S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 491–524 (2016) УДК 517.954
DOI 10.17377/semi.2016.13.042 MSC 58J35

ПРИМЕНЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ИСЧИСЛЕНИЯ СИМВОЛОВ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ТЕПЛОВЫХ ИНВАРИАНТОВ

В.А. ШАРАФУТДИНОВ

Abstract. The problem of evaluating heat invariants can be computerized. Geometric symbol calculus for pseudodifferential operators serves as the main tool of such computerization.

Keywords: heat invariants, spectral geometry, geometric symbol calculus, exterior differential forms.

1. Введение

Мы утверждаем, что вычисление тепловых инвариантов может быть компьютеризовано. Чтобы убедить читателя в справедливости этого утверждения и продемонстрировать трудности такой компьютеризации, мы вычисляем первые три инварианта. В настоящей работе все вычисления проводились вручную, поскольку во-первых, обсуждаемая задача компьютеризации пока далека от своего решения и, во-вторых, автор не обладает достаточными навыками работы с компьютерными пакетами символьных вычислений. Тем не менее мы использовали результаты символьных компьютерных вычислений, любезно выполненных Валерием Джепко и Михалем Скоканом по просьбе автора. Мы надеемся, что настоящая работа вдохновит кого-нибудь из молодых математиков на дальнейший прогресс в этом направлении.

Тепловые инварианты являются одним из мостов между локальной геометрией и спектральными свойствами естественных дифференциальных операторов, определенных на геометрических объектах. Это является основной, хотя

Sharafutdinov, V.A., Application of geometric symbol calculus to computing heat invariants.

© 2016 Шарафутдинов В.А.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 15-01-05929-а).

Поступила 11 марта 2016 г., опубликована 8 июня 2016 г.

и не единственной причиной интереса к ним. В настоящем введении мы проиллюстрируем эту связь на примере скалярного лапласиана риманова многообразия.

Пусть (M, g) — замкнутое (т. е. компактное без края) риманово многообразие размерности n. Лапласиан $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ определяется в локальных координатах формулой $\Delta u = -g^{ij}\nabla_i\nabla_j u$. Здесь и далее ∇ — ковариантная производная, определяемая связностью Леви–Чивиты. Как и любой самосопряженный неотрицательный эллиптический оператор на компактном многообразии, лапласиан имеет дискретный спектр $\mathrm{Sp}(\Delta) = \{0 = \lambda_0 < \lambda_1 \le \dots \le \lambda_k \le \dots \to +\infty\}$, где каждое собственное число повторяется столько раз, какова его кратность. Асимптотическая формула Вейля утверждает, что

$$\lambda_k \sim c_n\Big(\frac{k}{\mathrm{Vol}(M)}\Big)^{2/n} \quad \text{при} \quad k \to \infty \tag{1}$$

с некоторой положительной постоянной c_n.

В какой степени топология и геометрия риманова многообразия определяются спектром лапласиана? В известной лекции М. Каца [14] этот вопрос сформулирован так: “Можно ли услышать форму барабана?” Соответственно этому используется следующая терминология: некоторое свойство (или характеристика) риманова многообразия называется *слышимым*, если оно полностью определяется спектром лапласиана. Например, размерность и объем многообразия слышимы, что следует из формулы Вейля (1).

Начальная задача для уравнения теплопроводности

$$(\partial/\partial t + \Delta)f(x,t) = 0 \quad \text{для} \quad t \ge 0, \quad f(x,0) = f(x)$$

имеет единственное решение для любой функции $f \in L^2(M)$, которое представимо в виде

$$f(x,t) = e^{-t\Delta}f(x) = \int\limits_M K(x,y,t)f(y)\,dM(y),$$

где dM — риманова форма объема. Участвующая в этой формуле функция $K(x,y,t)$ называется *фундаментальным решением* уравнения теплопроводности или *тепловым ядром*. Она имеет простой физический смысл: $K(x,y,t)$ есть значение температуры в точке x в момент времени $t > 0$, вызванной помещенной в начальный момент в точку y единицей тепла. Функция K гладкая на $M \times M \times (0,\infty)$.

Совместим точки x и y, т. е. будем следить за зависимостью от времени температуры в той же точке, в которую единица тепла помещается в начальный момент. Физически довольно очевидно, что лишь незначительная часть энергии покинет заданную окрестность точки x в течение малого времени. Другими словами, асимптотика функции $K(x,x,t)$ при $t \to +0$ должна определяться локальной геометрией многообразия в окрестности точки x. Математическим выражением этого наблюдения является асимптотическое представление

$$K(x,x,t) \sim (4\pi t)^{-n/2}\Big(a_0(x,\Delta) + a_2(x,\Delta)t + a_4(x,\Delta)t^2 + \dots\Big) \text{ при } t \to +0, \tag{2}$$

коэффициенты которого называются *локальными тепловыми инвариантами* лапласиана. Обратим внимание, что эти инварианты традиционно нумеруются четными числами. Это объясняется тем, что в случае многообразия с краем соответствующий асимптотический ряд содержит полуцелые степени переменной t. Каждый инвариант $a_k(x,\Delta)$ является многочленом от тензора кривизны и его ковариантных производных вплоть до некоторого, зависящего от k, порядка. Этот многочлен универсален, т. е. не зависит ни от многообразия (M,g) ни от размерности n. Первые три из этих инвариантов выглядят так:

(3)
$$a_0(x,\Delta)=1,\quad a_2(x,\Delta)=\frac{1}{6}S,\quad a_4(x,\Delta)=\frac{1}{360}(-12\Delta S+5S^2-2|Ric|^2+2|R|^2),$$

где R, Ric, и S — тензор кривизны, тензор Риччи и скалярная кривизна соответственно.

Интегрируя (2), имеем

$$(4)\quad \int\limits_M K(x,x,t)\,dM(x)\sim(4\pi t)^{-n/2}\Big(a_0(\Delta)+a_2(\Delta)t+a_4(\Delta)t^2+\dots\Big)\quad(t\to+0),$$

где $a_k(\Delta)=\int_M a_k(x,\Delta)\,dM(x)$ — *интегральные тепловые инварианты* лапласиана. Хорошо известно, что интеграл из левой части формулы (4) выражается через спектр лапласиана:

$$\mathrm{Tr}_{L^2}e^{-t\Delta}=\int\limits_M K(x,x,t)\,dM(x)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda_k t}.$$

Таким образом,

$$(5)\qquad \sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda_k t}\sim(4\pi t)^{-n/2}\Big(a_0(\Delta)+a_2(\Delta)t+a_4(\Delta)t^2+\dots\Big)\quad(t\to+0),$$

что означает слышимость интегральных тепловых инвариантов. Отметим, что начальный член этой асимптотики

$$\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda_k t}=(4\pi t)^{-n/2}\Big(\mathrm{Vol}\,(M)+o(1)\Big)\quad(t\to+0)$$

эквивалентен формуле Вейля (1).

Для двумерного риманова многообразия (M^2,g), как следует из (3),

(6)
$$a_0(\Delta)=\mathrm{Area}\,(M^2,g),\ a_4(\Delta)=\frac{1}{15}\int\limits_{M^2}K^2\,dA,\ a_2(\Delta)=\frac{1}{3}\int\limits_{M^2}K\,dA=\frac{2\pi}{3}\chi(M^2),$$

где K и $\chi(M^2)$ — гауссова кривизна и эйлерова характеристика поверхности M^2 соответственно. Последнее равенство в (6) написано на основании теоремы Гаусса–Бонне. Компактная ориентируемая поверхность определяется своей эйлеровой характеристикой с точностью до гомеоморфизма. Таким образом, мы можем расслышать топологию ориентируемой поверхности.

Приведем также замечательное по своей простоте доказательство Берже [4] следующего факта: утверждение "поверхность имеет постоянную кривизну" слышимо. Действительно, для любой постоянной c справедливо равенство

$$(7)\qquad \int\limits_{M^2}(c-K)^2\,dA=b_0c^2-2b_1c+b_2,$$

в котором коэффициенты b_i отличаются лишь положительными множителями от инвариантов (6) и могут считаться известными, если известен спектр лапласиана. Следовательно, поверхность имеет постоянную кривизну тогда и только тогда, когда квадратичный трехчлен в правой части (7) имеет действительный корень.

Аналогичное многомерное утверждение, доказанное Патоди [16], звучит следующим образом: тот факт, что "многообразие имеет постоянную скалярную кривизну (или постоянную секционную кривизну)", может быть услышан на основе знания спектров лапласианов на ν-формах для $\nu = 0, 1, 2$. Для этого Патоди показывает, что для лапласиана Δ_ν на ν-формах четвертый интегральный тепловой инвариант выражается формулой

$$a_4(\Delta_\nu) = \int\limits_M (c_1^\nu S^2 + c_2^\nu |Ric|^2 + c_3^\nu |R|^2)\, dM,$$

отличающейся от скалярного случая лишь значениями постоянных коэффициентов c_i^ν. Мы воспроизведем этот результат, см. Теорему 3 ниже. Найдя эти коэффициенты для $\nu = 0, 1, 2$, Патоди замечает, что 3×3-матрица (c_i^ν) невырождена. Следовательно, интегралы

$$b_1 = \int\limits_M S^2\, dM, \quad b_2 = \int\limits_M |Ric|^2\, dM, \quad b_3 = \int\limits_M |R|^2\, dM$$

могут считаться известными. Далее следует примерно такое же рассуждение, как и у Берже.

Для замкнутых римановых многообразий асимптотическое представление (2) было получено Минакшисундарамом [15] одновременно с доказательством существования теплового ядра. Позже это доказательство неоднократно повторялось с различными модификациями и вошло во многие учебники [5, 7]. Мы не будем обсуждать это классическое доказательство здесь.

Для целей настоящей работы важнее менее известное альтернативное доказательство, приведенное в книге [11] Питера Гилки. Доказательство основано на построении псевдодифференциального параметрикса для оператора $\lambda - \Delta$. Этот подход восходит к известной работе Сили [18]. Гилки доказывает существование асимптотического представления (2) не только для Δ, но и для любого самосопряженного эллиптического дифференциального оператора с положительно определенным главным символом. Мы воспроизведем основные моменты доказательства в следующем параграфе. Как отмечает Гилки, метод доказательства может быть использован и для конструктивного вычисления тепловых инвариантов. Но фактически он использует другой подход для вычисления тепловых инвариантов лапласиана Δ_ν на ν-формах. А именно, он показывает, что каждый $a_k(x, \Delta_\nu)$ является однородным многочленом от частных производных метрического тензора, инвариантным относительно действия ортогональной группы. Затем, используя теорему Вейля об инвариантах, он находит базис пространства таких многочленов. Это дает формулу для $a_k(x, \Delta_\nu)$ с точностью до некоторого конечного набора неопределенных постоянных коэффициентов. Последние коэффициенты находятся путем рассмотрения конкретных примеров римановых многообразий и использования функториальных свойств тепловых инвариантов, см. [11, §4.8].

Наш алгоритм вычисления тепловых инвариантов следует непосредственно доказательству теоремы существования. Основная часть алгоритма (как и доказательства) состоит в нахождении параметрикса $R(\lambda)$, обращающего оператор $\lambda - \Delta$ с точностью до сглаживающего оператора. Это эквивалентно решению уравнения

$$\sigma(R(\lambda)(\lambda - \Delta)) \sim 1, \tag{8}$$

где σ означает полный символ псевдодифференциального оператора. Пусть $r = r(x, \xi, \lambda)$ — полный символ искомого оператора $R(\lambda)$ и $r = r_0 + r_1 + \dots$ — его разложение на однородные по (ξ, λ) слагаемые. Стандартное рассуждение микролокального анализа показывает, что уравнение (8) эквивалентно некоторым рекуррентным соотношениям между символами r_k, позволяющим однозначно находить их индукцией по k. После того, как символы $r_k(x, \xi, \lambda)$ найдены, тепловые инварианты $a_k(x, \Delta)$ определяются посредством простых квадратур, см. формулу (26) ниже.

Основная особенность нашего подхода состоит в использовании геометрического исчисления символов, развитого в [19, 20], для решения уравнения (8). Поясним преимущества и недостатки нашего подхода по сравнению с классическим методом решения уравнения (8).

Полный символ лапласиана выражается в локальных координатах формулой

$$\sigma\Delta = g^{ij}(x)\xi_i\xi_j + ig^{ij}(x)\Gamma^k_{ij}(x)\xi_k,$$

где Γ^k_{ij} — символы Кристоффеля. Решая (8) классическим методом, приходится многократно дифференцировать коэффициенты g^{ij} и Γ^k_{ij} последней формулы, что приводит к присутствию высших производных $D^\alpha g_{ij}$ метрического тензора в решении $r = r_0 + r_1 + \dots$ уравнения (8). Между тем мы знаем, что локальные тепловые инварианты $a_k(x, \Delta)$ зависят от $D^\alpha g_{ij}$ лишь посредством тензора кривизны и его ковариантных производных. Таким образом, все вхождения производных $D^\alpha g_{ij}$ должны где-то на последних шагах алгоритма сгруппироваться в блоки, соответствующие известной формуле, выражающей тензор кривизны через метрический тензор. Хотя теоретически этот эффект вполне очевиден, на практике каждая такая группировка выглядит маленьким чудом или ловким фокусом.

Легко понять, что описанные в предыдущем абзаце трудности не связаны со спецификой уравнения (8), а обусловлены недостатками классического исчисления символов. Действительно, полный символ (псевдо)дифференциального оператора не является тензорным объектом, т.е. преобразуется по довольно сложному правилу при замене координат. То же справедливо по отношению к производным $D^\alpha g_{ij}$ метрического тензора.

Геометрическое исчисление символов свободно от указанных недостатков. Пусть теперь σA означает полный геометрический символ (псевдо)дифференциального оператора A в соответствии с определением из [19, §3]. В частности, полный геометрический символ лапласиана выражается равенством

$$\sigma\Delta = |\xi|^2 = g^{ij}(x)\xi_i\xi_j.$$

Уравнение (8) теперь инвариантно относительно замены координат. Более того, это уравнение не содержит явно производных $D^\alpha g_{ij}$ метрического тензора.

Действительно, во всех формулах геометрического исчисления частные производные заменяются ковариантными производными, а метрический тензор ведет себя как постоянная по отношению к ковариантному дифференцированию. Заметим также, что лапласиан становится фактически оператором с постоянными коэффициентами. Разумеется, указанные упрощения не даются даром, а должны быть компенсированы некоторой новой трудностью. Эта трудность заключена в формуле, выражающей полный геометрический символ произведения двух операторов через символы сомножителей. Эта формула значительно сложнее своего классического аналога, хотя и сохраняет его структуру. В частности, эта формула содержит некоторые коэффициенты $\rho_{\alpha,\beta}(x,\xi)$, полиномиально зависящие от ξ и явно выражающиеся через тензор кривизны. Как раз посредством этих коэффициентов тензор кривизны войдет в символы r_k при решении уравнения (8), а затем и в тепловые инварианты.

Как читатель уже понял, для чтения настоящей статьи ему предварительно придется ознакомиться с [19, 20]. Для облегчения этого знакомства отметим, что можно не читать большинство из длинных и нудных доказательств статьи [19, 20]. Достаточно освоить определение псевдодифференциального оператора и его геометрического символа, приведенное в [19, §3], а также формулу для символа произведения [19, Теорема 5.1], включая определение участвующих в этой формуле коэффициентов $\rho_{\alpha,\beta}$ и горизонтальной производной $\overset{h}{\nabla}$. Наконец, придется познакомиться с приведенными в последнем параграфе статьи [20] обобщениями этих понятий на случай операторов на векторных расслоениях, поскольку именно такие операторы рассматриваются в настоящей работе.

Оставшаяся часть статьи организована следующим образом. В следующем разделе мы конспективно повторяем содержание параграфов 1.6 и 1.7 книги [11], посвященных доказательству существования асимптотического представления (2) для произвольного эллиптического оператора P. При этом основное внимание обращается на те моменты доказательства, которые существенны для конструктивного вычисления инвариантов. Начав с буквального повторения [11], мы затем довольно быстро вносим свои изменения, связанные с использованием геометрического исчисления символов. Результатом этого раздела является аналог уравнения (8), сформулированный в терминах геометрических символов. Это уравнение решается в §3, правда, лишь для лапласианоподобного оператора $P = -\nabla^p\nabla_p + A$, где A — алгебраический оператор. Результатом решения являются рекуррентные формулы для символов r_k. Тензор кривизны участвует в этих формулах посредством некоторых коэффициентов $\chi_\alpha^{(p)}$, вычислению которых посвящен §4. Следующие два параграфа содержат вычисление тепловых инвариантов $a_k(x,P)$ $(k=0,2,4)$. В §7 эти же инварианты вычисляются для лапласиана на внешних формах риманова многообразия. В конце §7 мы кратко обсуждаем перспективы и трудности предполагаемой компьютеризации таких вычислений.

Тепловым инвариантам посвящено большое число публикаций как в математической [4, 6, 17, 23] так и в физической литературе [2, 8, 10, 12]. Приведенный в конце статьи список литературы содержит лишь некоторые из основных, на взгляд автора, публикаций; дальнейшие ссылки читатель найдет в приведенных статьях. Вместо термина "тепловые инварианты" физики чаще всего используют название "HDMS-коэффициенты" для коэффициентов ряда (5) (по именам четырех авторов: Hadamard, De Witt, Minakshisundaram, Seeley). Эти коэффициенты играют важную роль во многих задач квантовой теории поля и квантовой гравитации. Читателю, интересующемуся физическими аспектами теории тепловых инвариантов, мы рекомендуем статью АвраMIDи [1], содержащую большой обзорный раздел. В частности, физиками предпринимались попытки компьютеризации вычисления HDMS-коэффициентов для различных эллиптических операторов [3, 13]. Насколько автор может судить, предлагаемый в настоящей статье подход для компьютеризации вычисления тепловых инвариантов является новым, ничего похожего в существующей литературе автору найти не удалось.

2. Параметрикс оператора $\lambda I - P$

Пусть (M, g) — замкнутое риманово многообразие размерности n и V — эрмитово векторное расслоение над M. Через $C^\infty(V)$ обозначаем пространство гладких сечений этого расслоения. Термин “гладкий” используется как синоним “класса C^∞”. Через V_x обозначается слой V над точкой $x \in M$. Через $\operatorname{End} V$ обозначаем векторное расслоение над M, слой которого над x совпадает с пространством $\operatorname{End} V_x$ всех линейных операторов $V_x \to V_x$. Точки кокасательного расслоения T^*M обозначаются парами (x, ξ), где $x \in M$ и $\xi \in T^*_xM$.

Рассмотрим самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор $P : C^\infty(V) \to C^\infty(V)$ порядка $\mu > 0$ с положительно определенным главным символом. Его спектр $\operatorname{Sp}(P) = \{\lambda_0 \le \lambda_1 \le \dots \le \lambda_k \le \dots \to +\infty\}$ действителен и ограничен снизу. Начальная задача

$$(\partial/\partial t + P)f(x, t) = 0 \quad \text{при} \quad t \ge 0, \quad f(x, 0) = f(x)$$

имеет единственное решение для любой функции $f \in L^2(M)$, которое представимо в виде

$$f(t, x) = e^{-tP}f(x) = \int\limits_M K_P(x, y, t)f(y)\,dM(y) \tag{9}$$

с гладкой на $M \times M \times (0, \infty)$ функцией K_P, значение которой в точке (x, y, t) является линейным оператором из V_y в V_x.

Теорема 1. *Пусть V — эрмитово векторное расслоение над замкнутым n-мерным римановым многообразием M и $P : C^\infty(V) \to C^\infty(V)$ — самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор порядка $\mu > 0$ с положительно определенным главным символом. Справедливо асимптотическое представление*

$$K_P(x, x, t) \sim (2^\mu \pi^{\mu-1} t)^{-n/\mu}\Big(e_0(x, P) + e_2(x, P)t^{2/\mu} + e_4(x, P)t^{4/\mu} + \dots\Big) \tag{10}$$

при $t \to +0$, коэффициенты которого $e_k(\cdot, P) \in C^\infty(\operatorname{End} V)$ выражаются через символ оператора P и его частные производные вплоть до некоторого конечного порядка, зависящего от k.

Пусть $\operatorname{Tr} K_P(x, x, t)$ — след оператора $K_P(x, x, t) \in \operatorname{End} V_x$. Из (10) следует асимптотическое разложение

$$\operatorname{Tr} K_P(x, x, t) \sim (2^\mu \pi^{\mu-1} t)^{-n/\mu}\Big(a_0(x, P) + a_2(x, P)t^{2/\mu} + a_4(x, P)t^{4/\mu} + \dots\Big) \tag{11}$$

при $t \to +0$, коэффициенты которого

$$a_k(x, P) = \operatorname{Tr} e_k(x, P) \tag{12}$$

называются *локальными тепловыми инвариантами* оператора P. Как и в случае лапласиана, *интегральные тепловые инварианты*

$$a_k(P) = \int_M a_k(x,P)\,dM(x)$$

определяются спектром оператора P:

$$\mathrm{Tr}_{L^2} e^{-tP} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-t\lambda_k} \sim (2^\mu \pi^{\mu-1} t)^{-n/\mu}\Big(a_0(P) + a_2(P)t^{2/\mu} + a_4(P)t^{4/\mu} + \dots\Big)$$

при $t \to +0$.

Мы приведем здесь доказательство Теоремы 1, следуя [11], но с некоторыми изменениями, ориентированными на конструктивное вычисление тепловых инвариантов.

Пусть $I \in C^\infty(\mathrm{End}\,V)$ — тождественный оператор. Для комплексного числа $\lambda \notin \mathrm{Sp}(P)$ оператор $\lambda I - P$ имеет ограниченный обратный $(\lambda I - P)^{-1} : L^2(V) \to L^2(V)$. Рассматриваемая как функция переменной λ, *резольвента* $(\lambda I - P)^{-1}$ является голоморфной функцией в $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(P)$. В частности, эта функция голоморфна в комплексной плоскости с разрезом $\mathbb{C}_{cut} = \mathbb{C} \setminus [C,\infty)$, где $C = \inf \mathrm{Sp}(P)$. Обозначим через γ ориентированную кривую в $\mathbb{C}_{cut}$, идущую из точки $\infty + ia$ (с некоторым $a > 0$) в точку $\infty - ia$ и обходящую разрез в положительном направлении. Тогда

$$e^{-tP} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma e^{-t\lambda}(\lambda I - P)^{-1} d\lambda. \tag{13}$$

Резольвента $(\lambda I - P)^{-1}$ не является псевдодифференциальным оператором. Основная идея доказательства состоит в замене множителя $(\lambda I - P)^{-1}$ в формуле (13) некоторым псевдодифференциальным оператором $R(\lambda)$, аппроксимирующим резольвенту $(\lambda I - P)^{-1}$ в подходящем смысле. При этом решающим обстоятельством является правильное понимание роли параметра λ. Мы мыслим этот параметр как переменную той же степени однородности μ, что и главный символ оператора P. В соответствии с этим вводится следующее определение.

Пусть W — векторное расслоение над M и $\mu > 0$. Фиксируем область $\mathbb{C}_{cut} \subset \mathbb{C}$. Для действительного числа k пространство $S^k_\mu(T^*M, W, \lambda)$ символов порядка $\le k$, зависящих от комплексного параметра $\lambda \in \mathbb{C}_{cut}$, состоит из функций $q : T^*M \times \mathbb{C}_{cut} \to W$, удовлетворяющих следующим условиям:
(а) $q(x,\xi,\lambda) \in W_x$ гладко зависит от $(x,\xi,\lambda) \in T^*M \times \mathbb{C}_{cut}$ и голоморфно зависит от λ;
(б) Для всех (α,β,γ) оценка

$$|D^\alpha_x D^\beta_\xi D^\gamma_\lambda q(x,\xi,\lambda)| \le C_{K,\alpha,\beta,\gamma}(1 + |\xi| + |\lambda|^{1/\mu})^{k-|\beta|-\mu|\gamma|} \quad (x \in K)$$

выполняется для любой локальной системы координат на M и для любого компакта K, лежащего в области определения координат.

Говорим, что функция $q(x,\xi,\lambda)$ однородна степени k по (ξ,λ), если

$$q(x, t\xi, t^\mu\lambda) = t^k q(x,\xi,\lambda) \quad \text{при} \quad t \ge 1.$$

Это соответствует нашему представлению о λ как переменной степени однородности μ. Если функция q однородна степени k по (ξ,λ), то она удовлетворяет условию убывания (б).

Пусть V — векторное расслоение над M, снабженное связностью ∇^V. Эта связность, вместе со связностью Леви–Чивиты ∇ риманова многообразия M, позволяет определить ковариантную производную $\nabla : C^\infty(V) \to C^\infty(V \otimes T^*M)$. Более обще, если $\tau^r_s M$ — расслоение (r,s)-тензоров, то корректно определена ковариантная производная $\nabla : C^\infty(V \otimes \tau^r_s M) \to C^\infty(V \otimes \tau^r_{s+1} M)$. Теперь любой дифференциальный оператор $P : C^\infty(V) \to C^\infty(V)$ порядка μ единственным образом представляется в виде $P = p(x, -i\nabla)$, где $p(x,\xi) \in \operatorname{End} V_x$ является многочленом степени μ по ξ. Многочлен $p(x,\xi)$ называется *полным геометрическим символом* дифференциального оператора P. Мы будем писать $p = \sigma P$ для обозначения того, что p есть полный геометрический символ оператора P. Более подробно геометрические символы дифференциальных операторов обсуждаются в [20, §7].

Далее, для векторного расслоения со связностью (V, ∇^V) над римановым многообразием M мы определяем пространство $\Psi^k_\mu(M, \nabla, V, \lambda)$ псевдодифференциальных операторов, полные геометрические символы которых принадлежат пространству $S^k_\mu(T^*M, \operatorname{End} V, \lambda)$, путем буквального повторения определения (8.1) из [19]. Полный геометрический символ оператора

$$Q(\lambda) \in \Psi^k_\mu(M, \nabla, V, \lambda)$$

обозначается через $q(\lambda) = \sigma Q \in S^k_\mu(T^*M, \operatorname{End} V, \lambda)$. Новым обстоятельством здесь является зависимость от параметра λ. Все факты геометрического исчисления символов очевидным образом обобщаются на класс $\Psi^k_\mu(M, \nabla, V, \lambda)$ операторов, голоморфно зависящих от λ, с единственным исключением: для заданной последовательности $q_j \in S^{k-j}_\mu(T^*M, \operatorname{End} V, \lambda)$, вообще говоря, не существует оператора $Q(\lambda) \in \Psi^k_\mu(M, \nabla, V, \lambda)$ с символом $\sigma Q(\lambda) = \sum_{j=0}^\infty q_j(\lambda)$, поскольку сумма ряда не обязательно голоморфна по λ. Эта проблема не возникает для конечных сумм $\sum_{j=0}^{j_0} q_j(\lambda)$. Поэтому, аппроксимируя резольвенту, мы будем вместо асимптотических рядов использовать конечные суммы.

Перейдем непосредственно к доказательству Теоремы 1. Мы ищем решение уравнения

$$\sigma(R(\lambda)(\lambda I - P)) \sim I. \tag{14}$$

Стандартное для микролокального анализа рассуждение показывает, что для любого эллиптического оператора P порядка μ это уравнение имеет единственное решение $R(\lambda)$ с полным геометрическим символом $r = r_0 + r_1 + \dots$, где каждый $r_k = r_k(x,\xi,\lambda) \in S^{-\mu-k}_\mu(T^*M, \operatorname{End} V, \lambda)$ однороден степени $-\mu - k$ по (ξ, λ). В силу указанной в предыдущем абзаце трудности, мы в качестве решения выбираем оператор $R(\lambda) \in \Psi^{-\mu}_\mu(M, \nabla, V, \lambda)$, полным геометрическим символом которого является конечная сумма

$$\sigma R(\lambda) = r = r_0 + \dots + r_{k_0} \tag{15}$$

с достаточно большим k_0. Ради краткости зависимость оператора $R(\lambda)$ от k_0 явно не указана в наших обозначениях. Тогда $R(\lambda) \in \Psi^{-\mu}_\mu(M, \nabla, V, \lambda)$ голоморфно зависит от $\lambda \in \mathbb{C}_{cut}$ и равномерно ограничен по $\lambda \in \gamma$. Поэтому интеграл

$$E(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{-t\lambda} R(\lambda)\, d\lambda \tag{16}$$

сходится и определяет некоторый псевдодифференциальный оператор порядка $-\mu$. Пусть $K_E(x,y,t)$ — ядро Шварца оператора $E(t)$. Сравнение формул (9), (13) и (16) позволяет предположить, что $E(t)$ должен хорошо аппроксимировать оператор e^{-tP}, а функция $K_E(x,y,t)$ должна аппроксимировать тепловое ядро $K_P(x,y,t)$. Действительно, как доказано в [11, Лемма 1.7.3], оценка

$$\|K_P(\cdot,\cdot,t)-K_E(\cdot,\cdot,t)\|_{C^l(M\times M)}\le C_l t^l \quad \text{для} \quad 0<t<1 \tag{17}$$

справедлива для любого l, если $k_0=k_0(l)$ выбрано достаточно большим в (15). Оценка (17) показывает, что функции $K_P(x,x,t)$ и $K_E(x,x,t)$ имеют одинаковую асимптотику при $t\to+0$. Следовательно, если мы установим асимптотическое разложение для K_E

$$\begin{aligned}K_E(x,x,t)\sim(2^\mu\pi^{\mu-1}t)^{-n/\mu}\Big(&e_0(x,P)+e_2(x,P)t^{2/\mu}+\dots\\&+e_{2l}(x,P)t^{2l/\mu}+O(t^{(2l+1)/\mu})\Big)\end{aligned}\tag{18}$$

при $t\to+0$ с некоторым l, то оно же будет справедливым для $K_P(x,x,t)$ при условии, что k_0 выбрано достаточно большим в (15). Если же справедливость (18) будет доказана для любого l при некотором $k_0=k_0(l)$, то это будет доказывать утверждение Теоремы 1, поскольку функция $K_P(x,x,t)$ не зависит от k_0.

Сделаем небольшое отступление, чтобы получить формулу, связывающую геометрический символ $a(x,\xi)$ псевдодифференциального оператора $A\in\Psi(M)$ с его ядром Шварца $K_A(x,y)$. Согласно [19, Определение (3.3)],

$$Au(x)=(2\pi)^{-n}\int\limits_{T_x^*M}\int\limits_{T_xM}e^{-i\langle v,\xi\rangle}a(x,\xi)u(\exp_x v)\,dvd\xi. \tag{19}$$

Ядро Шварца оператора A определяется формулой

$$Au(x)=\int\limits_M K_A(x,y)u(y)dM(y). \tag{20}$$

Чтобы выразить K_A через a, мы повторяем рассуждение, приведенное в [19, стр. 181]. Предполагая, что носитель функции u содержится в достаточно малой окрестности U фиксированной точки x_0 и считая, что $x\in U$, мы делаем замену переменной интегрирования $y=\exp_x v$ в (19)

$$Au(x)=(2\pi)^{-n}\int\limits_{T_x^*M}\int\limits_M e^{-i\langle\exp_x^{-1}y,\xi\rangle}a(x,\xi)\left|\frac{\partial\exp_x^{-1}y}{\partial M(y)}\right|u(y)\,dM(y)d\xi.$$

Сравнивая это с (20), мы видим, что

$$K_A(x,y)=(2\pi)^{-n}\int\limits_{T_x^*M}e^{-i\langle\exp_x^{-1}y,\xi\rangle}a(x,\xi)\left|\frac{\partial\exp_x^{-1}y}{\partial M(y)}\right|d\xi,$$

где $\left|\frac{\partial\exp_x^{-1}y}{\partial M(y)}\right|$ — якобиан отображения $y\mapsto\exp_x^{-1}y$. Этот якобиан очевидно обращается в единицу при $y=x$ и мы получаем

$$K_A(x,x)=(2\pi)^{-n}\int\limits_{T_x^*M}a(x,\xi)\,d\xi. \tag{21}$$

Возвращаемся к рассмотрению оператора $E(t)$, определенного формулой (16). Применяя правило (21) к $E(t)$, получаем

$$K_E(x,x,t)=\frac{(2\pi)^{-n}}{2\pi i}\int\limits_{T_x^*M}\int\limits_{\gamma} e^{-t\lambda} r(x,\xi,\lambda)\,d\lambda d\xi.$$

Подставляя сюда выражение $r=r_0+\dots+r_{k_0}$ из (15), имеем

$$K_E(x,x,t)=K_0(x,x,t)+\dots+K_{k_0}(x,x,t), \tag{22}$$

где

$$K_k(x,x,t)=\frac{(2\pi)^{-n}}{2\pi i}\int\limits_{T_x^*M}\int\limits_{\gamma} e^{-t\lambda} r_k(x,\xi,\lambda)\,d\lambda d\xi. \tag{23}$$

Следуя [11, стр. 54], мы меняем переменные интегрирования в (23) по формулам $\lambda=t^{-1}\lambda'$ и $\xi=t^{-1/\mu}\xi'$. Согласно теореме Коши, в полученном интеграле кривая интегрирования $t\gamma$ может быть заменена первоначальной кривой γ. В итоге имеем

$$K_k(x,x,t)=t^{-n/\mu-1}\frac{(2\pi)^{-n}}{2\pi i}\int\limits_{T_x^*M}\int\limits_{\gamma} e^{-\lambda} r_k(x,t^{-1/\mu}\xi,t^{-1}\lambda)\,d\lambda d\xi.$$

Вспомним, что функция r_k однородна степени $-\mu-k$ по (ξ,λ), т. е.,

$$r_k(x,t^{-1/\mu}\xi,t^{-1}\lambda)=t^{k/\mu+1}r_k(x,\xi,\lambda).$$

Предыдущая формула приобретает вид

$$K_k(x,x,t)=t^{(k-n)/\mu}\frac{(2\pi)^{-n}}{2\pi i}\int\limits_{T_x^*M}\int\limits_{\gamma} e^{-\lambda} r_k(x,\xi,\lambda)\,d\lambda d\xi.$$

Вводя обозначение

$$e_k(x,P)=\frac{\pi^{-n/\mu}}{2\pi i}\int\limits_{T_x^*M}\int\limits_{\gamma} e^{-\lambda} r_k(x,\xi,\lambda)\,d\lambda d\xi, \tag{24}$$

запишем предыдущую формулу в виде

$$K_k(x,x,t)=(2^\mu\pi^{\mu-1}t)^{-n/\mu}e_k(x,P)t^{k/\mu}.$$

Подставляя это значение в (22), имеем

$$\begin{aligned}K_E(x,x,t)=(2^\mu\pi^{\mu-1}t)^{-n/\mu}\Big(e_0(x,P)+e_1(x,P)t^{1/\mu}+e_2(x,P)t^{2/\mu}+\dots\\ +e_{k_0}(x,P)t^{k_0/\mu}\Big).\end{aligned} \tag{25}$$

Легко видеть, что функция $r_k(x,\xi,\lambda)$ нечетна по ξ при нечетном k. Отсюда с помощью (24) следует, что $e_k(x)=0$ при нечетном k. Следовательно, правая часть (25) содержит лишь слагаемые вида $e_{2k}(x,P)t^{2k/\mu}$. Тем самым справедливость (18) установлена для произвольного l. Как мы уже отмечали, это доказывает Теорему 1.

Алгоритм вычисления тепловых инвариантов $a_k(x,P)$ состоит в следующем. Сначала мы должны найти полный геометрический символ

$$r(x,\xi,\lambda)=r_0(x,\xi,\lambda)+r_1(x,\xi,\lambda)+\dots$$

оператора $R(\lambda)$ путем решения уравнения (14). Затем тепловые инварианты находятся по формуле

$$a_k(x,P) = \frac{\pi^{-n/\mu}}{2\pi i} \int\limits_{T_x^*M} \int\limits_{\gamma} e^{-\lambda}\, \mathrm{Tr}\, r_k(x,\xi,\lambda)\, d\lambda d\xi, \tag{26}$$

вытекающей из (12) и (24). Подчеркнем, что в отличие от [11] наш алгоритм не содержит никакого произвола. Действительно, поскольку мы используем геометрическое исчисление символов, уравнение (14) инвариантно или, точнее говоря, оно не меняет своего вида при замене координат.

В случае произвольного эллиптического оператора P решение уравнения (14) является очень трудной задачей в силу сложности формулы для символа произведения, см. [19, формула (7.22)]. В следующем параграфе мы решим это уравнение для $P = -\nabla^p\nabla_p + A$, где A — алгебраический оператор. Лапласиан на формах имеет такой вид.

3. Рекуррентная формула для r_k

Пусть (V, ∇^V) — эрмитово векторное расслоение со связностью над римановым многообразием (M, g). Как мы отмечали в предыдущем параграфе, ковариантная производная ∇ корректно определена на V-значных тензорных полях. В частности, определен оператор $\nabla^p\nabla_p = g^{ij}\nabla_i\nabla_j : C^\infty(V) \to C^\infty(V)$. Здесь и далее $\nabla^i = g^{ij}\nabla_j$ и (g^{ij}) обратная к (g_{ij}) матрица. Мы используем правило Эйнштейна: по повторяющимся в мономе разновысоким индексам подразумевается суммирование от 1 до $n = \dim M$.

Зафиксируем самосопряженный алгебраический оператор $A \in C^\infty(\mathrm{End}\, V)$ и рассмотрим дифференциальный оператор второго порядка на расслоении V

$$P = P_A = -\nabla^p\nabla_p + A : C^\infty(V) \to C^\infty(V). \tag{27}$$

Полный геометрический символ этого оператора

$$(\sigma P)(x,\xi) = |\xi|^2 I + A(x) = g^{ij}(x)\xi_i\xi_j I + A(x).$$

Следовательно, $\sigma(\lambda I - P) = (\lambda - |\xi|^2)I - A$.

Приступаем к решению уравнения (14). Пусть $r = r(x,\xi,\lambda)$ — полный геометрический символ искомого оператора $R(\lambda)$. Согласно [19, Теорема 8.3], уравнение (14) записывается так:

$$\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \overset{v}{\nabla}{}^\alpha r \sum_{\beta,\gamma} \frac{1}{\gamma!} \binom{\alpha}{\beta} (-i\overset{h}{\nabla})^\beta \overset{v}{\nabla}{}^\gamma (\lambda I - |\xi|^2 I - A) \cdot \rho_{\alpha-\beta,\gamma} \sim I. \tag{28}$$

Сделаем несколько пояснений по поводу обозначений. Мы иногда используем центральную точку, чтобы избежать нагромождения скобок в наших формулах. Например, выражение $(-i\overset{h}{\nabla})^\beta \overset{v}{\nabla}{}^\gamma A \cdot \rho_{\alpha-\beta,\gamma}$ означает то же, что $\Big((-i\overset{h}{\nabla})^\beta \overset{v}{\nabla}{}^\gamma A\Big)\rho_{\alpha-\beta,\gamma}$. Вертикальная и горизонтальная производные $\overset{v}{\nabla}$ и $\overset{h}{\nabla}$ определены в [19, §2]. Они перестановочны между собой. Наконец, заметим, что коэффициенты $\rho_{\alpha,\beta}$ формулы (28) в [19] обозначались через $\rho^{\alpha,\beta}$. Использование нижних индексов здесь более естественно, поскольку эти коэффициенты имеют ковариантный характер. Согласно [19, формула (7.24)],

$$\rho_{0,0} = I, \quad \rho_{\alpha,0} = \rho_{0,\alpha} = 0 \quad \text{для} \quad |\alpha| > 0. \tag{29}$$

Поэтому уравнение (28) переписывается так:

$$r(\lambda I-|\xi|^2I-A)+\sum_{|\alpha|>0}\frac{1}{\alpha!}\overset{v}{\nabla}{}^{\alpha}r\sum_{\beta,\gamma}\frac{1}{\gamma!}\binom{\alpha}{\beta}(-i\overset{h}{\nabla})^{\beta}\overset{v}{\nabla}{}^{\gamma}(\lambda I-|\xi|^2I-A)\cdot\rho_{\alpha-\beta,\gamma}\sim I.$$

Выделим слагаемые, соответствующие $\beta=0$, и перепишем уравнение еще раз следующим образом:
(30)

$$\begin{aligned}r(\lambda I-|\xi|^2I-A)+\sum_{|\alpha|>0}\frac{1}{\alpha!}\overset{v}{\nabla}{}^{\alpha}r\Big[\sum_{\gamma}\frac{1}{\gamma!}\overset{v}{\nabla}{}^{\gamma}(\lambda I-|\xi|^2I-A)\cdot\rho_{\alpha,\gamma}\\+\sum_{|\beta|>0}\sum_{\gamma}\frac{1}{\gamma!}\binom{\alpha}{\beta}\overset{v}{\nabla}{}^{\gamma}(-i\overset{h}{\nabla})^{\beta}(\lambda I-|\xi|^2I-A)\cdot\rho_{\alpha-\beta,\gamma}\Big]\sim I.\end{aligned}$$

Конечно, параметр λ следует рассматривать как постоянную по отношению к обоим дифференцированиям, т. е. $\overset{v}{\nabla}\lambda=\overset{h}{\nabla}\lambda=0$. Поэтому $(-i\overset{h}{\nabla})^{\beta}(\lambda I-|\xi|^2I-A)=-(-i\nabla)^{\beta}A$ при $|\beta|>0$. Заметим также, что $\overset{v}{\nabla}A=0$, поскольку A не зависит от ξ. Поэтому суммирование по γ во второй строке формулы (30) сводится к $\gamma=0$. Принимая во внимание (29), мы видим, что суммирование по β во второй строке формулы (30) сводится к $\beta=\alpha$. Таким образом уравнение (30) упрощается до следующего:
(31)

$$r(\lambda I-|\xi|^2I-A)+\sum_{|\alpha|>0}\frac{1}{\alpha!}\overset{v}{\nabla}{}^{\alpha}r\Big(\sum_{|\gamma|>0}\frac{1}{\gamma!}\overset{v}{\nabla}{}^{\gamma}(\lambda I-|\xi|^2I-A)\cdot\rho_{\alpha,\gamma}-(-i\nabla)^{\alpha}A\Big)\sim I.$$

Здесь суммирование по γ ограничено до $|\gamma|>0$ ввиду (29). Фактически это суммирование может быть ограничено до $|\gamma|=1$ и $|\gamma|=2$ поскольку $(\lambda-|\xi|^2)I-A$ является многочленом второго порядка по ξ. Именно,

$$\overset{v}{\nabla}{}^{i}(\lambda I-|\xi|^2I-A)=-\overset{v}{\nabla}{}^{i}|\xi|^2\cdot I=-2\xi^iI,\quad \overset{v}{\nabla}{}^{i}\overset{v}{\nabla}{}^{j}(\lambda I-|\xi|^2I-A)=-2g^{ij}I.$$

Подставляя эти значения в (31), получаем

$$r(\lambda I-|\xi|^2I-A)-\sum_{|\alpha|>0}\frac{1}{\alpha!}\overset{v}{\nabla}{}^{\alpha}r\cdot(g^{ij}\rho_{\alpha,\langle ij\rangle}+2\rho_{\alpha,\langle i\rangle}\xi^i+(-i\nabla)^{\alpha}A)\sim I.$$

См. [19, §2] по поводу обозначения $\langle j_1\dots j_m\rangle$ для мультииндексов. Напомним, что координаты $(x^1,\dots,x^n,\xi_1,\dots,\xi_n)$ используются в качестве независимых переменных на T^*M. Тем не менее мы используем также контравариантные координаты $\xi^i=g^{ij}\xi_j$. После введения обозначений

(32) $$\chi_\alpha=g^{ij}\rho_{\alpha,\langle ij\rangle}+2\rho_{\alpha,\langle i\rangle}\xi^i,$$

наше уравнение приобретает вид

(33) $$r(\lambda I-|\xi|^2I-A)-\sum_{|\alpha|>0}\frac{1}{\alpha!}\overset{v}{\nabla}{}^{\alpha}r\cdot(\chi_\alpha+(-i\nabla)^{\alpha}A)\sim I.$$

Каждая из функций $\rho_{\alpha,\beta}(x,\xi)$ является многочленом степени $\le|\beta|$ по ξ. Поэтому χ_α — многочлен второй степени по ξ и может быть записан в виде

(34) $$\chi_\alpha=\chi_\alpha^{(0)}+\chi_\alpha^{(1)}+\chi_\alpha^{(2)},$$

где $\chi_\alpha^{(p)}$ — однородный многочлен степени p по ξ для $p = 0, 1, 2$. Введем аналогичные обозначения $\rho_{\alpha,\beta}^{(p)}$ для однородных частей многочленов $\rho_{\alpha,\beta}$. Из (32) следует, что

$$\chi_\alpha^{(0)} = g^{ij}\rho_{\alpha,\langle ij\rangle}^{(0)}, \quad \chi_\alpha^{(1)} = g^{ij}\rho_{\alpha,\langle ij\rangle}^{(1)} + \rho_{\alpha,\langle i\rangle}^{(0)}\xi^i, \quad \chi_\alpha^{(2)} = g^{ij}\rho_{\alpha,\langle ij\rangle}^{(2)} + \rho_{\alpha,\langle i\rangle}^{(1)}\xi^i. \tag{35}$$

Мы ищем решение уравнения (33) в виде $r = r_0 + r_1 + \dots$, где $r_k = r_k(x, \xi, \lambda) \in S_2^{-2-k}(T^*M, \mathrm{End}\, V, \lambda)$. Подставляя это выражение и (34) в (33), имеем

$$\begin{aligned}&(r_0 + r_1 + \dots)(\lambda I - |\xi|^2 I - A)\\ &\quad - \sum_{|\alpha|>0} \frac{1}{\alpha!}\overset{v}{\nabla}{}^\alpha(r_0 + r_1 + \dots)\cdot(\chi_\alpha^{(0)} + \chi_\alpha^{(1)} + \chi_\alpha^{(2)} + (-i\nabla)^\alpha A) \sim I.\end{aligned} \tag{36}$$

Напомним, что λ рассматривается как переменная второй степени однородности. Производная $\overset{v}{\nabla}{}^\alpha r_j$ однородна степени $-2 - j - |\alpha|$ по (λ, ξ). Оператор A имеет нулевую степень однородности, в то время как степень однородности коэффициента $\chi_\alpha^{(p)}$ равна p. Приравняв сумму однородных степени нуль слагаемых из левой части уравнения (36) к его правой части, получаем

$$r_0 = (\lambda - |\xi|^2)^{-1} I. \tag{37}$$

Приравняв к нулю сумму однородных степени -1 слагаемых левой части уравнения (36), имеем

$$r_1(\lambda - |\xi|^2) + \sum_{|\alpha|=1} \frac{1}{\alpha!}\overset{v}{\nabla}{}^\alpha r_0 \cdot \chi_\alpha^{(2)} = 0.$$

Как мы убедимся в следующем параграфе, $\chi_\alpha^{(2)} = 0$ при $|\alpha| = 1$. Поэтому предыдущая формула приводит к важному выводу:

$$r_1 = 0. \tag{38}$$

Наконец, приравнивая к нулю сумму однородных слагаемых степени $-k$ ($k \geq 2$), приходим к рекуррентной формуле

$$\begin{aligned}r_k = \frac{1}{\lambda - |\xi|^2}\Big(&r_{k-2}A + \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{|\alpha|=k-j}\frac{1}{\alpha!}\overset{v}{\nabla}{}^\alpha r_j \cdot \chi_\alpha^{(2)}\\ &+ \sum_{j=0}^{k-2}\sum_{|\alpha|=k-j-1}\frac{1}{\alpha!}\overset{v}{\nabla}{}^\alpha r_j \cdot \chi_\alpha^{(1)} + \sum_{j=0}^{k-3}\sum_{|\alpha|=k-j-2}\frac{1}{\alpha!}\overset{v}{\nabla}{}^\alpha r_j \cdot (\chi_\alpha^{(0)} + (-i\nabla)^\alpha A)\Big).\end{aligned}$$

Пределы суммирования в первой сумме могут быть уменьшены до $0 \leq j \leq k-2$ поскольку $\chi_\alpha^{(2)} = 0$ при $|\alpha| = 1$, как уже отмечалось выше. Таким образом формула приобретает вид

$$\begin{aligned}r_k = \frac{1}{\lambda - |\xi|^2}\Big(&r_{k-2}A + \sum_{j=0}^{k-3}\sum_{|\alpha|=k-j-2}\frac{1}{\alpha!}\overset{v}{\nabla}{}^\alpha r_j \cdot (-i\nabla)^\alpha A + \sum_{j=0}^{k-2}\sum_{|\alpha|=k-j}\frac{1}{\alpha!}\overset{v}{\nabla}{}^\alpha r_j \cdot \chi_\alpha^{(2)}\\ &+ \sum_{j=0}^{k-2}\sum_{|\alpha|=k-j-1}\frac{1}{\alpha!}\overset{v}{\nabla}{}^\alpha r_j \cdot \chi_\alpha^{(1)} + \sum_{j=0}^{k-3}\sum_{|\alpha|=k-j-2}\frac{1}{\alpha!}\overset{v}{\nabla}{}^\alpha r_j \cdot \chi_\alpha^{(0)}\Big).\end{aligned}$$

Член $r_{k-2}A$ совпадает со слагаемым первой суммы, соответствующим $j = k-2$. Заметим также, что пределы суммирования в последней сумме могут быть изменены до $0 \leq j \leq k-2$ поскольку $\chi_0^{(0)} = 0$, как мы убедимся в следующем параграфе. Таким образом наша рекуррентная формула приобретает окончательный вид: для $k \geq 2$

(39)

$$r_k = \frac{1}{\lambda - |\xi|^2} \sum_{j=0}^{k-2} \Big(\sum_{|\alpha|=k-j-2} \frac{1}{\alpha!} \overset{v}{\nabla}{}^{\alpha} r_j \cdot (-i\nabla)^{\alpha} A + \sum_{p=0}^{2} \sum_{|\alpha|=k-j-p} \frac{1}{\alpha!} \overset{v}{\nabla}{}^{\alpha} r_j \cdot \chi_{\alpha}^{(2-p)} \Big).$$

Эта формула имеет две важные особенности. Во-первых, она не содержит слагаемых с $j = 1$ поскольку $r_1 = 0$. Во вторых, для вычисления r_k мы должны предварительно вычислить $r_2, \ldots, r_{k-2}$, но не r_{k-1}.

Из (39) с помощью индукции по k легко вытекает следующее свойство четности: $r_k(x, -\xi, \lambda) = (-1)^k r_k(x, \xi, \lambda)$. Мы уже использовали это свойство в предыдущем параграфе, когда доказывали равенство нулю коэффициентов ряда (25), соответствующих нечетным k.

Из формулы (39) следует в частности, что $r_k(x, \xi, \lambda)$ зависит от λ лишь посредством множителей $(\lambda - |\xi|^2)^{-m}$ с различными целыми m. Более точно, для любого k справедливо представление

$$\operatorname{Tr} r_k(x, \xi, \lambda) = \sum_{m=1}^{M_k} \frac{f_{k,m}(x, \xi)}{(\lambda - |\xi|^2)^m},$$

где $f_{k,m}(x, \xi)$ — многочлены по ξ. Ввиду этого обстоятельства оба интегрирования в (26) становятся тривиальными процедурами. Действительно, интегрирование по кривой γ сводится к формуле

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{-\lambda} d\lambda}{(\lambda - |\xi|^2)^m} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} e^{-|\xi|^2}. \tag{40}$$

Справедливость этой формулы становится очевидной, если заметить, что интеграл в левой ее части совпадает с вычетом подынтегральной функции в точке $\lambda = |\xi|^2$. Теперь интегрирование по $T_x^* M$ в (24) с помощью ортонормированного базиса сводится к вычислению интегралов

$$\pi^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2} \xi^{\alpha} \, d\xi$$

для различных значений мультииндекса α. Последний интеграл очевидно равен нулю, если α не является четным. Для четного мультииндекса

$$\pi^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2} \xi^{2\alpha} \, d\xi = \prod_{k=1}^{n} \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} t^{\alpha_k} \, dt = 2^{-|\alpha|} \prod_{k=1}^{n} (2\alpha_k - 1)!!,$$

где $(2m-1)!! = (2m-1)(2m-3)\ldots 1$ со стандартным соглашением $(-1)!! = 1$. В настоящей статье мы будем использовать эту формулу лишь при $|\alpha| \leq 2$ в следующей тензорной форме:

Лемма 1. *Если* $C = (C_{ij})$ *и* $D = (D_{ijkl})$ *— тензорные поля на n-мерном римановом многообразии (M, g), то*

$$\pi^{-n/2} \int\limits_{T_x^*M} e^{-|\xi|^2}\, d\xi = 1,$$

$$\pi^{-n/2} \int\limits_{T_x^*M} e^{-|\xi|^2} C_{ij}\xi^i\xi^j\, d\xi = \frac{1}{2} g^{ij} C_{ij},$$

$$\pi^{-n/2} \int\limits_{T_x^*M} e^{-|\xi|^2} D_{ijkl}\xi^i\xi^j\xi^k\xi^l\, d\xi = \frac{3}{4}(g^2)^{ijkl} D_{ijkl},$$

где

$$(g^2)^{ijkl} = \sigma(ijkl)(g^{ij}g^{kl}) = \frac{1}{3}(g^{ij}g^{kl} + g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk}).$$

4. Коэффициенты $\chi_\alpha^{(p)}$

Пусть (V, ∇^V) — векторное расслоение со связностью над римановым многообразием (M, g). Пусть $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_{ij})$ — тензор кривизны связности ∇^V. Таким образом, $\mathcal{R}_{ij}(x) \in \operatorname{End} V_x$ кососимметричен по (i, j) и ведет себя как обычный тензор второй валентности при замене координат. Более подробно этот тензор обсуждается в [19, §7], где этот тензор обозначается $\mathcal{E}_{ij}$. Пусть $R = (R^i_{jkl})$ — тензор кривизны связности Леви–Чивиты.

Формула, выражающая полный геометрический символ произведения двух псевдодифференциальных операторов через символы сомножителей [19, Теорема 8.3], содержит некоторые коэффициенты $\rho_{\alpha,\beta}$, которые являются операторно-значными функциями на T^*M, т.е. $\rho_{\alpha,\beta}(x,\xi) \in \operatorname{End} V_x$ для $(x,\xi) \in T^*M$. Эти коэффициенты являются многочленами по ξ, коэффициенты которых выражаются через тензоры кривизны R и $\mathcal{R}$ и их ковариантные производные. Выпишем здесь несколько первых из этих коэффициентов, воспроизведя [19, формулы (7.24)–(7.30)]. В нижеследующих формулах I — тождественный оператор и $\sigma(ij\dots k)$ означает симметрирование по индексам $(ij\dots k)$.

$$\rho_{0,0} = I, \quad \rho_{\alpha,0} = \rho_{0,\alpha} = 0 \quad \text{при} \quad |\alpha| > 0, \tag{41}$$

$$\rho_{\langle j\rangle,\langle k\rangle} = -\frac{1}{2}\mathcal{R}_{jk}, \tag{42}$$

$$\rho_{\langle j\rangle,\langle kl\rangle} = -\frac{1}{3}(R^p_{klj} + R^p_{lkj})\xi_p I - \frac{1}{6}\left((-i\nabla)_k\mathcal{R}_{jl} + (-i\nabla)_l\mathcal{R}_{jk}\right), \tag{43}$$

$$\rho_{\langle jk\rangle,\langle l\rangle} = -\frac{1}{6}(R^p_{jlk} + R^p_{klj})\xi_p I - \frac{1}{3}\left((-i\nabla)_j\mathcal{R}_{kl} + (-i\nabla)_k\mathcal{R}_{jl}\right), \tag{44}$$

$$\rho_{\langle j\rangle,\langle klm\rangle} = \frac{1}{4}\sigma(klm)\Big(2(-i\nabla)_k R^p_{ljm}\xi_p I - (-i\nabla)_k(-i\nabla)_l\mathcal{R}_{jm} + R^p_{klj}\mathcal{E}_{mp}\Big), \tag{45}$$

$$\rho_{\langle jkl\rangle,\langle m\rangle} = \frac{1}{4}\sigma(jkl)\Big(2(-i\nabla)_j R^p_{klm}\xi_p I - 3(-i\nabla)_j(-i\nabla)_k\mathcal{R}_{lm} - R^p_{jkm}\mathcal{R}_{lp}\Big), \tag{46}$$

$$\rho_{\langle jk\rangle,\langle lm\rangle} = \frac{1}{6}\sigma(jk)\sigma(lm)\Big(5(-i\nabla)_j R^p_{lkm}\xi_p I + (-i\nabla)_l R^p_{jkm}\xi_p I \\ -3(-i\nabla)_j(-i\nabla)_l \mathcal{R}_{km} + 2R^p_{lmj}\mathcal{R}_{kp} + R^p_{jkl}\mathcal{R}_{pm} + 3\mathcal{R}_{jl}\mathcal{R}_{km}\Big). \tag{47}$$

Существует эффективная процедура вычисления $\rho_{\alpha,\beta}$, приведенная в [21]. Правда, объем вычислений быстро растет с ростом $|\alpha|+|\beta|$.

Глядя на формулы (41)–(47), можно сделать следующие выводы о структуре коэффициентов $\rho_{\alpha,\beta}$, которые затем нетрудно доказать, исходя из их определения.

(1) $\rho_{\alpha,\beta}$ является однородным многочленом степени $|\alpha|+|\beta|$ от четырех переменных $(R,\mathcal{R},\nabla,\xi)$, если степень однородности R и $\mathcal{R}$ считается равной двум, а степень однородности ∇ и ξ равна единице.

(2) Степень этого многочлена по ξ удовлетворяет оценке

$$\deg_\xi \rho_{\alpha,\beta} \le \min\{|\alpha|,|\beta|,(|\alpha|+|\beta|)/3\}. \tag{48}$$

(3) Переменная ξ входит в $\rho_{\alpha,\beta}$ всегда вместе с множителем R, точнее, в виде суммы $R^p_{ijk}\xi_p$. Отсюда, в частности, следует последнее из трех неравенств, содержащихся в (48).

Формулы (41)–(47) были получены автором "вручную". Позже В. Джепко [9], используя компьютерный пакет символьных вычислений MAPLE, вычислил $\rho_{\alpha,\beta}$ для $|\alpha|+|\beta|=5$, правда, лишь в скалярном случае, т. е. когда $\mathcal{R}=0$. Нам понадобятся следующие две из полученных им формул:

(49)

$$\rho_{\langle ijk\rangle,\langle lm\rangle} = -\frac{1}{30}\sigma(ijk)\sigma(lm)\Big(27\nabla_{ij}R^p_{lkm} + 7\nabla_{il}R^p_{jkm} + 2\nabla_{li}R^p_{jkm} \\ - 4R^q_{ijl}R^p_{qkm} - 12R^q_{ijl}R^p_{mkq} - 16R^q_{lim}R^p_{jkq}\Big)\xi_p,$$

$$\rho_{\langle ijkl\rangle,\langle m\rangle} = \frac{1}{15}\sigma(ijkl)\Big(-9\nabla_{ij}R^p_{klm} + 7R^q_{ijm}R^p_{klq}\Big)\xi_p. \tag{50}$$

Пусть $\rho^{(p)}_{\alpha,\beta}$ — однородная по ξ степени p часть многочлена $\rho_{\alpha,\beta}$. Будучи справедливыми в скалярном случае, (49)–(50) влекут справедливость следующих формул в общем случае:

(51)

$$\rho^{(1)}_{\langle ijk\rangle,\langle lm\rangle} = -\frac{1}{30}\sigma(ijk)\sigma(lm)\Big(27\nabla_{ij}R^p_{lkm} + 7\nabla_{il}R^p_{jkm} + 2\nabla_{li}R^p_{jkm} \\ - 4R^q_{ijl}R^p_{qkm} - 12R^q_{ijl}R^p_{mkq} - 16R^q_{lim}R^p_{jkq}\Big)\xi_p I + \dots,$$

$$\rho^{(1)}_{\langle ijkl\rangle,\langle m\rangle} = \frac{1}{15}\sigma(ijkl)\Big(-9\nabla_{ij}R^p_{klm} + 7R^q_{ijm}R^p_{klq}\Big)\xi_p I + \dots, \tag{52}$$

где многоточие означает сумму некоторых слагаемых, линейно зависящих от $\mathcal{R}$. Действительно, дополнительные по сравнению с (49)–(50) слагаемые в формулах (51)–(52) должны иметь вид $a^{qrs}(R,\mathcal{R},\nabla)R^p_{qrs}\xi_p$, где многочлен $a^{qrs}(R,\mathcal{R},\nabla)$ имеет вторую степень однородности с учетом нашего соглашения о степени однородности переменных $(R,\mathcal{R},\nabla)$. Следовательно, a^{qrs} линеен по $\mathcal{R}$.

В своей кандидатской диссертации В. Джепко утверждает, что ресурсы любого современного компьютера не достаточны для вычисления $\rho_{\alpha,\beta}$ при $|\alpha|+|\beta|=6$. Мы более оптимистичны в этом вопросе. Вполне вероятно, прогресс здесь может быть достигнут путем усовершенствования алгоритма либо путем создания специализированной компьютерной программы. Действительно, любой универсальный компьютерный пакет, включая MAPLE, далек от оптимального использования компьютерных ресурсов. Наконец, самый важный аргумент в пользу нашего оптимистичного мнения состоит в следующем. Для вычисления тепловых инвариантов надо знать коэффициенты $\rho_{\alpha,\beta}$ лишь для $|\beta| \le 2$. Скорее всего, можно найти быстрый алгоритм для вычисления последних коэффициентов, который не использует $\rho_{\alpha,\beta}$ с $|\beta| > 2$.

М. Скокан [22] с помощью компьютера вычислил старшие члены многочленов $\rho_{\alpha,\beta}$ при $|\alpha|+|\beta| = 6$. Из его результатов нам понадобится лишь следующая формула:

$$\rho^{(2)}_{\langle ijkl\rangle,\langle pq\rangle} = \frac{2}{3}\sigma(ijkl)\sigma(pq)(R^r_{ijp}R^s_{klq}\xi_r\xi_s)I. \tag{53}$$

Скокан вывел эту формулу лишь в скалярном случае. Тем не менее формула справедлива и в общем случае, что устанавливается посредством тех же аргументов, что приведены выше для обоснования (51)–(52).

В заключение параграфа мы выпишем несколько из коэффициентов $\chi^{(p)}_\alpha$ $(p = 0, 1, 2)$, участвующих в рекуррентной формуле (39). Нижеследующие формулы получены подстановкой значений (41)–(53) в определение (35) коэффициентов $\chi^{(p)}_\alpha$. Как и выше, многоточием обозначается сумма некоторых дополнительных слагаемых, линейно зависящих от $\mathcal{R}$.

$$\chi^{(0)}_0 = 0, \quad \chi^{(1)}_0 = 0, \quad \chi^{(2)}_0 = 0, \tag{54}$$

$$\chi^{(0)}_{\langle i\rangle} = 0 + \dots, \quad \chi^{(1)}_{\langle i\rangle} = \frac{2}{3}R_{ip}\xi^p I - \frac{1}{2}\mathcal{R}_{ip}\xi^p, \quad \chi^{(2)}_{\langle i\rangle} = 0, \tag{55}$$

$$\chi^{(0)}_{\langle ij\rangle} = \frac{1}{2}g^{pq}\mathcal{R}_{ip}\mathcal{R}_{jq} + \dots, \quad \chi^{(2)}_{\langle ij\rangle} = -\frac{1}{3}R_{ipjq}\xi^p\xi^q I, \tag{56}$$

$$\begin{aligned}\chi^{(1)}_{\langle ijk\rangle} = -\frac{1}{30}\sigma(ijk)\Big(&27\nabla_{ij}R_{kp} + 7\nabla_i\nabla^q R_{pjkq} + 2\nabla^q\nabla_i R_{pjkq}\\ &- 4R^{q\cdot\cdot r}_{\cdot ij\cdot}R_{pqkr} - 12R^{q\cdot\cdot r}_{\cdot ij\cdot}R_{prkq} - 16R^q_i R_{pjkq}\Big)\xi^p I + \dots,\end{aligned} \tag{57}$$

$$\chi^{(2)}_{\langle ijkl\rangle} = \frac{2}{5}\sigma(ijkl)(3\nabla_{ij}R_{kplq} + 4R_{pijr}R^r_{klq})\xi^p\xi^q I + \dots. \tag{58}$$

5. Вычисление тепловых инвариантов a_0 и a_2

Напомним, что $R = (R_{ijkl})$ — тензор кривизны риманова многообразия. Тензор кривизны Риччи $Ric = (R_{ij})$ определяется равенством $R_{ij} = g^{pq}R_{ipjq}$, а скалярная кривизна — формулой $S = g^{ij}R_{ij}$. Мы нормализуем тензор кривизны так, что скалярная кривизна единичной двумерной сферы равна $+1$. Это отличается знаком от выбора Гилки [11]. Обозначим также $\Delta S = -\nabla^p\nabla_p S$. Напомним, что $|Ric|^2 = R_{ij}R^{ij}$ и $|R|^2 = R_{ijkl}R^{ijkl}$.

Теорема 2. *Пусть* (V, ∇^V) *— эрмитово векторное расслоение со связностью над замкнутым римановым многообразием* (M, g). *Обозначим через* d *размерность слоя* V. *Предположим, что тензор кривизны связности* ∇^V *удовлетворяет условию*

$$\operatorname{Tr}\mathcal{R}_{ij} = 0. \tag{59}$$

Выберем самосопряженный оператор $A \in C^\infty(\operatorname{End} V)$ *и определим дифференциальный оператор второго порядка* $P = P_A$ *на* V *формулой* (27). *Тогда первые три из тепловых инвариантов оператора* P *таковы:*

$$(а) \qquad a_0(x, P) = d,$$

$$(б) \qquad a_2(x, P) = \frac{d}{6}S - \operatorname{Tr} A,$$

$$\begin{aligned}(в) \qquad a_4(x, P) = {} & \frac{d}{360}(-12\Delta S + 5S^2 - 2|Ric|^2 + 2|R|^2) \\ & + \frac{1}{12}\operatorname{Tr}(g^{ik}g^{jl}\mathcal{R}_{ij}\mathcal{R}_{kl} - 2\nabla^p\nabla_p A + 6A^2 - 2SA).\end{aligned}$$

Разумеется, этот результат не нов, ср. с [11, Теорема 4.8.16]. Нашей главной новостью является доказательство, состоящее из вычислений, строго следующих приведенному в конце второго параграфа алгоритму. По нашему мнению, этот подход может быть компьютеризован с целью вычисления последующих тепловых инвариантов $a_k(x, P)$ $(k = 6, 8, \dots)$. Впрочем, мы предвидим некоторые трудности такой компьютеризации. Мы их обсудим в заключительном параграфе.

Сделаем пару замечаний об условии (59). Оно заведомо выполняется, если связность ∇^V совместна с эрмитовым скалярным произведением на V. В частности, оно выполняется в случае лапласиана на формах. Это условие не используется в нашем доказательстве утверждений (а) и (б) теоремы. Что касается доказательства утверждения (в), мы используем это условие для сокращения наших вычислений. А именно, условие (59) позволяет игнорировать линейные по $\mathcal{R}$ слагаемые в любой формуле, если мы собираемся применить оператор Tr к этой формуле. Вполне вероятно, Теорема 2 справедлива и без условия (59), но в таком случае наши вычисления намного удлинятся. В формулировке Теоремы 4.8.16 из [11] условие совместности связности с эрмитовым скалярным произведением явно не оговорено, хотя в дальнейшем оно упоминается при обсуждении лапласиана на формах.

Начинаем с вычисления $a_0(x, P)$. Согласно (24) и (37),

$$a_0(x, P) = \frac{\pi^{-n/2}}{2\pi i}\int\limits_{T_x^*M}\int\limits_{\gamma} e^{-\lambda}\operatorname{tr} r_0(x, \xi, \lambda)\, d\lambda d\xi = d\pi^{-n/2}\int\limits_{T_x{*}M}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{e^{-\lambda}d\lambda}{\lambda - |\xi|^2}\Big)d\xi.$$

Применяя (40) и Лемму 1, получаем искомый результат:

$$a_0(x, P) = d\pi^{-n/2}\int\limits_{T_x^*M} e^{-|\xi|^2}d\xi = d.$$

Мы используем сокращенное обозначение для высших производных

$$\overset{v}{\nabla}{}^{i_1\dots i_k} = \overset{v}{\nabla}{}^{i_1}\dots\overset{v}{\nabla}{}^{i_k}.$$

Найдем производные функции r_0 до четвертого порядка включительно путем дифференцирования равенства (37)

$$(60)\qquad \overset{v}{\nabla}{}^i r_0 = \frac{2\xi^i}{(\lambda-|\xi|^2)^2}, \qquad \overset{v}{\nabla}{}^{ij} r_0 = \frac{2g^{ij}}{(\lambda-|\xi|^2)^2} + \frac{8\xi^i\xi^j}{(\lambda-|\xi|^2)^3},$$

$$(61)\qquad \overset{v}{\nabla}{}^{ijk} r_0 = 8\frac{g^{ij}\xi^k + g^{ik}\xi^j + g^{jk}\xi^i}{(\lambda-|\xi|^2)^3} + 48\frac{\xi^i\xi^j\xi^k}{(\lambda-|\xi|^2)^4},$$

(62)
$$\begin{aligned}\overset{v}{\nabla}{}^{ijkl} r_0 = {} & \frac{8}{(\lambda-|\xi|^2)^3}(g^{ij}g^{kl} + g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk}) + \frac{384}{(\lambda-|\xi|^2)^5}\xi^i\xi^j\xi^k\xi^l \\ & + \frac{48}{(\lambda-|\xi|^2)^4}(g^{il}\xi^k\xi^l + g^{ik}\xi^j\xi^l + g^{il}\xi^j\xi^k + g^{jk}\xi^i\xi^l + g^{jl}\xi^i\xi^k + g^{kl}\xi^i\xi^j).\end{aligned}$$

Для краткости мы опустили множитель I в правых частях формул (60)–(62).

Теперь вычисляем $r_2(x,\xi,\lambda)$. Согласно (39),

$$r_2 = \frac{1}{\lambda-|\xi|^2}\Big(r_0 A + \frac{1}{2}\overset{v}{\nabla}{}^{ij} r_0 \cdot \chi^{(2)}_{\langle ij\rangle} + \overset{v}{\nabla}{}^i r_0 \cdot \chi^{(1)}_{\langle i\rangle}\Big).$$

Подставим сюда значения (37) и (60) символа r_0 и его производных. Затем подставим в получившееся равенство значения (55) и (56) коэффициентов $\chi^{(1)}_{\langle i\rangle}$ и $\chi^{(2)}_{\langle ij\rangle}$. В итоге получим

$$(63)\qquad r_2 = \frac{A}{(\lambda-|\xi|^2)^2} + \frac{1}{3}\Big[\frac{2R_{ij}\xi^i\xi^j}{(\lambda-|\xi|^2)^3} - \frac{8R_{ijkl}\xi^i\xi^j\xi^k\xi^l}{(\lambda-|\xi|^2)^4}\Big]I + \frac{2\mathcal{R}_{ij}\xi^i\xi^j}{(\lambda-|\xi|^2)^3}.$$

Последнее слагаемое в правой части равно нулю поскольку множитель $\mathcal{R}_{ij}$ кососимметричен по (i,j) в то время как множитель $\xi^i\xi^j$ симметричен по этим индексам. Второе слагаемое в квадратных скобках равно нулю по той же причине. Таким образом мы приходим к окончательной формуле

$$(64)\qquad r_2 = \frac{1}{(\lambda-|\xi|^2)^2}A + \frac{2}{3}\frac{R_{ij}\xi^i\xi^j}{(\lambda-|\xi|^2)^3}I.$$

Теперь вычисляем $a_2(x,P)$. Возьмем след от обеих частей (64), умножим результат на $e^{-\lambda}$ и проинтегрируем по кривой γ с помощью (40)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma e^{-\lambda}\,\mathrm{Tr}\, r_2\, d\lambda = e^{-|\xi|^2}\Big(-\,\mathrm{Tr}\, A + \frac{d}{3}R_{ij}\xi^i\xi^j\Big).$$

Интегрируем это равенство по $T^*_x M$ с помощью Леммы 1

$$\frac{\pi^{-n/2}}{2\pi i}\int\limits_{T^*_x M}\int\limits_\gamma e^{-\lambda}\,\mathrm{Tr}\, r_2\, d\lambda = -\,\mathrm{Tr}\, A + \frac{d}{6}S.$$

В силу (24) это совпадает с утверждением (б) Теоремы 2.

6. Вычисление инварианта a_4

Поскольку $r_1 = 0$, формула (39) дает для $k = 4$

$$r_4 = \frac{1}{\lambda - |\xi|^2}\Big(r_2 A - \frac{1}{2}\overset{v}{\nabla}{}^{ij} r_0 \cdot \nabla_{ij} A + \overset{v}{\nabla}{}^{i} r_2 \cdot \chi^{(1)}_{\langle i\rangle} + \frac{1}{2}\overset{v}{\nabla}{}^{ij} r_2 \cdot \chi^{(2)}_{\langle ij\rangle} + \frac{1}{2}\overset{v}{\nabla}{}^{ij} r_0 \cdot \chi^{(0)}_{\langle ij\rangle} + \frac{1}{6}\overset{v}{\nabla}{}^{ijk} r_0 \cdot \chi^{(1)}_{\langle ijk\rangle} + \frac{1}{24}\overset{v}{\nabla}{}^{ijkl} r_0 \cdot \chi^{(2)}_{\langle ijkl\rangle}\Big). \tag{65}$$

Прежде всего исключим r_2 из этой формулы. Дифференцируя (64) по ξ, получаем

$$\overset{v}{\nabla}{}^{i} r_2 = \frac{1}{(\lambda - |\xi|^2)^3} A + \frac{4}{3}\frac{R^i_p \xi^p}{(\lambda - |\xi|^2)^3} I + 4\frac{R_{pq}\xi^p\xi^q\xi^i}{(\lambda - |\xi|^2)^4} I, \tag{66}$$

$$\overset{v}{\nabla}{}^{ij} r_2 = \frac{4g^{ij}}{(\lambda - |\xi|^2)^3} A + \frac{24\xi^i\xi^j}{(\lambda - |\xi|^2)^4} A + \frac{4}{3}\frac{R^{ij}}{(\lambda - |\xi|^2)^3} I + 4\frac{2R^i_p\xi^p\xi^j + 2R^j_p\xi^p\xi^i + g^{ij}R_{pq}\xi^p\xi^q}{(\lambda - |\xi|^2)^4} I + 32\frac{R_{pq}\xi^p\xi^q\xi^i\xi^j}{(\lambda - |\xi|^2)^5} I. \tag{67}$$

Подставляем выражения (64) и (66)–(67) в (65) и затем группируем слагаемые в правой части получившегося равенства в три группы так, что первая группа содержит все слагаемые, зависящие от A; во вторую группу входят слагаемые не зависящие от A, но зависящие от r_0; а третья группа содержит все остальные слагаемые. Таким образом приходим к равенству

$$r_4 = r_4^1 + r_4^2 + r_4^3,$$

где

$$r_4^1 = -\frac{1}{2}\frac{1}{\lambda - |\xi|^2}\overset{v}{\nabla}{}^{ij} r_0 \cdot \nabla_{ij} A + \frac{1}{(\lambda - |\xi|^2)^3} A^2 + \frac{2}{3}\frac{R_{ij}\xi^i\xi^j}{(\lambda - |\xi|^2)^4} A + \frac{4\xi^i}{(\lambda - |\xi|^2)^4} A\chi^{(1)}_{\langle i\rangle} + \frac{2g^{ij}}{(\lambda - |\xi|^2)^4} A\chi^{(2)}_{\langle ij\rangle} + \frac{12\xi^i\xi^j}{(\lambda - |\xi|^2)^5} A\chi^{(2)}_{\langle ij\rangle}, \tag{68}$$

$$r_4^2 = \frac{1}{\lambda - |\xi|^2}\Big(\frac{1}{2}\overset{v}{\nabla}{}^{ij} r_0 \cdot \chi^{(0)}_{\langle ij\rangle} + \frac{1}{6}\overset{v}{\nabla}{}^{ijk} r_0 \cdot \chi^{(1)}_{\langle ijk\rangle} + \frac{1}{24}\overset{v}{\nabla}{}^{ijkl} r_0 \cdot \chi^{(2)}_{\langle ijkl\rangle}\Big), \tag{69}$$

$$r_4^3 = \frac{4R_{pq}\xi^p\xi^q\xi^i}{(\lambda - |\xi|^2)^5}\chi^{(1)}_{\langle i\rangle} + \frac{4}{3}\frac{R^i_p\xi^p}{(\lambda - |\xi|^2)^4}\chi^{(1)}_{\langle i\rangle} + \frac{2}{3}\frac{R^{ij}}{(\lambda - |\xi|^2)^4}\chi^{(2)}_{\langle ij\rangle} + \frac{8R^i_p\xi^p\xi^j + 2g^{ij}R_{pq}\xi^p\xi^q}{(\lambda - |\xi|^2)^5}\chi^{(2)}_{\langle ij\rangle} + \frac{16R_{pq}\xi^p\xi^q\xi^i\xi^j}{(\lambda - |\xi|^2)^6}\chi^{(2)}_{\langle ij\rangle}. \tag{70}$$

Сначала вычисляем r_4^1. Подставляем в (68) значение (60) производной $\overset{v}{\nabla}{}^{ij} r_0$

$$r_4^1 = -\frac{g^{ij}}{(\lambda - |\xi|^2)^3}\nabla_{ij} A - \frac{4\xi^i\xi^j}{(\lambda - |\xi|^2)^4}\nabla_{ij} A + \frac{1}{(\lambda - |\xi|^2)^3} A^2 + \frac{2}{3}\frac{R_{ij}\xi^i\xi^j}{(\lambda - |\xi|^2)^4} A + \frac{4\xi^i}{(\lambda - |\xi|^2)^4} A\chi^{(1)}_{\langle i\rangle} + \frac{2g^{ij}}{(\lambda - |\xi|^2)^4} A\chi^{(2)}_{\langle ij\rangle} + \frac{12\xi^i\xi^j}{(\lambda - |\xi|^2)^5} A\chi^{(2)}_{\langle ij\rangle}.$$

В этой формуле уже явно указана зависимость от λ. Умножим эту формулу на $e^{-\lambda}$ и проинтегрируем по γ с помощью (40)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} e^{-\lambda} r_4^1\,d\lambda = e^{-|\xi|^2}\Big(-\frac{1}{2}\nabla^p\nabla_p A+\frac{2}{3}\nabla_{ij}A\xi^i\xi^j+\frac{1}{2}A^2-\frac{1}{9}AR_{ij}\xi^i\xi^j - \frac{2}{3}A\chi^{(1)}_{\langle i\rangle}\xi^i-\frac{1}{3}Ag^{ij}\chi^{(2)}_{\langle ij\rangle}+\frac{1}{2}A\chi^{(2)}_{\langle ij\rangle}\xi^i\xi^j\Big).$$

Далее, подставляем сюда значения (55) and (56) коэффициентов $\chi^{(1)}_{\langle i\rangle}$ и $\chi^{(2)}_{\langle ij\rangle}$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} e^{-\lambda} r_4^1\,d\lambda = e^{-|\xi|^2}\Big(-\frac{1}{2}\nabla^p\nabla_p A+\frac{2}{3}\nabla_{ij}A\xi^i\xi^j+\frac{1}{2}A^2-\frac{1}{9}AR_{ij}\xi^i\xi^j + \frac{2}{3}A\mathcal{R}_{ij}\xi^i\xi^j-\frac{4}{9}AR_{ij}\xi^i\xi^j+\frac{2}{9}AR_{ij}\xi^i\xi^j-\frac{1}{3}AR_{ikjl}\xi^i\xi^j\xi^k\xi^l\Big).$$

Пятое и последнее слагаемые в скобках очевидно равны нулю и формула принимает вид

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} e^{-\lambda} r_4^1\,d\lambda = e^{-|\xi|^2}\Big(-\frac{1}{2}\nabla^p\nabla_p A+\frac{2}{3}\nabla_{ij}A\xi^i\xi^j+\frac{1}{2}A^2-\frac{1}{3}AR_{ij}\xi^i\xi^j\Big).$$

Интегрируя это равенство по T^*_xM с помощью Леммы 1, получаем окончательно для r_4^1

$$\frac{\pi^{-n/2}}{2\pi i}\int\limits_{T^*_xM}\int\limits_{\gamma} e^{-\lambda}\,\mathrm{Tr}\, r_4^1\,d\lambda d\xi = \mathrm{Tr}\Big(-\frac{1}{6}\nabla^p\nabla_p A+\frac{1}{2}A^2-\frac{1}{6}SA\Big). \tag{71}$$

Далее, вычисляем r_4^3. В формуле (70) зависимость от λ указана явно поскольку коэффициенты $\chi^{(p)}_{\alpha}$ не зависят от λ. Умножим (70) на $e^{-\lambda}$ и проинтегрируем по γ с помощью (40)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} e^{-\lambda} r_4^3\,d\lambda = e^{-|\xi|^2}\Big(\frac{1}{6}R_{pq}\xi^p\xi^q\xi^i\chi^{(1)}_{\langle i\rangle}-\frac{2}{9}R^i_p\xi^p\chi^{(1)}_{\langle i\rangle}-\frac{1}{9}R^{ij}\chi^{(2)}_{\langle ij\rangle} + \frac{1}{12}(4R^i_p\xi^p\xi^j+g^{ij}R_{pq}\xi^p\xi^q)\chi^{(2)}_{\langle ij\rangle}-\frac{2}{15}R_{pq}\xi^p\xi^q\xi^i\xi^j\chi^{(2)}_{\langle ij\rangle}\Big).$$

Подставим сюда значения (55) и (56) коэффициентов $\chi^{(1)}_{\langle i\rangle}$ и $\chi^{(2)}_{\langle ij\rangle}$. Некоторые слагаемые в получившемся равенстве обратятся в нуль в силу кососимметрии тензоров кривизны. После вычеркивания таких слагаемых и приведения подобных формула принимает вид

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} e^{-\lambda} r_4^3\,d\lambda = e^{-|\xi|^2}\Big(\frac{2}{27}(3R^p_i\mathcal{R}_{pj}-2R^i_pR_{pj}I+R^{pq}R_{ipjq}I)\xi^i\xi^j + \frac{1}{18}R_{ij}R_{kl}\xi^i\xi^j\xi^k\xi^l I\Big).$$

Применяем оператор Tr к этому равенству и интегрируем по T^*_xM с помощью Леммы 1. Первое слагаемое из правой части не дает вклада в интеграл поскольку тензор Риччи R^{ij} симметричен по (i,j) в то время как $\mathcal{R}_{ij}$ кососимметричен.

Таким образом получаем

$$\frac{\pi^{-n/2}}{2\pi i}\int\limits_{T_x^*M}\int\limits_{\gamma} e^{-\lambda}\operatorname{Tr} r_4^3\,d\lambda d\xi = d\Big(\frac{1}{27}g^{ij}(-2R_p^iR_{pj}+R^{pq}R_{ipjq})+\frac{1}{24}(g^2)^{ijkl}R_{ij}R_{kl}\Big).$$

Поскольку

$$g^{ij}(-2R_p^iR_{pj}+R^{pq}R_{ipjq}) = -|Ric|^2,\quad (g^2)^{ijkl}R_{ij}R_{kl} = \frac{1}{3}S^2+\frac{2}{3}|Ric|^2,$$

формула принимает окончательный вид

$$\frac{\pi^{-n/2}}{2\pi i}\int\limits_{T_x^*M}\int\limits_{\gamma} e^{-\lambda}\operatorname{tr} r_4^3\,d\lambda d\xi = \frac{d}{216}(3S^2-2|Ric|^2). \tag{72}$$

Наконец, вычисляем r_4^2. Подставим в (69) значения (60)–(62) производных функции r_0

$$\begin{aligned} r_4^2 &= \frac{g^{ij}}{(\lambda-|\xi|^2)^3}\chi^{(0)}_{\langle ij\rangle}+\frac{4\xi^i\xi^j}{(\lambda-|\xi|^2)^4}\chi^{(0)}_{\langle ij\rangle}+\frac{4g^{ij}\xi^k}{(\lambda-|\xi|^2)^4}\chi^{(1)}_{\langle ijk\rangle}+\frac{8\xi^i\xi^j\xi^k}{(\lambda-|\xi|^2)^5}\chi^{(1)}_{\langle ijk\rangle}\\ &+\frac{g^{ij}g^{kl}}{(\lambda-|\xi|^2)^4}\chi^{(2)}_{\langle ijkl\rangle}+\frac{12g^{ij}\xi^k\xi^l}{(\lambda-|\xi|^2)^5}\chi^{(2)}_{\langle ijkl\rangle}+\frac{16\xi^i\xi^j\xi^k\xi^l}{(\lambda-|\xi|^2)^6}\chi^{(2)}_{\langle ijkl\rangle}. \end{aligned}$$

Умножим это равенство на $e^{-\lambda}$ и проинтегрируем по γ, используя (40)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} e^{-\lambda}r_4^2\,d\lambda &= e^{-|\xi|^2}\Big(\frac{1}{2}g^{ij}\chi^{(0)}_{\langle ij\rangle}-\frac{2}{3}\chi^{(0)}_{\langle ij\rangle}\xi^i\xi^j-\frac{2}{3}g^{ij}\chi^{(1)}_{\langle ijk\rangle}\xi^k\\ &+\frac{1}{3}\chi^{(1)}_{\langle ijk\rangle}\xi^i\xi^j\xi^k-\frac{1}{6}g^{ij}g^{kl}\chi^{(2)}_{\langle ijkl\rangle}+\frac{1}{2}g^{ij}\chi^{(2)}_{\langle ijkl\rangle}\xi^k\xi^l-\frac{2}{15}\chi^{(2)}_{\langle ijkl\rangle}\xi^i\xi^j\xi^k\xi^l\Big). \end{aligned} \tag{73}$$

Отдельно вычислим каждое слагаемое из правой части этого равенства. Используя формулу (56) для $\chi^{(0)}_{\langle ij\rangle}$, выводим

$$\frac{1}{2}g^{ij}\chi^{(0)}_{\langle ij\rangle} = \frac{1}{4}g^{ik}g^{jl}\mathcal{R}_{ij}\mathcal{R}_{kl}+\dots, \tag{74}$$

$$-\frac{2}{3}\chi^{(0)}_{\langle ij\rangle}\xi^i\xi^j = -\frac{1}{3}g^{pq}\mathcal{R}_{ip}\mathcal{R}_{jq}\xi^i\xi^j+\dots, \tag{75}$$

где многоточием обозначены некоторые операторы, линейно зависящие от $\mathcal{R}$. След каждого из этих операторов равен нулю в силу условия (59).

Используя формулу (57) для $\chi^{(1)}_{\langle ijk\rangle}$, получаем

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3}g^{ij}\chi^{(1)}_{\langle ijk\rangle}\xi^k &= \frac{1}{135}\Big(27\nabla_i\nabla_jR_{kp}+7\nabla_i\nabla^qR_{pjkq}+2\nabla^q\nabla_iR_{pjkq}-4R^{q\cdot\cdot r}_{\cdot ij\cdot}R_{pqkr}\\ &-12R^{q\cdot\cdot r}_{\cdot ij\cdot}R_{prkq}-16R_i^qR_{pjkq}\Big)(g^{ij}\xi^k\xi^p+g^{ik}\xi^j\xi^p+g^{jk}\xi^i\xi^p)+\dots \end{aligned}$$

Для краткости мы не пишем множитель I в правой части этой и нескольких последующих формул. После раскрытия скобок

$$\begin{aligned}
-\frac{2}{3}g^{ij}\chi^{(1)}_{\langle ijk\rangle}\xi^k = \ &\frac{1}{135}\Big(27\nabla^i\nabla_i R_{kp}\xi^k\xi^p + 27\nabla^k\nabla_j R_{kp}\xi^j\xi^p + 27\nabla_i\nabla^k R_{kp}\xi^i\xi^p\\
&+ 7\nabla^j\nabla^q R_{pjkq}\xi^k\xi^p + 7\nabla^k\nabla^q R_{pjkq}\xi^j\xi^p + 7\nabla_i\nabla^q(g^{jk}R_{pjkq})\xi^i\xi^p\\
&+ 2\nabla^q\nabla^j R_{pjkq}\xi^k\xi^p + 2\nabla^q\nabla^k R_{pjkq}\xi^j\xi^p + 2\nabla^q\nabla_i(g^{jk}R_{pjkq})\xi^i\xi^p\\
&- 4(g^{ij}R^{q\cdot\cdot r}_{\cdot ij\cdot})R_{pqkr}\xi^k\xi^p - 4R^{qk\cdot r}_{\cdot\cdot j\cdot}R_{pqkr}\xi^j\xi^p - 4R^{q\cdot kr}_{\cdot i\cdot\cdot}R_{pqkr}\xi^i\xi^p\\
&- 12(g^{ij}R^{q\cdot\cdot r}_{\cdot ij\cdot})R_{prkq}\xi^k\xi^p - 12R^{qk\cdot r}_{\cdot\cdot j\cdot}R_{prkq}\xi^j\xi^p - 12R^{q\cdot kr}_{\cdot i\cdot\cdot}R_{prkq}\xi^i\xi^p\\
&- 16R^{qj}R_{pjkq}\xi^k\xi^p - 16R^{qk}R_{pjkq}\xi^j\xi^p - 16R^q_i(g^{jk}R_{pjkq})\xi^i\xi^p\Big) + \dots
\end{aligned}$$

Пятое слагаемое в правой части равно нулю поскольку множитель R_{pjkq} кососимметричен по (p,j) в то время как множитель $\xi^j\xi^p$ симметричен по этим индексам. По той же причине равны нулю восьмое и семнадцатое слагаемые в правой части. Вычеркивая эти слагаемые и меняя обозначения для индексов суммирования, преобразуем формулу к виду

$$\begin{aligned}
-\frac{2}{3}g^{ij}\chi^{(1)}_{\langle ijk\rangle}\xi^k = \frac{1}{135}\Big(&27\nabla^p\nabla_p R_{ij} + 27\nabla^p\nabla_i R_{jp} + 27\nabla_i\nabla^p R_{jp} + 7\nabla^p\nabla^q R_{ipjq}\\
&- 7\nabla_i\nabla^p R_{jp} + 2\nabla^p\nabla^q R_{iqjp} - 2\nabla^p\nabla_i R_{jp} + 4R^{pq}R_{ipjq}\\
&- 4R_{pqir}R_j^{\cdot pqr} - 4R_{piqr}R_j^{\cdot pqr} + 12R^{pq}R_{ipjq} - 12R_{pqir}R_j^{\cdot rqp}\\
&- 12R_{piqr}R_j^{\cdot rqp} - 16R^{pq}R_{ipjq} + 16R^p_iR_{jp}\Big)\xi^i\xi^j + \dots
\end{aligned}$$

После приведения подобных

$$\begin{aligned}
-\frac{2}{3}g^{ij}\chi^{(1)}_{\langle ijk\rangle}\xi^k = \frac{1}{135}\Big(&27\nabla^p\nabla_p R_{ij} + 25\nabla^p\nabla_i R_{jp} + 20\nabla_i\nabla^p R_{jp} + 9\nabla^p\nabla^q R_{ipjq}\\
&+ 16R^p_iR_{jp} + 4R_{ipqr}(4R_j^{\cdot pqr} + R_j^{\cdot qpr} - 3R_j^{\cdot rpq})\Big)\xi^i\xi^j + \dots
\end{aligned}$$

Сумма слагаемых из внутренних скобок может быть немного упрощена с помощью тождества Риччи $R_j^{\cdot rpq} = -R_j^{\cdot pqr} - R_j^{\cdot qrp} = -R_j^{\cdot pqr} + R_j^{\cdot qpr}$. Формула приобретает вид

(76)
$$\begin{aligned}
-\frac{2}{3}g^{ij}\chi^{(1)}_{\langle ijk\rangle}\xi^k = \frac{1}{135}\Big(&27\nabla^p\nabla_p R_{ij} + 25\nabla^p\nabla_i R_{jp} + 20\nabla_i\nabla^p R_{jp} + 9\nabla^p\nabla^q R_{ipjq}\\
&+ 16R^p_iR_{jp} + 4R_{ipqr}(7R_j^{\cdot pqr} - 2R_j^{\cdot qpr})\Big)\xi^i\xi^jI + \dots
\end{aligned}$$

Вполне аналогично вычисляется четвертое слагаемое из правой части (73). Результат таков:

$$\frac{1}{3}\chi^{(1)}_{\langle ijk\rangle}\xi^i\xi^j\xi^k = -\frac{1}{90}(27\nabla_{ij}R_{kl} + 16R^p_{ijq}R^q_{klp})\xi^i\xi^j\xi^k\xi^lI + \dots \tag{77}$$

Последнее слагаемое из правой части (73) удовлетворяет

$$\chi^{(2)}_{\langle ijkl\rangle}\xi^i\xi^j\xi^k\xi^l = 0 + \dots, \tag{78}$$

что следует немедленно из (58). Для вычисления пятого и шестого слагаемых из правой части (73) мы переписываем формулу (58) в виде

$$\chi^{(2)}_{\langle ijkl\rangle} = \frac{1}{15}\sigma(ij)\sigma(kl)\Big(3\nabla_{ij}R_{kplq} + 4R_{pijr}R^r_{klq} + 3\nabla_{ik}R_{jplq} + 4R_{pikr}R^r_{jlq} + 3\nabla_{ik}R_{lpjq} + 4R_{pilr}R^r_{kjq} + 3\nabla_{ki}R_{lpjq} + 4R_{pklr}R^r_{ijq} + 3\nabla_{ki}R_{jplq} + 4R_{pkjr}R^r_{ilq} + 3\nabla_{kl}R_{jpiq} + 4R_{pkjr}R^r_{liq}\Big)\xi^p\xi^q I + \dots$$

Отсюда

(79)
$$-\frac{1}{6}g^{ij}g^{kl}\chi^{(2)}_{\langle ijkl\rangle} = -\frac{1}{45}\Big(3\nabla^p\nabla_pR_{ij} + 6\nabla^{pq}R_{ipjq} + 4R_{ip}R^p_j + 4R_{ipqr}(R_j^{\cdot pqr} + R_j^{\cdot qpr})\Big)\xi^i\xi^j I + \dots,$$

(80)
$$\frac{1}{2}g^{ij}\chi^{(2)}_{\langle ijkl\rangle}\xi^k\xi^l = \frac{1}{30}(3\nabla_{ij}R_{kl} + 4R^p_{ijq}R^q_{klp})\xi^i\xi^j\xi^k\xi^l I + \dots,$$

Подставляем выражения (74)–(78) в (73) и записываем результат следующим образом:

(81)
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-\lambda}r_4^2\,d\lambda = e^{-|\xi|^2}\Big(\frac{1}{4}g^{ij}B_{ij} + (-\frac{1}{3}B_{ij} + C_{ij}I)\xi^i\xi^j + D_{ijkl}I\xi^i\xi^j\xi^k\xi^l\Big) + \dots,$$

где

(82)
$$B_{ij} = g^{pq}\mathcal{R}_{ip}\mathcal{R}_{jq},$$

(83)
$$C_{ij} = \frac{1}{135}\Big(18\nabla^p\nabla_pR_{ij} + 25\nabla^p\nabla_iR_{jp} + 20\nabla_i\nabla^pR_{jp} - 9\nabla^{pq}R_{ipjq} + 4R^p_iR_{jp} + 4R_{ipqr}(4R_j^{\cdot pqr} - 5R_j^{\cdot qpr})\Big),$$

(84)
$$D_{ijkl} = -\frac{1}{45}(9\nabla_{ij}R_{kl} + 2R^p_{ijq}R^q_{klp}).$$

Применяем оператор Tr к равенству (81) и интегрируем результат по T^*_xM с помощью Леммы 1

(85)
$$\frac{\pi^{-n/2}}{2\pi i}\int_{T^*_xM}\int_\gamma e^{-\lambda}\operatorname{Tr}r_4^2\,d\lambda d\xi = \frac{1}{12}\operatorname{Tr}(g^{ij}B_{ij}) + d\Big(\frac{1}{2}g^{ij}C_{ij} + \frac{3}{4}(g^2)^{ijkl}D_{ijkl}\Big).$$

Из (83) и (84) получаем

(86)
$$\frac{1}{2}g^{ij}C_{ij} + \frac{3}{4}(g^2)^{ijkl}D_{ijkl} = \frac{1}{540}\Big(9\nabla^i\nabla_iS + 18\nabla^{ij}R_{ij} + 2|Ric|^2 + 2R_{ijkl}(13R^{ijkl} - 23R^{ikjl})\Big).$$

Эта формула может быть упрощена с помощью тождеств

(87)
$$\nabla^{ij}R_{ij} = \frac{1}{2}\nabla^i\nabla_iS = -\frac{1}{2}\Delta S$$

и

(88)
$$R_{ijkl}R^{ikjl} = \frac{1}{2}R_{ijkl}R^{ikjl} = \frac{1}{2}|R|^2,$$

которые будут доказаны в конце параграфа. С их помощью (86) принимает вид

$$\frac{1}{2}g^{ij}C_{ij}+\frac{3}{4}(g^2)^{ijkl}D_{ijkl}=\frac{1}{540}(-18\Delta S+2|Ric|^2+3|R|^2). \tag{89}$$

Подставляя (82) и (89) в (85), имеем

$$\frac{\pi^{-n/2}}{2\pi i}\int\limits_{T_x^*M}\int\limits_{\gamma}e^{-\lambda}\,\mathrm{Tr}\,r_4^2\,d\lambda d\xi=\frac{d}{540}(-18\Delta S+2|Ric|^2+3|R|^2)$$
$$+\frac{1}{12}\,\mathrm{Tr}\,(g^{ik}g^{jl}\mathcal{R}_{ij}\mathcal{R}_{kl}). \tag{90}$$

Напомним, что $r_4=r_4^1+r_4^2+r_4^3$. Складывая равенства (71), (72) и (90), получаем

$$\frac{\pi^{-n/2}}{2\pi i}\int\limits_{T_x^*M}\int\limits_{\gamma}e^{-\lambda}\,\mathrm{Tr}\,r_4\,d\lambda d\xi=\frac{d}{360}(-12\Delta S+5S^2-2|Ric|^2+2|R|^2)$$
$$+\mathrm{Tr}\,\Big(\frac{1}{12}g^{ik}g^{jl}\mathcal{R}_{ij}\mathcal{R}_{kl}-\frac{1}{6}\nabla^i\nabla_iA+\frac{1}{2}A^2-\frac{1}{6}SA\Big).$$

В силу (24) это совпадает с утверждением (в) Теоремы 2.

Докажем (87). Согласно тождеству Бианки,

$$\nabla_iR_{jkpm}+\nabla_jR_{kipm}+\nabla_kR_{ijpm}=0.$$

Свернув это равенство с g^{km} (т. е. умножив на g^{km} и просуммировав по k и m), получим

$$\nabla_iR_{jp}-\nabla_jR_{ip}+\nabla^qR_{ijpq}=0.$$

Переставим здесь индексы j and p

$$\nabla_iR_{jp}=\nabla_pR_{ij}-\nabla^qR_{ipjq}.$$

Применив оператор ∇^p к этому равенству и просуммировав результат по p, имеем

$$\nabla^p\nabla_iR_{jp}=\nabla^p\nabla_pR_{ij}-\nabla^p\nabla^qR_{ipjq}.$$

Свернув это равенство с g^{ij}, придем к (87).

Наконец, докажем (88). Для этого сначала преобразуем второй множитель произведения $R_{ijkl}R^{ikjl}$ с помощью тождества Риччи

$$R_{ijkl}R^{ikjl}=-R_{ijkl}(R^{ijlk}+R^{ilkj})=R_{ijkl}R^{ijkl}+R_{ijkl}R^{iljk}.$$

Переставим индексы суммирования k и l в последнем слагаемом правой части

$$R_{ijkl}R^{ikjl}=R_{ijkl}R^{ijkl}+R_{ijlk}R^{ikjl}$$

и затем используем кососимметричность тензора R_{ijlk} по двум последним индексам

$$R_{ijkl}R^{ikjl}=R_{ijkl}R^{ijkl}-R_{ijkl}R^{ikjl}.$$

Это эквивалентно равенству (88).

7. Лапласиан на формах

Участвующие в Теореме 2 оператор A и тензоры кривизны $R, \mathcal{R}$ не зависят друг от друга. В случае лапласиана на формах эта независимость пропадает, а именно, A и $\mathcal{R}$ теперь выражаются через R. В результате некоторые слагаемые из правых частей формул (а)–(в) Теоремы 2 становятся подобными друг другу. С этим нам и предстоит здесь разобраться.

Пусть (M, g) — риманово многообразие размерности n. В локальных координатах ν-форма $\omega \in C^\infty(\Lambda^\nu(T^*M))$ единственным образом записывается в виде

$$\omega = \omega_{i_1\dots i_\nu} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_\nu}, \tag{91}$$

если потребовать, чтобы координаты $\omega_{i_1\dots i_\nu}$ были кососимметричны по всем индексам. Эрмитово скалярное произведение на $\Lambda^\nu(T^*M)$ в координатах определяется равенством

$$\langle \omega, \varepsilon \rangle = \nu! g^{i_1 j_1} \dots g^{i_\nu j_\nu} \omega_{i_1\dots i_\nu} \bar{\varepsilon}_{j_1\dots j_\nu}. \tag{92}$$

Нормировочный коэффициент $\nu!$ объясняется следующим. Выберем в окрестности фиксированной точки $x_0 \in M$ координаты так, что $g_{ij}(x_0) = \delta_{ij}$. Тогда $\binom{n}{\nu}$ форм $dx^I = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_\nu}$ образуют ортонормированный базис пространства $\Lambda^\nu(T^*_{x_0}M)$, где $I = \{i_1, \dots, i_\nu\}$ пробегает все упорядоченные ν-подмножества множества $\{1, \dots, n\}$ так, что $1 \le i_1 < \dots < i_\nu \le n$.

Связность Леви–Чивиты риманова многообразия (M, g) индуцирует связность на расслоении $\Lambda^\nu(T^*M)$, тензор кривизны которой $\mathcal{R}^\nu = (\mathcal{R}^\nu_{ij})$ может быть записан в виде

$$\mathcal{R}^\nu_{ij} = -\sum_{a=1}^{\nu} \mathcal{R}^{\nu,a}_{ij}, \tag{93}$$

где

$$\mathcal{R}^{\nu,a}_{ij}(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_\nu}) = R^{i_a}_{pij} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{a-1}} \wedge dx^p \wedge dx^{i_{a+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_\nu}. \tag{94}$$

Это вытекает из формулы коммутации ковариантных производных:

$$[\nabla_k, \nabla_l]\omega_{i_1\dots i_\nu} = -\sum_{a=1}^{\nu} R^p_{i_a kl} \omega_{i_1\dots i_{a-1} p i_{a+1}\dots i_\nu}. \tag{95}$$

Лапласиан на формах, называемый также оператором Лапласа–Ходжа, определяется равенством

$$\Delta_\nu = d\delta + \delta d : C^\infty(\Lambda^\nu(T^*M)) \to C^\infty(\Lambda^\nu(T^*M)),$$

где d — внешний дифференциал и δ — L^2-сопряженный к d оператор (кодифференциал). Покажем, что Δ_ν представим в виде (27), т. е.

$$\Delta_\nu = -\nabla^p \nabla_p + A_\nu, \quad A_\nu \in C^\infty(\operatorname{End}(\Lambda^\nu(T^*M))). \tag{96}$$

Для этого сначала докажем следующую формулу, выражающую кодифференциал через ковариантную производную: если ν-форма ω представлена в виде (91) с кососимметричными координатами, то

$$\delta\omega = -\nu \nabla^p \omega_{p i_2\dots i_\nu} dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_\nu}. \tag{97}$$

Действительно, изменим на минуту точку зрения и будем считать (97) определением оператора δ. Надо убедиться, что этот оператор L^2-сопряжен с d.

Считаем M замкнутым многообразием. Для произвольной $(\nu-1)$-формы ε, согласно (92) и (97),

$$(\varepsilon,\delta\omega)_{L^2}=\int\limits_M\langle\varepsilon,\delta\omega\rangle\,dM=-\nu!\int\limits_M\varepsilon^{i_2\dots i_\nu}\nabla^{i_1}\bar\omega_{i_1\dots i_\nu}\,dM.$$

Преобразуя этот интеграл путем интегрирования по частям, получаем

$$(\varepsilon,\delta\omega)_{L^2}=\nu!\int\limits_M\nabla_{i_1}\varepsilon_{i_2\dots i_\nu}\bar\omega^{i_1\dots i_\nu}\,dM. \tag{98}$$

Поскольку второй множитель в подынтегральном выражении кососимметричен по индексам $(i_1,\dots,i_\nu)$, мы можем применить оператор альтернирования по этим индексам к первому множителю, т. е. написать

$$\nu!\nabla_{i_1}\varepsilon_{i_2\dots i_\nu}\bar\omega^{i_1\dots i_\nu}=\nu!\Big[\alpha(i_1\dots i_\nu)(\nabla_{i_1}\varepsilon_{i_2\dots i_\nu})\Big]\bar\omega^{i_1\dots i_\nu}.$$

Выражение в квадратных скобках очевидно совпадает с $(d\varepsilon)_{i_1\dots i_\nu}$. Таким образом,

$$\nu!\nabla_{i_1}\varepsilon_{i_2\dots i_\nu}\bar\omega^{i_1\dots i_\nu}=\langle d\varepsilon,\omega\rangle$$

и (98) дает $(\varepsilon,\delta\omega)_{L^2}=(d\varepsilon,\omega)_{L^2}$. Это доказывает (97). Попутно мы убедились в справедливости формулы

$$(d\omega)_{i_1\dots i_{\nu+1}}=\alpha(i_1\dots i_{\nu+1})(\nabla_{i_1}\omega_{i_2\dots i_{\nu+1}}). \tag{99}$$

Здесь и далее $\alpha(i_1\dots i_\nu)$ — альтернирование по индексам $(i_1,\dots,i_\nu)$, определяемое формулой

$$\alpha(i_1\dots i_\nu)u_{i_1\dots i_\nu}=\frac{1}{\nu!}\sum_{\pi\in\Pi_\nu}(\operatorname{sign}\pi)u_{i_{\pi(1)}\dots i_{\pi(\nu)}},$$

где суммирование ведется по всем перестановкам порядка ν и $\operatorname{sign}\pi$ — знак перестановки π.

Докажем справедливость (96) и найдем оператор A_ν. Согласно (97) и (99), для ν-формы ω

$$(\delta d\omega)_{i_1\dots i_\nu}=-(\nu+1)\nabla^p(d\omega)_{p\,i_1\dots i_\nu}=-(\nu+1)\nabla^p\Big[\alpha(p\,i_1\dots i_\nu)(\nabla_p\omega_{i_1\dots i_\nu})\Big].$$

Как легко видеть, выражение из квадратных скобок может быть преобразовано следующим образом:

$$\alpha(p\,i_1\dots i_\nu)(\nabla_p\omega_{i_1\dots i_\nu})=\frac{1}{\nu+1}\Big(\nabla_p\omega_{i_1\dots i_\nu}-\nu\alpha(i_1\dots i_\nu)(\nabla_{i_1}\omega_{p\,i_2\dots i_\nu}\Big).$$

Поэтому предыдущая формула дает

$$(\delta d\omega)_{i_1\dots i_\nu}=-\nabla^p\nabla_p\omega_{i_1\dots i_\nu}+\nu\alpha(i_1\dots i_\nu)(\nabla^p\nabla_{i_1}\omega_{p\,i_2\dots i_\nu}).$$

С другой стороны,

$$(d\delta\omega)_{i_1\dots i_\nu}=\alpha(i_1\dots i_\nu)\Big(\nabla_{i_1}(\delta\omega)_{i_2\dots i_\nu}\Big)=-\nu\alpha(i_1\dots i_\nu)\Big(\nabla_{i_1}\nabla^p\omega_{p\,i_2\dots i_\nu}\Big).$$

Складывая два последних равенства получаем

$$(\Delta\omega)_{i_1\dots i_\nu}=-\nabla^p\nabla_p\omega_{i_1\dots i_\nu}+\nu\alpha(i_1\dots i_\nu)\Big([\nabla^p,\nabla_{i_1}]\omega_{p\,i_2\dots i_\nu}\Big).$$

Преобразуя второе слагаемое из правой части с помощью формулы коммутации (95), убеждаемся в справедливости представления (96), в котором

$$(A_\nu\omega)_{i_1\dots i_\nu} = \nu\alpha(i_1\dots i_\nu)\Big(R^p_{i_1}\omega_{p\,i_2\dots i_\nu} - (\nu-1)R^{\cdot\,p\,\cdot\,q}_{i_1\cdot i_2\cdot}\omega_{pqi_3\dots i_\nu}\Big).$$

Умножим это равенство на $dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_\nu}$ и просуммируем по $(i_1,\dots,i_\nu)$. При этом альтернирование может быть опущено поскольку множитель $dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_\nu}$ кососимметричен. Таким образом получаем окончательную формулу

$$A_\nu\omega = \Big(\nu R^p_{i_1}\omega_{pi_2\dots i_\nu} - \nu(\nu-1)R^{p\,\cdot\,q\,\cdot}_{\cdot\,i_1\,\cdot\,i_2}\,\omega_{pqi_3\dots i_\nu}\Big)dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_\nu}. \tag{100}$$

Из нее вытекает другое полезное представление оператора A_ν:

$$A_\nu = \sum_{a=1}^{\nu} A^a_\nu - 2\sum_{1\le a<b\le\nu} A^{ab}_\nu, \tag{101}$$

где

$$A^a_\nu(dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_\nu}) = R^{i_a}_p dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_{a-1}}\wedge dx^p\wedge dx^{i_{a+1}}\wedge\dots\wedge dx^{i_\nu} \tag{102}$$

и

$$\begin{aligned} A^{ab}_\nu(dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_\nu}) = R^{i_a\,\cdot\,i_b\,\cdot}_{\cdot\,p\,\cdot\,q}\,dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_{a-1}}\wedge dx^p\wedge dx^{i_{a+1}}\wedge\dots\\ \wedge dx^{i_{b-1}}\wedge dx^q\wedge dx^{i_{b+1}}\wedge\dots\wedge dx^{i_\nu}. \end{aligned} \tag{103}$$

Теорема 3. *Пусть (M,g) — замкнутое риманово многообразие размерности n. Первые три из тепловых инвариантов лапласиана Δ_ν выражаются равенствами*

$$\begin{aligned} a_0(x,\Delta_\nu) &= \binom{n}{\nu},\\ a_2(x,\Delta_\nu) &= \frac16\Big[\binom{n}{\nu} - 6\binom{n-2}{\nu-1}\Big]S,\\ a_4(x,\Delta_\nu) &= \frac{1}{360}\Big(c_1(n,\nu)\Delta S + c_2(n,\nu)S^2 + c_3(n,\nu)|Ric|^2 + c_4(n,\nu)|R|^2\Big), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} c_1(n,\nu) &= -12\Big[\binom{n}{\nu} - 5\binom{n-2}{\nu-1}\Big],\\ c_2(n,\nu) &= 5\Big[\binom{n}{\nu} - 12\binom{n-2}{\nu-1} + 36\binom{n-4}{\nu-2}\Big],\\ c_3(n,\nu) &= -2\Big[\binom{n}{\nu} - 90\binom{n-2}{\nu-1} + 360\binom{n-4}{\nu-2}\Big],\\ c_4(n,\nu) &= 2\Big[\binom{n}{\nu} - 15\binom{n-2}{\nu-1} + 90\binom{n-4}{\nu-2}\Big]. \end{aligned}$$

Биномиальные коэффициенты $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$ считаются определенными для всех целых m и k с учетом следующего соглашения: $\binom{m}{k}=0$ если $m<0$ или $k<0$ или $m<k$. Знак тензора кривизны выбран так, что скалярная кривизна S единичной двумерной сферы равна $+1$.

Этот результат принадлежит Патоди и воспроизведен в [11, Теорема 4.8.18]. Подчеркнем, что наши формулы для $c_i(n,\nu)$ справедливы для всех n и ν в то время как соответствующие формулы из [11, Теорема 4.8.18] имеют смысл только для $n \geq 4$. Между прочим, проверка согласия наших формул с соответствующими формулами из [11] является неплохим упражнением.

Лемма 2. *Для всех n и ν,*

$$\operatorname{Tr} A_\nu = \binom{n-2}{\nu-1} S, \tag{104}$$

$$\operatorname{Tr} A_\nu^2 = \binom{n-4}{\nu-2} S^2 + \left[\binom{n-2}{\nu-1} - 4\binom{n-4}{\nu-2}\right] |Ric|^2 + \binom{n-4}{\nu-2} |R|^2, \tag{105}$$

$$\operatorname{Tr}\,(g^{ik}g^{jl}\mathcal{R}^\nu_{ij}\mathcal{R}^\nu_{kl}) = -\binom{n-2}{\nu-1} |R|^2. \tag{106}$$

Доказательство Теоремы 3 состоит в подстановке значений (104)–(106) в утверждения Теоремы 2. Остается доказать Лемму 2. Эта лемма имеет чисто алгебраический характер и может быть доказана многими способами. Приводимое ниже доказательство является, скорее всего, самым кратким. Идея этого доказательства взята из [11], см. рассуждения, приведенные перед Теоремой 4.8.18 этой книги.

Очевидно, след $\operatorname{Tr} A_\nu$ должен быть линейной скалярной функцией тензора кривизны. Более того, эта функция должна быть инвариантной относительно действия ортогональной группы. Как хорошо известно, такой линейный инвариант единствен с точностью до постоянного множителя, т. е. пропорционален скалярной кривизне. Таким образом $\operatorname{Tr} A_\nu = a(n,\nu)S$. Чтобы найти множитель $a(n,\nu)$, достаточно рассмотреть метрику постоянной секционной кривизны K. Для такой метрики $R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$, $R_{ij} = (n-1)Kg_{ij}$, $S = n(n-1)K$ и формула (104) легко следует из определения (100).

Из тех же соображений

$$\operatorname{Tr} A_\nu^2 = b_1(n,\nu)S^2 + b_2(n,\nu)|Ric|^2 + b_3(n,\nu)|R|^2. \tag{107}$$

Нетрудно видеть что коэффициенты этого представления удовлетворяют рекуррентным соотношениям (формуле Паскаля)

$$b_i(n+1,\nu) = b_i(n,\nu) + b_i(n,\nu-1) \quad (i = 1,2,3). \tag{108}$$

Действительно, пусть $M \times \mathbb{R}$ — метрическое произведение n-мерного риманова многообразия (M,g) и действительной прямой. Значения каждой из функций S^2, $|Ric|^2$ и $|R|^2$ в точках $x \in M$ и $(x,0) \in M \times \mathbb{R}$ совпадают. Имеет место естественный изоморфизм

$$\Lambda^\nu(T^*_{(x,0)}(M \times \mathbb{R})) \cong \Lambda^\nu(T^*_x M) \oplus \Lambda^{\nu-1}(T^*_x M). \tag{109}$$

Пусть $A_{\nu,n+1}$ означает оператор A_ν для $M \times \mathbb{R}$, а $A_{\nu,n}$ — то же для M. Как следует из (100), оба слагаемых из правой части (109) являются инвариантными подпространствами оператора $A_{\nu,n+1}$, ограничение оператора $A_{\nu,n+1}$ на первое слагаемое совпадает с $A_{\nu,n}$, а ограничение оператора $A_{\nu,n+1}$ на второе слагаемое совпадает с $A_{\nu-1,n}$. Другими словами, $A_{\nu,n+1} = A_{\nu,n} \oplus A_{\nu-1,n}$. Поэтому $A^2_{\nu,n+1} = A^2_{\nu,n} \oplus A^2_{\nu-1,n}$ и $\operatorname{Tr} A^2_{\nu,n+1} = \operatorname{tr} A^2_{\nu,n} + \operatorname{Tr} A^2_{\nu-1,n}$. Отсюда следует (108).

Рекуррентной формулой (108) имеет смысл пользоваться лишь при $n \geq 4$, поскольку функции S^2, $|Ric|^2$ и $|R|^2$ становятся линейно зависимыми при $n =$

3. Легко убедиться, что коэффициенты формулы (105)

$$b_1(n,\nu)=\binom{n-4}{\nu-2},\quad b_2(n,\nu)=\binom{n-2}{\nu-1}-4\binom{n-4}{\nu-2},\quad b_3(n,\nu)=\binom{n-4}{\nu-2}$$

удовлетворяют (108). Поэтому для завершения доказательства равенства (105) достаточно убедиться в его справедливости для $n\le 4$. Очевидно $A_0=0$. Кроме того, $\mathrm{Tr}\,A_\nu^2=\mathrm{Tr}\,A_{n-\nu}^2$ поскольку оператор A_ν согласован со звездочкой Ходжа. Следовательно, остается рассмотреть следующие четыре значения параметров (n,ν):

$$(n,\nu)\in\{(2,1);(3,1);(4,1);(4,2)\}.$$

Мы приведем доказательство лишь лишь для $(n,\nu)=(4,2)$ поскольку три остальные случая значительно проще.

Фиксируем точку x в четырехмерном многообразии M и выберем координаты в окрестности этой точки так, что $g_{ij}(x)=\delta_{ij}$. Шесть 2-форм

$$dx^1\wedge dx^2,\quad dx^1\wedge dx^3,\quad dx^1\wedge dx^4,\quad dx^2\wedge dx^3,\quad dx^2\wedge dx^4,\quad dx^3\wedge dx^4$$

образуют ортонормированный базис пространства $\Lambda^2(T_x^*M)$. Находим матрицу оператора A_2 в этом базисе путем непосредственных вычислений по формулам (101)–(103)

$$A_2=B-2C,$$

$$B=\begin{pmatrix} R_{11}+R_{22} & R_{23} & R_{24} & -R_{13} & -R_{14} & 0\\ R_{23} & R_{11}+R_{33} & R_{34} & R_{12} & 0 & -R_{14}\\ R_{24} & R_{34} & R_{11}+R_{44} & 0 & R_{12} & R_{13}\\ -R_{13} & R_{12} & 0 & R_{22}+R_{33} & R_{34} & -R_{24}\\ -R_{14} & 0 & R_{12} & R_{34} & R_{22}+R_{44} & R_{23}\\ 0 & -R_{14} & R_{13} & -R_{24} & R_{23} & R_{33}+R_{44}\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} R_{1212} & R_{1213} & R_{1214} & R_{1223} & R_{1224} & R_{1234}\\ R_{1213} & R_{1313} & R_{1314} & R_{1323} & R_{1324} & R_{1334}\\ R_{1214} & R_{1314} & R_{1414} & R_{1423} & R_{1424} & R_{1434}\\ R_{1223} & R_{1323} & R_{1423} & R_{2323} & R_{2324} & R_{2334}\\ R_{1224} & R_{1324} & R_{1424} & R_{2324} & R_{2424} & R_{2434}\\ R_{1234} & R_{1334} & R_{1434} & R_{2334} & R_{2434} & R_{3434}\end{pmatrix}.$$

Поскольку эти матрицы симметричны,

$$\mathrm{Tr}\,A_2^2=|B|^2+4|C|^2-4\mathrm{Tr}\,(BC). \tag{110}$$

Далее, вычисляем

$$\begin{aligned}|B|^2&=(R_{11}+R_{22})^2+(R_{11}+R_{33})^2+(R_{11}+R_{44})^2\\&+(R_{22}+R_{33})^2+(R_{22}+R_{44})^2+(R_{33}+R_{44})^2\\&+2(R_{12}^2+R_{13}^2+R_{14}^2+R_{23}^2+R_{24}^2+R_{34}^2).\end{aligned}$$

Используя равенства $S=R_{11}+R_{22}+R_{33}+R_{44}$ и

$$|Ric|^2=R_{11}^2+R_{22}^2+R_{33}^2+R_{44}^2+2(R_{12}^2+R_{13}^2+R_{14}^2+R_{23}^2+R_{24}^2+R_{34}^2),$$

преобразуем предыдущую формулу к виду

$$|B|^2=2|Ric|^2+S^2. \tag{111}$$

Далее,

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(BC) &= R_{11}(R_{1212}+R_{1313}+R_{1414})+R_{22}(R_{1212}+R_{2323}+R_{2424})\\ &+R_{33}(R_{1313}+R_{2323}+R_{3434})+R_{44}(R_{1414}+R_{2424}+R_{3434})\\ &+2\Big(R_{12}(R_{1323}+R_{1424})+R_{13}(R_{1232}+R_{1434})+R_{14}(R_{1242}+R_{1343})\\ &\qquad+R_{23}(R_{1213}+R_{2434})+R_{24}(R_{1214}+R_{2434})+R_{34}(R_{1314}+R_{2324})\Big).\end{aligned}$$

С помощью соотношения $R_{ij}=R_{i1j1}+R_{i2j2}+R_{i3j3}+R_{i4j4}$ это дает

$$\operatorname{Tr}(BC)=|Ric|^2. \tag{112}$$

Наконец,

$$\begin{aligned}|C|^2 &= R^2_{1212}+R^2_{1313}+R^2_{1414}+R^2_{2323}+R^2_{2424}+R^2_{3434}\\ &+2\Big(R^2_{1213}+R^2_{1214}+R^2_{1223}+R^2_{1224}+R^2_{1234}+R^2_{1314}+R^2_{1323}\\ &+R^2_{1324}+R^2_{1334}+R^2_{1423}+R^2_{1424}+R^2_{1434}+R^2_{2324}+R^2_{2434}\Big)=\frac14|R|^2.\end{aligned} \tag{113}$$

Подставляя (111)–(113) в (110), получаем $\operatorname{Tr}A_2^2=S^2-2|Ric|^2+|R|^2$. Это совпадает с (105) при $(n,\nu)=(4,2)$.

Таким образом, мы закончили доказательство формулы (105). Формула (106) доказывается аналогично.

В заключение обсудим еще раз возможности и трудности компьютеризации наших вычислений с целью нахождения тепловых инвариантов $a_k(x,\Delta_\nu)$ для $k=6,8,\dots$.

Начинать надо с компьютеризации вычисления коэффициентов $\chi_\alpha^{(p)}$, участвующих в рекуррентной формуле (39). Эта компьютеризация наверняка возможна и некоторый опыт в этом уже имеется, см. §4 выше. Еще раз повторим одно из важных замечаний, приведенных в §4: для вычисления $\chi_\alpha^{(p)}$ надо знать коэффициенты $\rho_{\alpha,\beta}$ лишь для $|\beta|\le 2$.

Если коэффициенты $\chi_\alpha^{(p)}$ известны, то наши вычисления состоят из символьного дифференцирования рациональных функций (вывод формул (60)–(62) и (66)–(67)), подстановки одних формул в другие и приведения подобных членов. Любой компьютерный символьный пакет может делать перечисленные действия. Чуть более проблематичной представляется задача научить компьютер находить и вычеркивать полиномиальные выражения, тождественно равные нулю в силу кососимметрии тензоров кривизны. Первый раз мы такое сокращение произвели в формуле (63), а затем в нескольких формулах из §6.

Скорее всего, главная трудность обсуждаемой компьютеризации связана с формулами (87)–(88) и их аналогами для старших производных тензора кривизны. Напомним, что эти соотношения доказывались с помощью тождества Бианки. Для старших ковариантных производных существует бесконечная последовательность тождеств Бианки, которая приводит ко многим соотношениям между инвариантами тензора кривизны высоких порядков. По нашему мнению, этот вопрос пока недостаточно изучен теоретически, чтобы можно было говорить о его компьютеризации. На первых порах эту часть алгоритма можно оставить для вычислений “вручную”.

Наконец, отметим, что наш метод доказательства Леммы 2, основанный на рекуррентной форме Паскаля (108), имеет достаточно общий характер и может быть использован для нахождения высших алгебраических инвариантов операторов A_ν и $\mathcal{R}^\nu$, в том числе их совместных инвариантов.

References

[1] I. G. Avramidi, *A covariant technique for the calculation of the one-loop effective action*, Nucl. Phys., **B 335** (1991), 712–754.

[2] I. Avramidi and T. Branson, *Heat kernel asymptotics of operators with non-Laplace principle part*, arXiv:math-ph/9905001v2 Sep2001.

[3] A. A. Belkov, A. V. Lanyov, and A. Schalle, *Calculation of heat-kernel coefficients and usage of computer algebra*, Computer Physics Communications, **95**:2–3 (1996), 123–130. Zbl 0921.65014

[4] M. Berger, *Eigenvalues of the Laplacian*, Proc. Symp. in Pure Math., **V XVI** (1968), 121–126.

[5] M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet, *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lecture Notes in Math., **194** (1971). Zbl 0223.53034

[6] N. Berline, E. Gertzer, and M. Vergne, *Heat kernels and Dirac operators*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **298** (1991), Springer.

[7] I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press, (1984). Zbl 0551.53001

[8] B. De Witt, *Dynamical Theory of Groups and Fields*, Gordon and Breach, New York (1965).

[9] V.V. Djepko and Yu.G. Nikonorov, *Double exponential map on spaces of constant curvature*, Siberian Advances Math., **10**:1 (2007), 141–153. Zbl 1249.53030

[10] S. A. Fulling ed., *Heat Kernel Techniques and Quantum Gravity*, Discourses in Math. and its Appl., **4** (1995) Texas A&M Univ.

[11] P. B. Gilkey, *Invariance Theory, The Heat Equation, And the Atiyah-Singer Index Theorem*, Publish or Parish, Inc. Wilmington, Delaware (U.S.A.), 1984. Zbl 0565.58035

[12] V. P. Gusynin, *Asymptotics of the heat kernel for nonmonimal operators*, Ukranian Math. Zh., **43** (1991), 1541–1551. Zbl 0769.35074

[13] V. P. Gusynin and V. V. Kornyak, *Complete computation of the De Witt – Seeley – Gilkey coefficent E_4 for nonmonimal operator on curved manifolds*, Fundamental and Applied Math., **5** (1999), 649–674. Zbl 1031.58014

[14] M. Kac, *Can one hear the shape of a drum?*, Amer. Math. Monthly, **73** (1966), 1–23. Zbl 0139.05603

[15] S. Minakshisundaram, *Eigenfunctions on Riemannian manifolds*, J. Indian Math. Soc. (N.S.), **17** (1953), 159–165.

[16] V.K. Patodi, *Curvature and the fundamental solution of the heat operator*, J. Indian Math. Soc., **34** (1970), 269–285.

[17] I. Polterovich, *Heat invariants of Riemannian manifolds*, Israel J. of Math., **119** (2000), 239–252. Zbl 0996.58019

[18] R. Seeley, *Complex powers of an elliptic operator*, Proc. Symp. Pure Math., **10** (1967), 288–307. Zbl 0159.15504

[19] V. Sharafutdinov, *Geometric symbol calculus for pseudodifferential operators I*, Siberian Advances Math., **15**:3 (2005), 81–125. Zbl 1081.58016

[20] V. Sharafutdinov, *Geometric symbol calculus for pseudodifferential operators II*, Siberian Advances Math., **15**:4 (2005), 71–95. Zbl 1082.58025

[21] V. Sharafutdinov, *Supplements to "Geometric symbol calculus for pseudodifferential operators"*, Preprint (2002).
http://www.math.nsc.ru/~sharafutdinov/publications.

[22] M. Skokan, *Rho's. Unpublished notes*, (2003).

[23] C. Xu, *Heat kernels and geometric invariants I*, Bull. Sc. Math., **117**:2 (1993), 287–312. Zbl 0788.58052

Vladimir A. Sharafutdinov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Novosibirsk State University,
Pirogova, 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: sharaf@math.nsc.ru