становится неверным (для полурешетки L_5 имеем $|\mathrm{Eq}_1(\{0\})| = 3(5-1) = 12$, $|\mathrm{Eq}_1(\emptyset)| = 5(5-1)/2 = 10$).

В заключение обсудим, насколько «естественно» было выбрано множество Eq_m.

Замечание 2. *Существуют и другие способы определить множество уравнений* Eq_m *от не более чем* m *переменных. Укажем лишь два наиболее естественных из них:*

(1) *добавить в текущее множество* Eq_m *все уравнения вида* $a = t(X)b$*;*
(2) *оставить во множестве* Eq_m *ровно одно уравнение из каждой пары симметричных уравнений* $t(X)a = s(X)b$, $s(X)b = t(X)a$.

Отметим, что оба новых определения множества Eq_m *сильно увеличивают долю несовместных уравнений в* Eq_m*, а она и так является достаточно высокой* (*см. теоремы* 1, 2, 4).

References

[1] Gilman R., Myasnikov A., Roman'kov V., *Random equations in nilpotent groups*, J. Algebra, **352** (2012), 192–214. Zbl 1283.20074

[2] Gilman R., Myasnikov A., Roman'kov V., *Random equations in free groups*, Groups, Complexity, Cryptol., **3** (2011), 257–284.

[3] A. V. Men'shov, *Random systems of equations in free abelian groups*, Siberian Math. J., **55**:3 (2014), 440–450. Zbl 1333.20047

[4] V. A. Roman'kov, *Equations over groups*, Groups, Complexity, Cryptol., **4**:2 (2012), 191–239. Zbl 1304.20058

[5] E. Yu. Daniyarova, A. G. Myasnikov, V. N. Remeslennikov, *Algebraic geometry over algebraic structures. II. Foundations*, J. Math. Sci., **185**:3 (2012), 389–416. Zbl 1256.03037

Artem Nikolaevich Shevlyakov
Sobolev Institute of Mathematics,
Pevtsova st., 13,
644099, Omsk, Russia
Omsk State Technical University,
pr. Mira, 11,
644050, Omsk, Russia
E-mail address: a_shevl@mail.ru