S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 525–540 (2016) УДК 510:53.072:621.1.016.4(03)

DOI 10.17377/semi.2016.13.043 MSC 45A35

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИФФУЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Р.В. АРУТЮНЯН, С.А. НЕКРАСОВ

Abstract. In this article for the study of the process of overgrowing holes in the lattice structure, which plays the role of a filter, used a stochastic approach. Formulated and studied the system of kinetic equations that model the process of diffusion filtering based on this approach. In contrast to the well-known works, where the absorption parameter was calculated on a computer using statistical tests, the basic characteristics of the filter structure in the current study were determined by deterministic methods. The theorem of existence and uniqueness of solutions for the case of continuous density is proved. Representation of solution in the form of a uniformly convergent series and asymptotic, and studied its behavior at infinity. The concrete particular cases such as the density of the delta function and a uniform distribution are studied. Constructed and proved finite-difference scheme for the solution of the corresponding Cauchy problem on a finite time interval. Simulation results on a computer are considered. It is shown that the finite-difference scheme of the first order is almost acceptable when a computer calculation. Investigated in the model, despite a number of simplifying assumptions, it gives an overview of the filtering process in lattice structures. The results can be developed, especially in respect of the functional classes density distribution of the size of a particle filter and a method of asymptotic estimates in the interval.

Keywords: filtration, diffusion, kinetics, stochastic equation, existence, uniqueness, numerical method.

Harutyunyan, R.V., Nekrasov, S.A., Asymptotic and numerical methods for modeling diffuse filter.

Поступила 26 ноября 2015 г., опубликована 11 июня 2016 г.

1. Введение

Моделирование фильтрации является актуальной задачей естествознания и технических наук [1-4]. Большинство работ, посвященных исследованию этой проблемы, основываются на гипотезе континуальности, что ограничивает точность расчетов при большой дисперсии размеров частиц в фильтруемом потоке. В [2,4] реализуется подход Бринкмана в случае фильтрации жидкости сквозь твердый недеформируемый пористый материал, рассматриваемый как периодическая среда, в которой выделяется ряд характерных масштабов и применяется асимптотическое усреднение. Для каждого из масштабов формулируется система уравнений. Нахождение усредненных фильтрационных характеристик среды, а также скорости и давления жидкости сводится к решению соответствующих периодических задач на ячейке. В [3] рассмотрены задачи гидродинамики неоднородных пористых сред, трактуемых как случайные поля. Описаны методы решения соответствующих задач фильтрации, начиная с одномерных течений до статистического расчета фильтрационного переноса в средах со случайными неоднородностями.

В данной статье для исследования процесса зарастания дырок в решетчатой структуре, играющей роль фильтра, использован стохастический подход. В отличие от [1], где параметр поглощения рассчитывался при помощи статистических экспериментов, основные характеристики фильтрующей структуры в проведенном исследовании находились аналитически.

Рассмотрим одномерную периодическую структуру типа «решета» (рис. 1). Длина непроницаемой части в пределах периода равна двум. А проницаемой (дырки) – единице. Сквозь это решето просеивается поток одномерных частиц (палок) случайных размеров. Длина произвольной палки z, распределена с плотностью вероятностей $p(z)$, не зависящей от времени t, на полуинтервале $(0,\ 2]$.

Примем следующие допущения:

(1) Поток частиц однороден во времени, на период «решета» в единицу времени падает одна палка.
(2) Падение частиц равновероятно в любую точку на периоде.
(3) Палка проходит через дырку, если ее центр тяжести и один из ее концов попадают в створ дырки. В противном случае палка прилипает к решетке.

Палка соответствующих размеров может полностью перекрыть дырку. Такую (исчезнувшую) дырку назовем «нуль-дыркой».

С течением времени размер проницаемой части «решета» уменьшается из-за налипания палок.

Требуется отыскать плотности распределения вероятностей размеров дырок и палок на выходе из «решета» $C(x,\ t)$ и $\varphi(z,\ t)$.

Уравнение баланса для процесса зарастания дырок имеет вид:

$$
\begin{gathered}
C(x,\ t+\Delta t)\,\Delta x - C(x,\ t)\,\Delta x = \left(I_{in}(x,\ t)\,\Delta x - I_{out}(x,\ t)\,\Delta x\right)\tfrac{\Delta t}{\tau} + o(1), \\
\Delta t \to 0,\ \ \Delta x \to 0,\ \forall x \in [0,\ 1],\ t > 0,
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где левая часть описывает с точностью до бесконечно малых значений приращение за время $(t,\ t+\Delta t)$ вероятности существования дырок с размерами в пределах от x до $x+\Delta x$; $I_{in}(x,\ t)$ – плотность вероятности образования, а $I_{out}(x,\ t)$ соответственно исчезновения дырок шириной x в момент времени t в результате падения одной палки.

Очевидно, что $I_{in}(1,\ t) = 0$, $I_{out}(0,\ t) = 0\ \forall t > 0$, $C(x,\ 0) = \delta(x-1)$ – дельта-функция.

τ – характерное время, определяющее частоту падения палок на период решета. Без ограничения общности результатов исследования для конкретности примем $\tau = 1$.

Для ненулевых дырок $(x > 0)$

$$I_{in}(x,\ t)\,\Delta x = \frac{2\Delta x}{3}\int_x^1 C(y,\ t)\,P(y-x)\,dy, \forall x \in (0,\ 1)\,, t > 0,$$

где $P(y-x) = \int_{2(y-x)}^2 p(z)\,dz$ – представляет собой вероятность существования палок с длинами, способными образовать из дырки шириной y дырку размером x (рис. 1).

Множитель $\frac{\Delta x}{3}$ есть вероятность попадания центра тяжести палки на интервал длиной Δx. Коэффициент 2 учитывает возможность налипания палок с обеих сторон дырок. Для вычисления уходного члена $I_{out}(x,\ t)$ рассмотрим три случая возможных соотношений между длиной падающей палки z и шириной дырки x.

(1) $0 < z < x$, чтобы изменить размер дырки, центр тяжести палки должен попасть внутрь интервала на периоде решетки длиной z. Перекрыть дырку палка не может, так как длина палки меньше длины дырки.

(2) $x \le z < 2x$. Перекрытие дырки возможно, так как длина палки больше, чем длина дырки. Суммарная длина интервалов на периоде, попадание на которые приводит к уменьшению размера дырки, составляет $2z - x$, из которых z идет на создание ненулевой дырки, а $\frac{z-x}{2}$ на нуль-дырку. Перекрытие дырки происходит, когда центр палки попадает в створ дырки и находится на расстоянии от ближайшего края дырки больше или равном $x - z/2$.

(3) $2x \le z < 2$. В этом случае длина соответствующего интервала равна $z+x$, где $2x$ идет на создание ненулевой дырки, а $z-x$ – на нуль-дырку. Как и в п.2. перекрытие дырки также возможно (половина палки имеет длину, большую, чем у дырки). Условия перекрытия практически очевидны.

Таким образом, согласно известной формуле полной вероятности:

$$I_{out}(x,\ t)\,\Delta x$$
$$= C(x,\ t)\left[\int_0^x \frac{z}{3}P(z)\,dz + \int_x^{2x}\frac{2z-x}{3}P(z)\,dz + \int_{2x}^2 \frac{z+x}{3}P(z)\,dz\right]\Delta x,$$

для всех x из $(0,1)$, $t > 0$, где сомножители в подынтегральных выражениях $z/3$,$(2z-x)/3$,$(z+x)/3$ есть вероятности попадания центра палки на соответствующие интервалы из п.1–3.

Нуль-дырка может образовываться из всех ненулевых дырок $(0 < x \le 1)$ при попадании центра тяжести палок с размерами $z \ge x$ на интервал длиной $z - x$ в пределах периода «решетки», поэтому

$$I_{in}(x,\ t)\,\Delta x = \int_x^1 C(y,\ t) \int_y^2 \frac{z-y}{3} p(z)\,dzdy\Delta x, \forall t > 0.$$

В итоге, устремляя Δx и Δt к нулю, получаем из (1), с учетом выражений для $I_{in}(x,\ t)$ и $I_{out}(x,\ t)$, а также соответствующих начальных условий, следующую задачу Коши для системы линейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial C}{\partial t}(x,\ t) = -q(x)\,C(x,\ t) + \int_x^1 P(y-x)\,C(y,\ t)\,dy, \forall x \in (0,\ 1], \forall t > 0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial C_0}{\partial t}(t) = \int_0^1 C(y,\ t) \int_y^2 \frac{z-y}{3} p(z)\,dzdy, \forall t > 0; \tag{3}$$

$$C(x,\ 0) = \delta(x-1+0), \forall x \in (0,\ 1]; C_0(0) = 0, \tag{4}$$

где

$$P(w) = \frac{2}{3} \int_{2w}^2 p(z)\,dz, 0 \le w \le 1;$$

$$q(x) = \frac{2}{3} \left[\int_0^x \frac{z}{2} P(z)\,dz + \int_x^{2x} \frac{2z-x}{2} P(z)\,dz + \int_{2x}^2 \frac{z+x}{2} P(z)\,dz \right], \forall x \in (0,\ 1);$$

$C_0(t)$ – вероятность существования на периоде решета нуль-дырки.

В целях удобства анализа представим функцию $C(x,\ t)$ в виде суммы

$$C(x,\ t) = C_1(x,\ t) + \delta(x-1+O)\,e^{-q(1)t}, \tag{5}$$

где $C_1(x,\ t)$ – ограниченная составляющая $C(x,\ t)$.

После подстановки (5) в (2) и преобразований получаем задачу Коши для интегро-дифференциального уравнения относительно $C_1(x,\ t)$

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial C_1}{\partial t}(x,\ t) = -q(x)\,C_1(x,\ t) + \textstyle\int_x^1 P(y-x)\,C_1(y,\ t)\,dy + P(1-x)\,e^{-q(1)t}, \\ &\forall x \in (0,\ 1],\ \ t > 0, \end{aligned} \tag{6}$$

с начальным условием

$$C_1(x,\ 0) = 0, \forall x \in (0,\ 1]. \tag{7}$$

Выражение для плотности условного распределения вероятностей длин палок на выходе из дырок $\varphi(z,\ t)$ получается аналогично соотношениям для $I_{in}(x,\ t)$ и $I_{out}(x,\ t)$ и имеет вид:

$$\varphi(z,\ t) = p(z) \int_{z/2}^1 R(y,\ z)\,C(y,\ t)\,dy, \forall z \in [0,\ 2), t > 0, \tag{8}$$

где $R(y,\ z)$ есть вероятность преодолеть дырку шириной y палке длиной z

$$R(y,\ z) = \begin{cases} \frac{2y-z}{3}, & \frac{z}{2} \le y \le \min(z,\ 1), \\ \frac{y}{3}, & \min(z,\ 1) < y \le 1. \end{cases}$$

2. Решение системы (3) – (4), (6) – (7) и его свойства

Посредством подстановки $C_1(x,\ t) = A(x,\ t)\, e^{-q(1)t}$ задача Коши (6) – (7) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}&\tfrac{\partial A}{\partial t}(x,\ t) = -Q(x)\, A(x,\ t) + \textstyle\int_x^1 P(y-x)\, A(y,\ t)\, dy + P(1-x)\,,\\ &\forall x \in (0,\ 1]\,,\ \ t > 0,\end{aligned} \tag{9}$$

$$A(x,\ 0) = 0, \forall x \in (0,\ 1]\,, \tag{10}$$

где $Q(x) = q(1) - q(x)$.

Функция $A(x,\ t)$ $\forall x \in (0,\ 1]\,,\ \ t \geq 0$ может быть разложена в степенной ряд

$$A(x,\ t) = \sum_{j=1}^{\infty} D_j(x)\, t^j, \tag{11}$$

коэффициенты которого определяются из рекуррентных соотношений

$$(j+1)\, D_{j+1}(x) = Q(x)\, D_j(x) + \int_x^1 P(y-x)\, D_j(y)\, dy, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

с начальным условием $D_1(x) = P(1-x)$, $\forall x \in [0,\ 1]$.

Утверждение 1. Если плотность распределения $p(z)$ непрерывна на отрезке $[0,\ 2]$, то решение задачи (3)–(4), (6)–(7) существует, единственно, причем $C_0(t) \in C^{\infty}(0,\ \infty)$, $\frac{\partial^k C}{\partial t^k}(x,\ t) \in C^1(0,\ 1)$ $\forall t > 0$, $k = 0, 1, \ldots$.

Доказательство. Достаточно показать, что ряд (12) и ему соответствующие, полученные почленным дифференцированием по переменным x и t слагаемых ряда (12), сходятся равномерно и являются непрерывными функциями $\forall t \geq 0$, $x \in [0,\ 1]$.

Поскольку $p(z)$ непрерывна на отрезке $[0,\ 2]$, то $q(x) \in C^2(0,\ 1)$, $P(x) \in C^1(0,\ 1)$, $D_j(x) \in C^1(0,\ 1)$, $j \in \mathbb{N}$.

Промажорируем коэффициенты ряда (11) по норме пространств непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций $C(0,\ 1)$ и $C^1(0,\ 1)$ [6]. Имеем неравенства

$$0 < q(x) < \frac{2}{3} \max\left(\frac{x}{2},\ \frac{3}{2x},\ 1 + \frac{x}{2}\right) < 1,$$

$$\left|\frac{dq}{dx}\right| \leq \frac{1}{3}, |Q(x)| \leq \frac{1}{3}(1-x)\,, 0 \leq P(x) \leq \frac{2}{3} \forall x \in [0,\ 1]\,,$$

с учетом которых из (2) получаем мажоранты:

$$\|D_j\|_{C(0,\ 1)} = \frac{j+1}{3^j\,(j-1)\,!}, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

Посредством дифференцирования (12) по x получаем рекуррентные соотношения для производных коэффициентов $D_j(x)$:

$$(j+1)\, \frac{dD_{j+1}}{dx}(x) = -\frac{dq}{dx}(x)\, D_j(x) + Q(x)\, \frac{dD_j}{dx}(x) - P(x)\, D_j(x)$$

$$-\int_x^1 \frac{dP}{dy}(y-x)\,D_j(y)\,dy, \forall x \in [0,\ 1]\,, \quad j \in \mathbb{N},$$

из которых следуют оценки

$$(j+1)\left\|\frac{dD_{j+1}}{dx}\right\|_{C(0,\ 1)} \le \frac{5}{3}\|D_j\|_{C(0,\ 1)} + \frac{1}{3}\left\|\frac{dD_j}{dx}\right\|_{C(0,\ 1)}, \quad j \in \mathbb{N},$$

на основании которых, с учетом (13) и соответствующих начальных условий, имеем

$$\|D_1\|_{C^1(0,\ 1)} = \frac{4\|p\|_{C(0,\ 2)} + 2}{3}, \tag{14}$$

$$\|D_j\|_{C^1(0,\ 1)} = \frac{\|p\|_{C(0,\ 2)} + 4j}{3^{j-1}(j-2)\,!}, j = 2,\ 3,\ \ldots \tag{15}$$

Из (13) – (15) следует, что ряд (11) и ему соответствующие, полученные почленным дифференцированием (11) по переменным x и t, сходятся равномерно, причем для функции $C_1(x,\ t)$ справедливы оценки

$$\left\|\frac{\partial^k C_1}{\partial t^k}\right\|_{C^1(0,\ 1)} < \left(\frac{4}{3}\right)^k (R+2)^3\left(t + \|p\|_{C(0,\ 2)} + 8\right)^3 e^{(1/3 - q(1))t},$$

$$\forall t \ge 0, k = 0,\ 1,\ \ldots$$

С учетом элементарных неравенств

$$\frac{d^{k+1}C_0}{dt^{k+1}}(t) \le \frac{2}{3}\left\|\frac{d^k C_1}{dt^k}\right\|_{C(0,\ 1)} + \frac{1}{3}q^k(t)\,e^{-q(1)t}, \forall t \ge 0, k = 0, 1, \ldots,$$

получаем доказательство утверждения.

Утверждение 2. Имеют место оценки снизу

$C_1(x,\ t) \ge P(1-x)\,\frac{e^{-q(x)t} - e^{-q(1)t}}{q(1) - q(x)} \ge P(1-x)\,\frac{e^{-q(1)t} - e^{-q_{\max}t}}{q_{\max} - q(1)}$, $\forall x \in [0,\ 1]$, $t \ge 0$, где $q_{\max} = \|q\|_{C(0,\ 1)}$.

Доказательство. Из неотрицательности $P(x)$ на интервале $(0,\ 1)$ из (9) – (10) следует

$$A(x,\ t) \ge 0, A(x,\ t) \ge P(x-1)\,\frac{e^{Q(x)t} - 1}{Q(x)},$$

Откуда с учетом монотонного убывания $\frac{e^{-x} - e^{-y}}{(y-x)}$ по обоим аргументам, следует доказательство утверждения.

Примечательно, что $C_1(1,\ t) = \frac{2}{3t}e^{-q(1)t}$.

Утверждение 3. Выполняются оценки сверху

$$C_1(x,\ t) \le \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3t}{2(1-x)}}\,I_1\left(2\sqrt{\frac{2}{3}(1-x)\,t}\right)e^{-q_{\min}t}$$

$\le \frac{(3/2)^{3/4}}{3\sqrt{\pi}}\frac{t^{1/4}}{(1-x)^{3/2}}e^{-q_{\min}t + 2\sqrt{\frac{2}{3}(1-x)t}}$, $\forall x \in [0,\ 1]$, $t \ge 0$, где $q_{\min} = \min\limits_{[0,1]} q(x)$.

Доказательство. Так как $q(x) - q_{\min} \ge 0$, $0 \le P(x) \le \frac{2}{3}$, $\forall x \in [0,\ 1]$, то $C_1(x,\ t) \le A_+(x,\ t)\,e^{-q_{\min}t}$, где $A_+(x,\ t)$ есть решение уравнения

$$\frac{\partial A_+}{\partial t}(x,\ t) = \frac{2}{3}\int_x^1 A(y,\ t)\,dy + \frac{2}{3}, \forall x \in (0,\ 1], t \geq 0,$$

при начальном условии $A_+(x,\ 0) = 0$, $\forall x \in (0,\ 1]$.

Методом интегральных преобразований можно получить аналитическое решение данной задачи Коши, имеющее вид:

$$A_+(x,\ t) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3t}{2(1-x)}} I_1\left(2\sqrt{\frac{2}{3}(1-x)\,t}\right), \forall x \in (0,\ 1);$$

$$A_+(1,\ t) = \frac{2}{3t}, \forall t > 0,$$

что, с учетом свойств функций Бесселя [5], доказывает данное свойство.

Утверждение 4. Справедлива нормировка

$$C_0(t) + \int_0^1 C_1(x,\ t)\,dx = 1, \forall t \geq 0.$$

Для доказательства достаточно показать выполнение тождества

$$\frac{\partial C_0}{\partial t}(t) + \int_0^1 \frac{\partial C_1}{\partial t}(x,\ t)\,dx \equiv 0, \forall t \geq 0,$$

что достигается при помощи подстановки вместо производных соответствующих выражений правых частей системы (2) – (4).

3. Исследование асимптотических свойств решения задачи (6) – (7)

Вид асимптотических выражений для функций $C_1(x,\ t)$ и $A(x,\ t)$ существенным образом зависит от свойств функции $q(x)$, а также интервала внутри отрезка $[0,\ 1]$, на котором производится асимптотический анализ.

Исследуем важный случай, когда $q(x) < 0$, $\forall x \in (0,\ 1)$, вследствие чего на полуинтервале $[0,\ 1)$ существует не более одной точки с абсциссой x_*, для которой выполняется равенство $q(x_*) = q(1)$, если же $q(x_*) \geq q(1)$ $\forall x \in [0,\ 1)$, то положим $x_* = 1$.

Будем искать коэффициенты асимптотического разложения функции $A(x,\ t)$ на полуинтервале $(x_*,\ 1]$ аналогичное ряду Лорана (при этом, естественно, предполагаем, что $x_* < 1$):

$$A(x,\ t) = \sum_{j=-r}^{\infty} a_j(x)\,t^{-j}, r > 0, t \to \infty. \tag{16}$$

Подставляя разложение (16) в (9) находим систему рекуррентных соотношений для определения его коэффициентов:

$$(1-j)\,a_{j-1}(x) = Q(x)\,a_j(x) + \int_x^1 P(y-x)\,a_j(y)\,dy,$$

$$j = -r,\ ...,\ -1,\ 1,\ ...; a_j(x) \equiv 0, (-j) = r, r+1, \ldots;$$

$$a_{-1}(x) = Q(x)\,a_0(x) + \int_x^1 P(y-x)\,a_0(y)\,dy + P(1-x),$$

$$Q\left(x\right)>0,\forall x\in\left(x_{*},\ 1\right].$$

Для определения степени r главного члена асимптотики (16) сделаем оценку снизу и сверху для функции $C_1\left(x,\ t\right)$.

Поскольку $P\left(x\right)\leq\frac{2}{3}$, то $C_1\left(x,\ t\right)\leq A_0\left(x,\ t\right)$, где $A_0\left(x,\ t\right)$ есть решение задачи Коши

$$\begin{array}{ll}\frac{\partial A_0}{\partial t}\left(x,\ t\right)+q\left(x\right)A_0\left(x,\ t\right)=\frac{2}{3}\int_x^1 A_0\left(y,\ t\right)dy+P\left(1-x\right)e^{-q(1)t},\\ \forall x\in\left(x_{*},\ 1\right],\ t>0;\end{array}\tag{17}$$

$$A_0\left(x,\ 0\right)=0,\forall x\in\left(x_{*},\ 1\right].\tag{18}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$w_0\left(x,\ t\right)=\int_x^1 A_0\left(y,\ t\right)dy,\forall x\in\left(x_{*},\ 1\right],t>0.$$

Решая (17) – (18) при помощи преобразования Лапласа по переменной t, находим, что

$$\hat{w}_0\left(x,\ s\right)=\int_x^1\frac{P\left(1-y\right)}{\left(s+q\left(1\right)\right)\left(s+q\left(y\right)\right)}e^{\frac{2}{3}\int_x^y\frac{dz}{s+q(z)}}dy,\forall x\in\left(x_{*},\ 1\right],\tag{19}$$

где $\hat{w}_0\left(x,\ s\right)$ – образ функции $w_0\left(x,\ t\right)$; s – параметр преобразования Лапласа.

Из (19) получаем, что

$$\hat{w}_0\left(x,\ s-q\left(1\right)\right)=G\left(x\right)s^{-n(1)-1}\left(1+o\left(1\right)\right),\forall x\in\left(x_{*},\ 1\right],s\to\infty,$$

где $G\left(x\right)=\left[q\left(x\right)-q\left(1\right)\right]^{n(1)}e^{n(1)\int_x^1\frac{q'(z)-q'(1)}{q(z)-q(1)}dz}$;

$$n\left(x\right)=-\frac{2}{3q'\left(x\right)};$$

$$q'\left(x\right)=\frac{dq}{dx},\forall x\in\left(x_{*},\ 1\right],$$

откуда следует, что

$$w_0\left(x,\ t\right)=t^{n(1)}e^{-q(1)t}\frac{G\left(x\right)}{\Gamma\left(n\left(1\right)+1\right)}\left(1+o\left(1\right)\right),\forall x\in\left(x_{*},\ 1\right),t\to\infty,$$

и с учетом равенства

$$A_0\left(x,\ t\right)=q'\left(1\right)t^{n(1)}e^{-q(1)t}\frac{G\left(x\right)}{\Gamma\left(n\left(1\right)\right)Q\left(x\right)}\left(1+o\left(1\right)\right),\forall x\in\left(x_{*},\ 1\right),t\to\infty.\tag{20}$$

Из непрерывности плотности $p\left(z\right)$ и условия $q''\left(x\right)<0$, $\forall x\in\left(0,\ 1\right)$ следует $q'\left(x\right)<0$, поэтому значение $n\left(1\right)$ конечно и $x_*\leq 1$.

В силу неравенств $P\left(y-x\right)>P\left(1-x\right)$, $\forall y\in\left(x,\ 1\right)$, $x\in\left(0,\ 1\right)$ функция $A_1\left(x,\ t\right)$, являющаяся решением задачи Коши

$$\frac{\partial A_1}{\partial t}\left(x,\ t\right)+q\left(x\right)A_1\left(x,\ t\right)=P\left(1-x\right)\int_x^1 A_1\left(y,\ t\right)dy+P\left(1-x\right)e^{-q(1)t},$$

$$\forall x \in (x_*,\ 1]\,,\ t > 0;$$

$$A_1\,(x,\ 0) = 0, \forall x \in (x_*,\ 1]\,,$$

есть оценка снизу для $C_1\,(x,\ t)$. Асимптотика для функции $A_1\,(x,\ t)$ находится также при помощи преобразования Лапласа и имеет вид

$$\begin{gathered} A_1\,(x,\ t) = -q\,(1)\,\tfrac{P(1-x)}{P(0)}\tfrac{[q(x)-q(1)]^{n(1)-1}}{\Gamma(n(1))}\times \\ \times e^{\int_x^1\left(\frac{P(0)q'(z)}{q'(1)}-P(1-z)\right)\frac{dz}{q(z)-q(1)}}\,(1+o\,(1))\,,\ \forall x \in (x_*,\ 1)\,,\ \ t \to \infty. \end{gathered} \tag{21}$$

Из (20) и (21) следует, что максимальный порядок степеней t в слагаемых асимптотического разложения (16) $r = n\,(1)$, а также выводится краевое условие для коэффициента $a_{n(1)}\,(x)$ главного члена асимптотики

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{a_{n(1)}\,(x)}{(1-x)^{n(1)-1}} = \frac{[-q\,(1)]^{n(1)}}{\Gamma\,(n\,(1))}, \tag{22}$$

являющееся условием однозначности для соответствующего интегрального уравнения системы рекуррентных соотношений для коэффициентов $a_j\,(x)$, $j = -n\,(1)\,,\, -n\,(1)+1,\,\ldots$

Для исследования асимптотического поведения решения задачи Коши (6) – (7) переформулируем ее к эквивалентному интегральному уравнению, которое удобно записать в терминах преобразования Лапласа

$$\hat{w}\,(x,\ s) = -\frac{4}{3}\int_x^{x_*}\hat{K}\,(x,\ y,\ s)\int_y^{x_*}p\,(2-2z)\,\hat{w}\,(z,\ s)\,dzdy + \hat{w}_0\,(x,\ s)\,, \tag{23}$$

$\forall x \in [0,\ x_*)$,

$$\hat{w}\,(x,\ s) = \int_x^{x_*}\hat{C}_1\,(y,\ s)\,dy, \hat{w}_0\,(x,\ s) = \int_x^{x_*}\hat{K}\,(x,\ y,\ s)\,\hat{F}_0\,(y,\ s)\,dy,$$

$$\hat{K}\,(x,\ y,\ s) = \frac{e^{\frac{2}{3}\int_x^y\frac{dz}{s+q(z)}}}{[s+q\,(y)]}.$$

При $t \to \infty$

$$K\,(x,\ y,\ t) = e^{-q(x)t}\left(\frac{K_0\,(x,\ y)\,t^{-n(x)-1}}{\Gamma\,(n\,(x))} + o\left(t^{-n(x)-2+\varepsilon}\right)\right), \tag{24}$$

$$\forall\ 0 \le x < y < x_*, 0 < \varepsilon < 1.$$

$$F_0\,(x,\ t) = \int_{x_*}^1 P\,(y-x)\,C_1\,(y,\ t)\,dy + P\,(1-x)\,e^{-q(1)t}, \forall t \ge 0,$$

$$K_0\,(x,\ y) = \frac{[q'\,(x)\,(y-x)]^{-n(x)}}{[q\,(y)-q\,(x)]}e^{V(x,\ y)},$$

$$V\,(x,\ y) = -n\,(x)\int_x^y\frac{q'\,(x)\,(z-x)-q\,(z)+q\,(x)}{[q\,(z)-q\,(x)]\,(z-x)}dz, \forall\ 0 \le x < y < x_*.$$

В силу свойств ядра (24) асимптотику решения целесообразно отыскивать, используя представление

$$\hat{w}\left(x,\ s-q\left(x\right)\right)=u_0 s^{n(x)}\left(1+o\left(1\right)\right), \forall x\in\left(0,\ x_*\right), s\to 0, \tag{25}$$

где функция $u_0\left(x\right)$ вследствие (23) – (25) удовлетворяет уравнению

$$u_0\left(x\right)=-\frac{4}{3}\int_x^{x_*}K_0\left(x,\ y\right)\varphi\left(x,\ y\right)dy+v_0\left(x\right), \tag{26}$$

где

$$v_0\left(x\right)=\int_x^{x_*}K_0\left(x,\ y\right)\hat{F}_0\left(y,\ -q\left(x\right)\right)dy, \tag{27}$$

$$\varphi\left(x,\ y\right)=\int_y^{x_*}p\left(2-2z\right)\hat{w}\left(z,\ -q\left(x\right)\right)dz, \forall\ 0\le x<y<x_*. \tag{28}$$

Можно установить, что интегралы (26) – (28) существуют и являются непрерывными функциями переменных x и y.

Из (23) следует, что $\varphi\left(x,\ y\right)$ удовлетворяет двумерному интегральному уравнению Вольтерра:

$$\varphi\left(x_1,\ x_2\right)=-\frac{4}{3}\int_{x_2}^{x_*}K_1\left(x_1,\ x_2,\ y\right)\varphi\left(x_1,\ y\right)dy+\varphi_0\left(x_1,\ x_2\right), \tag{29}$$

$$\forall\ 0\le x_1<x_2<x_*, \tag{30}$$

где

$$\varphi_0\left(x_1,\ x_2\right)=\int_{x_2}^{x_*}K_1\left(x_1,\ x_2,\ y\right)\hat{F}_0\left(y,\ -q\left(x_1\right)\right)dy;$$

$$K_1\left(x_1,\ x_2,\ y\right)=\int_{x_2}^{x_*}p\left(2-2z\right)\hat{K}\left(z,\ y,\ -q\left(x_1\right)\right)dz.$$

Уравнение (29) приводится посредством технических преобразований к интегральному уравнению Вольтерра с непрерывным и ограниченным в области (30) ядром, поэтому его решение существует и единственно.

Из (25) вытекают асимптотики

$$w\left(x,\ t\right)=\frac{t^{-n(x)-1}e^{-q(x)t}u_0\left(x\right)}{\Gamma\left(n\left(x\right)\right)}\left(1+o\left(1\right)\right), \tag{31}$$

$$C_1\left(x,\ t\right)=\frac{t^{-n(x)}e^{-q(x)t}u_0\left(x\right)q'\left(x\right)}{\Gamma\left(-n\left(x\right)\right)}\left(1+o\left(1\right)\right), \tag{32}$$

$$\forall x\in\left[0,\ x_*\right), t\to\infty.$$

Остается сформулировать алгоритм вычисления функции $\hat{F}_0\left(y,\ -q\left(x\right)\right)$, $\forall\ 0\le x<y<x_*$. Имеем

$$\hat{F}_0\left(y,\ -q\left(x\right)\right) = \int_{x_*}^{1} P\left(z-y\right)\hat{A}\left(z,\ Q\left(x\right)\right)dz + \frac{P\left(1-y\right)}{Q\left(x\right)}, \forall\ 0 \le x < y < x_*.$$

Функция $\hat{A}\left(z,\ Q\left(x\right)\right)$ определяется из уравнения

$$\left[Q\left(x\right)-Q\left(y\right)\right]\hat{A}\left(y,\ Q\left(x\right)\right) = \int_{y}^{1} P\left(z-y\right)\hat{A}\left(z,\ Q\left(x\right)\right)dz + \frac{P\left(1-y\right)}{Q\left(x\right)},$$

$$\forall\ 0 \le x < x_* < y < 1.$$

Поскольку $Q\left(x\right) > 0$ и $Q\left(y\right) < 0$ на вышеуказанных интервалах, то непрерывное решение этого уравнения существует и единственно.

Особого рассмотрения требует случай асимптотик в окрестности, содержащей точку с абсциссой $x = x_*$.

Функция $\hat{w}\left(x,\ s-q\left(1\right)\right)$ представляется в виде отношения

(33) $$\frac{\hat{L}_1\left(x,\ s\right)}{\left[s^{n(1)+1}\left(s+Q\left(x\right)^{-n(x_*)}\right)\right]}, \forall x \in \left[0,\ 1\right],$$

где

$$\hat{L}_1\left(x,\ s\right) = \zeta\left(x\right)\left(1+o\left(1\right)\right), \quad \hat{L}_1'\left(x,\ s\right) = \zeta'\left(x\right)\left(1+o\left(1\right)\right)$$

при $s \to 0$ и $\left|\hat{L}_1\left(x_*,\ 0\right)\right| < \infty$, а $\zeta\left(x\right)$ является решением интегрального уравнения

(34)
$$\zeta\left(x\right) = -\frac{4}{3}\int_{x}^{1} K_2\left(x,\ y\right)\int_{y}^{1} p\left(2-2z\right)\zeta\left(z\right)\left|Q\left(z\right)\right|^{n(x_*)}dzdy + \hat{L}_0\left(x,\ 0\right), x \in \left[0,\ 1\right],$$

где $K_2\left(x,\ y\right) = \lim\limits_{s\to 0}\left[s+Q\left(x\right)\right]^{n(x_*)} K\left(x,\ y,\ s-q\left(1\right)\right)$ обладает свойством

$$K_2\left(x,\ y\right) = O\left(Q\left(y\right)^{-n(x_*)-1}\right)$$

при $x \to x_*$, благодаря которому интегралы в (34) сходятся для $\forall x \in \left[0,\ 1\right]$.

Свободный член уравнения (34) определяется по правилу

$$\hat{L}_0\left(x,\ 0\right) = \lim_{s\to 0}\hat{w}_0\left(x,\ s-q\left(1\right)\right)s^{n(1)+1}\left[s+Q\left(x\right)\right]^{-n(x_*)},$$

поэтому в окрестности точки x_* порядок степенного сомножителя в главном члене асимптотики решения увеличивается, а при $x = x_*$ имеет место равенство

(35) $$C_1\left(x_*,\ t\right) = \frac{-\zeta\left(x_*\right)n\left(x_*\right)t^m e^{-q(1)t}}{\Gamma\left(m+1\right)}\left(1+o\left(1\right)\right),$$

$$m = n\left(1\right)-n\left(x_*\right)+1, t \to \infty.$$

Из соотношения (8) следует, что вероятность обнаружить палку на выходе из «решетки» определяется по формуле

$$I\left(t\right) = \int_0^1 w\left(y,\ t\right)\beta\left(y\right)dy + \frac{1}{3}e^{-q(1)t}, \forall t \ge 0,$$

где

$$\beta\left(y\right)=\frac{1}{3}\left(\int_{0}^{y}p\left(z\right)dz+2\int_{y}^{2y}p\left(z\right)dz\right),$$

откуда с учетом (33) имеет место асимптотика

$$I\left(t\right)=\frac{3\zeta\left(x_{*}\right)n\left(x_{*}\right)\beta\left(x_{*}\right)t^{m-1}e^{-q(1)t}}{n\left(x_{*}\right)+1}\left(1+o\left(1\right)\right)+\frac{1}{3}e^{-q(1)t},t\to\infty.$$

4. Частные случаи

4.1. Плотность распределения длин палок типа дельта-функции

В этом случаи $p\left(z\right)=\delta\left(z-1\right)$, $P\left(x\right)=\frac{2}{3}$,

$$q\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1+x}{3}, & x\in\left[0,\ \frac{1}{2}\right);\\ \frac{2-x}{3}, & x\in\left[\frac{1}{2},\ 1\right],\end{cases}$$

точное решение задачи (2) – (3) имеет вид:

$$C\left(x,\ t\right)=e^{-t/3}\left[a_{1}\left(x,\ t\right)\left(\frac{x^{4}}{4}-\frac{x^{3}}{3}+\frac{5}{192}\right)+a_{2}\left(x,\ t\right)\left(\frac{-2x^{3}}{2}-\frac{x^{2}}{2}+\frac{1}{3}\right)\right.$$

$$\left.+a_{3}\left(x,\ t\right)\left(-2x^{2}+\frac{1}{2}\right)+a_{4}\left(t\right)\Theta\left(x-\frac{1}{2}\right)+a_{5}\left(x,\ t\right)x\left(1-x\right)+a_{6}\left(x,\ t\right)x\right],$$

$$x\in\left(0,\ \frac{1}{2}\right];$$

$$C\left(x,\ t\right)=e^{-t/3}\left[\delta\left(x-1\right)+\frac{\left(1-x\right)t^{2}}{9}+\frac{2t}{3}\right],x\in\left(\frac{1}{2},\ 1\right];$$

$$C_{0}\left(t\right)=1-e^{-t/3}\left[\frac{5t^{4}}{186624}+\frac{t^{3}}{486}+\frac{t^{2}}{24}+\frac{t}{3}+1\right],\forall t\geq 0;$$

$$a_{1}\left(x,\ t\right)=\frac{1}{243}\int_{0}^{t}\tau^{2}\left(t-\tau\right)^{2}e^{-x\tau/3}d\tau;$$

$$a_{2}\left(x,\ t\right)=\frac{1}{81}\int_{0}^{t}\tau^{2}\left(t-\tau\right)e^{-x\tau/3}d\tau;$$

$$a_{3}\left(x,\ t\right)=\frac{1}{27}\int_{0}^{t}\tau^{2}e^{-x\tau/3}d\tau;$$

$$a_{4}\left(t\right)=4\left(1-e^{-t/6}\right);$$

$$a_{5}\left(x,\ t\right)=\frac{1}{27}\int_{0}^{t}\left(t-\tau\right)^{2}e^{-x\tau/3}d\tau;$$

$$a_{6}\left(x,\ t\right)=\frac{4}{9}\int_{0}^{t}\left(t-\tau\right)e^{-x\tau/3}d\tau;$$

$\Theta\left(x\right)$ – единичная функция Хевисайда.

Плотность условного распределения длин палок на выходе из «решета» определяется по формуле $\varphi\left(z,\ t\right)=\delta\left(z-1\right)I\left(t\right)$, где $I\left(t\right)$ – вероятность обнаружить палку на выходе:

$$I(t) = e^{-t/3}\left(\frac{t^2}{648} + \frac{t}{18} + \frac{1}{3}\right).$$

Асимптотика для средней ширины дырок выражается формулой

$$\langle x\rangle = \frac{5}{559872}t^3 e^{-t/3}\left(1 + o(1)\right), t \to \infty.$$

4.2. Равномерное распределение длин палок на выходе

Имеем $p(z) = \frac{1}{2}$, $q(z) = -\frac{x^2}{4} + \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$, $P(x) = \frac{2}{3}(x-1)$, $n(1) = -n(x_*) = 4$, $x_* = \frac{1}{3}$, $q(1) = \frac{5}{12}$, коэффициенты ряда Лорана (16) находятся методом степенных рядов из соответствующей системы рекуррентных соотношений. Причем главный член асимптотики на интервале $\left(\frac{1}{3},\ 1\right)$ определяется по формуле

$$C_1(x,\ t) = \frac{1}{9720}t^4 e^{-q(1)t}\frac{(1-x)^3}{(3x-1)^5}\left(9x^2 + 12x + 19\right)F\left(a,\ b,\ c,\ \frac{3}{2}(1-x)\right),$$

где $F(a,\ b,\ c,\ z)$ – гипергеометрическая функция [5]; $a = \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{\frac{35}{3}}\right)$; $b = \frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{\frac{35}{3}}\right)$; $c = 6$.

Асимптотики на отрезке $\left[0,\ \frac{1}{3}\right]$ выражаются из общих соотношений (24) – (35), из которых следует, что

$$C_1(x,\ t) = O\left(t^{-n(x)}e^{-q(1)t}\right), \forall x \in \left(0,\ \frac{1}{3}\right);$$

$$C_1\left(\frac{1}{3},\ t\right) = O\left(t^9 e^{-q(1)t}\right), t \to \infty.$$

5. Решение задачи (6) – (7) при помощи МКР

На конечных интервалах $(0,\ T)$, где $T > 0$ – величина порядка постоянной времени процесса, одним из эффективных способов решения задачи (6) – (7) являются конечно-разностные методы. Рассмотрим схему I порядка:

$$\frac{B_i^{j+1} - B_i^j}{\tau} = -a_i B_i^j + \sum_{k=1}^{i} P_{i-k}B_k^j h + R_i^j, i = \overline{1,\ M}; \tag{36}$$

$$B_0^j = P_0 t_j e^{-q_0 t_j}; a_i = q(1 - z_i); P_i = P(z_i); z_i = ih;$$

$$R_i^j = P_i e^{-q_0 t_j}; C_1(z_i,\ t_j) = B_{m-i}^j(1 + o(1)), \tau,\ h \to 0, i = \overline{0,\ M}; h = \frac{1}{M};$$

$$t_j = j\tau; j = \overline{0,\ J}; J = \left[\frac{T}{\tau}\right],$$

где квадратные скобки означают операцию вычисления целой части.

Для невязок системы уравнений (36), получающихся после подстановки сеточной функции $B_h = \left\{B_i^j\right\}_{i=\overline{0,\ M}}^{j=\overline{0,\ J}}$ точного решения задачи (6) – (7), имеют место неравенства

$$\varepsilon_i^j \le f_1\tau + f_2 h, \tag{37}$$

где $\tau \geq 0$, $h \geq 0$, $i = \overline{1,\ M}$, $j = \overline{1,\ J}$; коэффициенты

$$f_1 = f_3 \sup_{t \geq 0} \left\| \frac{\partial^2 C_1}{\partial t^2} \right\|_{C(0,\,1)}; f_2 = f_3 \sup_{t \geq 0} \|C_1\|_{C^1(0,\,1)}; f_3 = \frac{2}{3}\left(1 + 2\|p\|_{C(0,\,2)}\right)$$

в силу ранее доказанных в пп. 2 и 3 свойств функции $C_1(x,\ t)$ являются конечными числами.

Методом мажорантных оценок можно показать выполнение следующего условия устойчивости схемы

$$\left\| B_h^{(1)} - B_h^{(2)} \right\|_h \leq \gamma \left\| R_h^{(1)} - R_h^{(2)} \right\|_h, \tag{38}$$

где

$$\gamma = \frac{e^{\omega T} - 1}{\omega}, \omega = \|P\|_{C(0,\ 1)} - q_{\min},$$

а сеточная норма определяется по правилу

$$\|B_h\|_h = \max_{\Omega} \left| B_i^j \right|, \Omega = \left\{ (i,\ j): \ \ i = \overline{0,\ M};\ \ j = \overline{0,\ J} \right\}.$$

Таким образом [6], схема (36) является корректной, а приближенное решение B_h сходится к точному, причем из (37) – (38) следуют оценки

$$\left| C_1(z_i,\ t_j) - B_{m-i}^j \right| \leq f_4 \tau + f_5 h, \forall (i,\ j) \in \Omega,$$

где $f_4 = \text{const}\, f_1$, $f_5 = \text{const}\, f_2$.

Аналогичная конечно-разностная схема первого порядка точности, соответствующая задаче (6) – (7), получается из (36) при $q_i = Q(1 - z_i)$, $R_i^j = P_i$, тогда $A(z_i,\ t_j) = B_{m-i}^j (1 + o(\tau + h))$, $\tau,\ h \to 0$, $i = \overline{0,\ M}$ $j = \overline{0,\ J}$.

Значение коэффициентов в мажоранте (37) для этой схемы становятся зависящими степенным образом от длины интервала интегрирования T.

Из рассмотренных схем предпочтительнее вторая, так как в ней свободный член не зависит от времени.

Конечно-разностная схема (36) является практически приемлемой при вычислениях на ЭВМ.

При рассматриваемых в статье ограничениях первый порядок погрешности по h численного решения методом конечных разностей является неулучшаемым.

В силу ранее доказанных свойств решения задачи Коши такое ограничение отсутствует для временной составляющей погрешности соответствующих многошаговых конечно-разностных схем.

Если коэффициенты и решение системы (6) – (7) обладают достаточной степенью гладкости по переменной x, то могут быть построены схемы второго и более высокого порядка точности по h. Недостатком традиционных МКР является отсутствие гарантий точности приближенного решения. Для многомерных задач контроль точности обычно осуществляется при помощи экстраполяции по Ричардсону. Другой проблемой является учет погрешности коэффициентов фильтрации. В силу отмеченных причин определенный интерес представляют двусторонние методы типа [7], позволяющие вычислять надежные оценки снизу и сверху для решения начальных и краевых задач. Разработка таких методов для задачи (6) – (7) планируется авторами в последующих исследованиях.

Результаты решения при помощи МКР представлены на рис. 2 (тестовая задача с коэффициентами $q\,(x) = 1 + \frac{1-x}{6}$, $P\,(x) = \frac{2}{3}$, имеющая квазиполиномиальное аналитическое решение, параметры схемы $h = 0.025$, $\tau = 0.5$) и на рис. 3 (исходные данные п. 4.2, параметры схемы $h = 0.025$, $\tau = 0.333$).

По оси ординат откладывались: на рис. 2 – значения функций $a_1\,(x,\ t) = \frac{A_h(x,\ t)}{\|A_h\|_h}$ (приближенное решение), $a_2\,(x,\ t) = \frac{A(x,\ t)}{\|A_h\|}$ (точное решение); на рис. 3 – $a_3\,(x,\ t) = \frac{A_h(x,\ t)}{\|A_h\|_h}$, $A_h\,(x,\ t)$ – линейный сплайн соответствующий вектору A_h.

6. Заключение

Исследованная в статье модель, несмотря на ряд упрощающих предположений, дает общее представление о процессе фильтрации в решетчатых структурах.

Полученные результаты могут быть развиты, прежде всего, в отношении рассматриваемых функциональных классов плотности распределения размеров фильтрующихся частиц и метода асимптотических оценок на отрезке $[0,\ x_*]$.

Предположение о знакоопределенности второй производной функции $q\,(x)$ было сделано исключительно в целях уменьшения громоздкости выкладок.

Свойства системы и плотности распределения размеров отверстий в случае двумерной прямоугольной решетки в целом аналогичны.

Преимущество моделирования фильтрации на основе соответствующих кинетических уравнений для функции распределения вероятностей размеров отверстий фильтрационной структуры имеет то несомненное преимущество, что конечно-разностные методы являются более экономичными по сравнению с методами Монте-Карло.

Если необходимо учитывать трехмерные эффекты, вызванные в частности налипанием частиц друг на друга, их отрывом, отражением и диффузией в тангенциальных и обратных направлениях, сложной топологией структуры и многими другими факторами, то вывод соответствующих кинетических уравнений становится затруднительным, а его структура существенно усложняется, так что единственным доступным оказывается метод статистического моделирования на ЭВМ.

References

[1] G.D. Reznikov, *Investigation of deep filtration by computer experiment*, Journal of Engineering Physics and Thermophysics, **68**:5 (1995), 699–703.

[2] V.L. Savatorova, *Modelirovanie fil'tracii zhidkosti skvoz' poristuju sredu s periodicheskoj strukturoj [Simulation of filtration of liquid through a porous medium with a periodic structure]*, Gornaja kniga, Moscow, 2010. (in Russian)

[3] M.I. Shvidler, *Statisticheskaja gidrodinamika poristyh sred [Statistical hydrodynamics of porous media]*, Nedra, Moscow, 1985. (in Russian).

[4] V.L. Savatorova, *Matematicheskoe modelirovanie processov teploprovodnosti i fil'tracii v neodnorodnyh sredah so strukturoj, blizkoj k periodicheskoj [Mathematical modeling of the thermal conductivity and filtration processes in heterogeneous environments with a structure close to a periodic]* : dis. ... doctor. tekhn. nauk, Moscow , 2010, 304 p. (in Russian).

[5] M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Washington, New York, United States Department of Commerce, National Bureau of Standards, 1983.

[6] V.A. Trenogin, *Funktsional'nyi analiz [Function analysis]*, Nauka, Moscow, 1980. (in Russian). Zbl 0517.46001

[7] S.A. Nekrasov, *Bilateral methods for the numerical integration of initial- and boundary-value problems*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **35**:10 (1995), 1189–1202. Zbl 1026.65510

Robert Vladimirovich Harutyunyan,
Moscow Technical University of Communications and Informatics,
Aviamotornaya St., 8A
111024, Moscow, Russia
E-mail address: Rob57@mail.ru

Nekrasov Sergey Aleksandrovich,
Platov South-Russian state Polytechnic University
Prosvesheniya street, 132,
346428, Novocherkassk, Russia
E-mail address: nekrasoff_novoch@mail.ru