S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 541–583 (2016) УДК 517.95

DOI 10.17377/semi.2016.13.044 MSC 35A05

РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО–КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПОЛИТРОПНОГО ДВИЖЕНИЯ СМЕСЕЙ ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

А.Е. МАМОНТОВ, Д.А. ПРОКУДИН

Abstract. We consider the initial boundary value problem which describes unsteady polytropic motions of a multicomponent mixture of viscous compressible fluids in a bounded three-dimensional domain. The material derivative operator is supposed to be common for all components and defined by the average velocity of the mixture, however separate velocities of the components are preserved in other terms. The pressure is supposed to be common and depending on the total density via the polytropic equation of state. Except the above mentioned, we do not make any simplifications (including the structure of the viscosity matrix), i. e. all summands are preserved in the equations which are a natural generalization of the Navier—Stokes model which describes motions of one-component media. We proved the existence of weak solutions to the initial boundary value problem.

Keywords: existence theorem, unsteady boundary value problem, viscous compressible fluid, homogeneous mixture with multiple velocities, polytropic equation of state, effective viscous flux.

1. Введение

В работе проведено математическое исследование многоскоростной модели движения гомогенной смеси вязких сжимаемых жидкостей. Это означает, что в каждой точке пространства присутствуют все компоненты (составляющие) смеси, которые находятся в одной фазе, но имеют каждая свою локальную

Mamontov, A.E., Prokudin, D.A., Solubility of initial boundary value problem for the equations of polytropic motion of multicomponent viscous compressible fluids.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 15–11–20019).

Поступила 26 февраля 2016 г., опубликована 26 июня 2016 г.

скорость движения; взаимодействие между компонентами осуществляется через обмен импульсом и вязкое трение (а также посредством теплообмена — в теплопроводных моделях).

С математических позиций сказанное означает, что изучаемая система дифференциальных уравнений в частных производных представляет собой совокупность систем Навье—Стокса (сжимаемый вариант) для каждой компоненты смеси, но с той существенной модификацией, что в вязких членах в каждом уравнении импульсов присутствуют старшие производные от скоростей других компонент. Отметим, что с математической точки зрения как эта, так и многочисленные прочие модели смесей исследованы весьма мало, в том числе по сравнению с аналогичной теорией для однокомпонентных сред (некоторые подробности можно найти в обзорах из [8] и [9]). Остается открытым вопрос о разрешимости каких-либо уравнений, моделирующих нестационарные движения гомогенных смесей вязких сжимаемых жидкостей, без выбрасывания слагаемых из уравнений.

Описанная особенность рассматриваемой модели не позволяет напрямую перенести результаты теории, развитой для однокомпонентных систем Навье—Стокса (изложение этой теории можно найти в монографиях [4], [5], [7], [12] и [13]). Помимо прочего, одной из основных трудностей при этом является вопрос о работоспособности метода эффективных вязких потоков, лежащего в основе современной математической теории вязкого газа (комментарии по этому поводу в определенной степени будут приведены ниже, более подробно см. в [8] и [9]). В случае смесей (многокомпонентных жидкостей) вязкий поток принимает матричную форму (в отличие от скалярной формы в однокомпонентном случае) и содержит разноименные произведения плотностей и скоростей (из разных компонент), анализ которых на основе уравнений неразрывности (как это делается в стандартной теории) невозможен. В известных до сих пор работах по разрешимости уравнений движения смесей указанная трудность была преодолена лишь частично, а именно — в случае треугольной матрицы вязкостей (см., например, упомянутый обзор в [9]).

Подчеркнем, что именно матрицы вязкостей являются одним из основных факторов, проводящих различие между многокомпонентными и однокомпонентными моделями. Если эти матрицы диагональны, то с математических позиций ситуация сравнительно мало отличается от однокомпонентного случая, поскольку тогда уравнения движения смесей представляют собой объединение нескольких систем (типа Навье—Стокса), описывающих движение каждой компоненты, взаимодействующих между собой только через обмен импульсом, выражаемый посредством младших (по порядку) членов.

В настоящей работе впервые удалось рассмотреть случай полных матриц вязкостей, т. е. избавиться от каких-либо ограничений на их структуру, кроме естественных требований (таких как положительная определенность), связанных с фундаментальными физическими законами. С этой целью приняты предположения о совпадении давлений в компонентах смеси и о построении оператора материальной производной на основе средней скорости смеси. В модельном случае эти предположения опробованы в статье [14]. Оба предположения оправданы физически в ряде ситуаций (см. раздел 2), и главное — математическая модель не только не теряет то богатство, что присуще многожидкостным моделям (сохраняются различные плотности и скорости компонент), но даже напротив, раскрывается в полной мере, поскольку описанный прием позволяет снять ограничения на матрицу вязкостей, и тем самым допустить в уравнения все возможные слагаемые в вязких членах.

Следует также отметить, что даже в рамках выбранной нами конкретной модели смеси (а именно, многоскоростной гомогенной смеси вязких сжимаемых жидкостей) остается большая свобода при окончательной формулировке задачи (выборе подмодели). Здесь помимо факторов, общих для любых гидродинамических моделей (выбор определяющих уравнений, связывающих термодинамические параметры между собой, изучение баротропных течений или теплопроводной модели, стационарных или нестационарных задач и т. д.), в случае смесей это еще и такие факторы, как совпадение фазовых температур (давлений) или их различие, нюансы с записью скоростей в тех или иных членах уравнений (средней скорости или скоростей отдельных компонент), и т. п. Кроме того, конечно, остается стандартный в математическом моделировании прием отбрасывания тех или иных членов в уравнениях, приводящий к приближенным моделям. Последний прием до недавнего времени был единственным, позволившим построить начало математической теории движения многожидкостных сред, однако в настоящей статье мы к нему прибегать не будем. Главная мотивация при этом — построение математической теории на уровне, ставшем стандартом в аналогичной теории однокомпонентных вязких сжимаемых жидкостей (Навье—Стокса и Навье—Стокса—Фурье), в которой последние достижения касаются именно полных моделей.

Вышеупомянутые предположения (об равенстве давлений и о структуре оператора материальной производной), а также выбор баротропной нестационарной модели, и составляют в данной работе ту самую конкретизацию подмодели, о которой говорилось в предыдущем абзаце. Точная постановка решаемой задачи приведена во втором разделе. Для простоты в данной работе принят политропный закон, т. е. чисто степенная связь между давлением и суммарной плотностью, но распространение полученных результатов на более общие определяющие уравнения, как представляется, не должно вызвать серьезных затруднений, и его планируется провести в ближайшее время в одной из следующих работ.

При моделировании движения смесей имеется опасность загромождения записи ввиду появления дополнительных индексов (отвечающих за нумерацию составляющих смеси). Здесь существенное облегчение приносит инвариантная запись (исключающая явное упоминание компонент векторов и тензоров), которой мы будем строго придерживаться в течение всей статьи, и правила которой мы здесь уточним во избежание разночтений. А именно, если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — векторы («столбцы») размерности n, а $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ — тензоры второго ранга («матрицы»), действующие в $\mathbb{R}^n$, то

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i,\quad \mathbb{A}:\mathbb{B}=\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}B_{ij},\quad \mathrm{div}\boldsymbol{a}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_i}{\partial x_i};$$

$\mathbb{A}\boldsymbol{a}$ и $\mathrm{div}\mathbb{A}$ — векторы («столбцы») с компонентами

$$(\mathbb{A}\boldsymbol{a})_i=\sum_{j=1}^{n}A_{ij}a_j,\quad (\mathrm{div}\mathbb{A})_j=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i};$$

и наконец $\mathbb{A}^*$ и $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$ — тензоры с компонентами $(\mathbb{A}^*)_{ij} = A_{ji}$ и $(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})_{ij} = a_i b_j$ соответственно. В статье в основном будет $n = 3$ (размерность области течения), но в некоторых случаях $n = N$ (число компонент смеси).

Структура работы следующая. В разделе 2 приведена точная постановка решаемой задачи (мы назвали ее Задачей А) и формулировка основного результата работы — Теоремы 2.3 о разрешимости Задачи А. В разделе 3 для удобства сформулированы априорные оценки классических решений задачи А. Раздел 4 содержит постановку и доказательство разрешимости приближенной задачи, отличающейся от точной Задачи А наличием двух малых параметров — ε (отвечает за параболическую регуляризацию) и δ (отвечает за регуляризацию роста давления, т. е. замену показателя γ на больший показатель β), а также проектированием скоростей на конечномерное пространство размерности m. В разделах 5 и 6 происходит предельный переход по $m \to +\infty$, в разделах 7 и 8 обосновывается предельный переход по $\varepsilon \to 0$, и наконец в разделах 9 и 10 доказательство Теоремы 2.3 завершается путем предельного перехода по $\delta \to 0$.

2. Постановка задачи и основной результат

Баротропное движение смеси $N \geqslant 2$ жидкостей описывается в случае трех пространственных переменных следующей системой уравнений [11], [15]:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{u}_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, N,$$

$$\frac{\partial (\rho_i \boldsymbol{u}_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_i) + \nabla p_i = \operatorname{div} \mathbb{S}_i + \boldsymbol{J}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i, \quad i = 1, \ldots, N,$$

где ρ_i — плотность i-й компоненты (составляющей) смеси, $\boldsymbol{u}_i$ — поле скоростей, p_i — давление, $\mathbb{S}_i$ — тензор вязких напряжений, векторы $\boldsymbol{J}_i$ отвечают за интенсивность обмена импульсом между составляющими смеси, а векторы $\boldsymbol{f}_i$ являются известными полями внешних массовых сил. Тензоры вязких напряжений $\mathbb{S}_i$ определяются равенствами

$$(1) \qquad \mathbb{S}_i = \sum_{j=1}^{N} \widehat{\mathbb{S}}_{ij}, \quad \widehat{\mathbb{S}}_{ij} = \Big(2\mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_j) + \lambda_{ij}(\operatorname{div} \boldsymbol{u}_j)\mathbb{I}\Big), \quad i, j = 1, \ldots, N,$$

где $\mathbb{D}(\boldsymbol{v}) = ((\nabla \otimes \boldsymbol{v}) + (\nabla \otimes \boldsymbol{v})^*)/2$ — тензор скоростей деформаций векторного поля $\boldsymbol{v}$, $\mathbb{I}$ — единичный тензор, а коэффициенты вязкостей образуют матрицы[1]

$$(2) \qquad \mathbf{M} = \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^{N} > 0, \quad \mathbf{H} = \boldsymbol{\Lambda} + \frac{2}{3}\mathbf{M} \geqslant 0, \quad \boldsymbol{\Lambda} = \{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^{N}.$$

Ключевую роль играет матрица полных вязкостей $\mathbf{N} := \boldsymbol{\Lambda} + 2\mathbf{M}$, именно ее структура, как это обсуждалось в разделе 1, может создавать препятствия при обобщении техники однокомпонентных моделей на многокомпонентный случай. Как уже говорилось, мы не будем налагать каких-либо требований на матрицы вязкостей, кроме уже приведенных в (2), и которые обеспечивают свойство $\mathbf{N} > 0$. Из физических соображений матрицы вязкостей должны быть симметричными (в связи с чем особенно важно было избавиться от требования треугольности, иначе мы попадаем в тривиальный случай диагональной матрицы), но в данной статье это требование налагаться не будет за ненадобностью. С точки зрения физики условия (2) являются необходимыми (для выполнения второго закона термодинамики), а с математических позиций

[1]См. Замечание 10.5.

эти условия обеспечивают важные соотношения $\sum\limits_{i=1}^{N} \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i) \geqslant 0$ (которые, впрочем, в рассматриваемой задаче не потребуются) для любых векторных полей $\boldsymbol{u}_i$, $i = 1, \ldots, N$, а в случае однородного краевого условия на границе области течения (например, (10)) еще и интегральное неравенство

$$\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i)\, d\boldsymbol{x} \geqslant C_0 \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} |\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i|^2\, d\boldsymbol{x} \tag{3}$$

с некоторой положительной постоянной $C_0 = C_0(\mathbf{M}, \boldsymbol{\Lambda})$. Векторы $\boldsymbol{J}_i$ выражаются посредством формул

$$\boldsymbol{J}_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(\boldsymbol{u}_j - \boldsymbol{u}_i), \quad i = 1, \ldots, N, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, \ldots, N.$$

$\mathbf{M}$, $\boldsymbol{\Lambda}$ и $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{N}$ считаются заданными постоянными матрицами.

Обозначим

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{u}_i, \qquad \rho = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \tag{4}$$

— соответственно средняя скорость и суммарная плотность смеси. Заметим, что

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{v}) = \operatorname{div}(\rho_i(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_i)), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{5}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial(\rho_i \boldsymbol{u}_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) + \underline{\operatorname{div}(\rho_i(\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{v}) \otimes \boldsymbol{u}_i) - \boldsymbol{J}_i} + \\ + \nabla p_i = \operatorname{div} \mathbb{S}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i, \ \ i = 1, \ldots, N. \end{gathered} \tag{6}$$

Подчеркнутые слагаемые в уравнениях импульсов (6), а также правые части в уравнениях неразрывности (5) малы, если предположить, что фазовые скорости компонент смеси $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_N$ мало отличаются друг от друга. Это предположение оправдано физически благодаря выравниванию скоростей, происходящему в результате столкновений молекул различных компонент гомогенных смесей [10], [17]. Предположим также, что во всех компонентах давления одинаковы $p_1 = \ldots = p_N = p$ и определяются суммарной плотностью ρ [3], [11]. Таким образом, получаем следующие уравнения:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{v}) = 0, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{7}$$

$$\frac{\partial(\rho_i \boldsymbol{u}_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) + \nabla p(\rho) = \operatorname{div} \mathbb{S}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i, \quad i = 1, \ldots, N \tag{8}$$

для N скалярных и N векторных (всего $4N$ скалярных) неизвестных функций, в которых связь p и ρ (т. е. функция $p(\cdot)$) предполагается заданной. Отметим, что уравнения импульсов (8) допускают эквивалентную запись

$$\rho_i \frac{\partial \boldsymbol{u}_i}{\partial t} + \rho_i (\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i)^* \boldsymbol{v} + \nabla p(\rho) = \operatorname{div} \mathbb{S}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i, \quad i = 1, \ldots, N,$$

причем $(\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i)^* \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_i$. Для исследования слабых решений такая (недивергентная) форма записи непригодна, но она позволяет увидеть (общий для всех уравнений системы) оператор материальной производной $\dfrac{d}{dt}=\dfrac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla$.

Основной целью настоящей работы является решение следующей задачи:

Задача А. *В замыкании* $\overline{Q}_T$ *области* $Q_T=(0,T)\times\Omega$, *где* $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ *— область течения,* $T>0$ *— произвольное действительное число, требуется найти скалярные поля* $\rho_i\geqslant 0$, $i=1,\ldots,N$, *и векторные поля* $\boldsymbol{u}_i$, $i=1,\ldots,N$, *удовлетворяющие системе уравнений* (7), (8) (*см.* (1) *и* (4)) *и следующим начальным и краевым*[2] *условиям:*

$$\rho_i|_{t=0}=\rho_{0i},\qquad \rho_i\boldsymbol{u}_i|_{t=0}=\boldsymbol{q}_i,\quad i=1,\ldots,N, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{u}_i|_{(0,T)\times\partial\Omega}=0,\quad i=1,\ldots,N, \tag{10}$$

где ρ_{0i} *(начальные плотности) и* $\boldsymbol{q}_i$ *(начальные импульсы),* $i=1,\ldots,N$ *— заданные функции, а* $\partial\Omega$ *— граница области* Ω.

Для простоты предположим, что давление и суммарная плотность связаны политропным уравнением состояния

$$p(s)=Ks^{\gamma} \tag{11}$$

с некоторыми постоянными $K>0$ и $\gamma>3/2$. Отметим, что ограничение $\gamma>3/2$ совпадает с таким же, возникающим с математической теории однокомпонентных вязких газов, и которое до сих пор не удается в этой теории ослабить.

Начальные данные в Задаче А будем брать из класса

$$\begin{gathered}\rho_{0i}\in L_{\gamma}(\Omega),\quad \rho_{0i}\geqslant 0,\quad \operatorname{mes}(\{\rho_{0i}=0\}\bigcap\{\boldsymbol{q}_i\neq 0\})=0,\\ \frac{|\boldsymbol{q}_i|^2}{\rho_{0i}}\in L_1(\Omega),\quad i=1,\ldots,N.\end{gathered} \tag{12}$$

Введем в рассмотрение величины (начальные скорости)

$$\boldsymbol{u}_{0i}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\dfrac{\boldsymbol{q}_i(\boldsymbol{x})}{\rho_{0i}(\boldsymbol{x})}, & \rho_{0i}(\boldsymbol{x})>0,\\[2ex] \text{произвольным образом продолжено}, & \rho_{0i}(\boldsymbol{x})=0,\end{cases}\qquad i=1,\ldots,N.$$

В силу (12) эти величины введены корректно, т. к. $\boldsymbol{q}_i=\rho_{0i}\boldsymbol{u}_{0i}$, $i=1,\ldots,N$. В дальнейшем, предполагая выполненными какие-либо свойства начального поля скоростей $\boldsymbol{u}_{0i}$ i–ой составляющей, будем подразумевать, что они справедливы хотя бы для одного из его продолжений на множество $\{\rho_{0i}=0\}$, и именно эти продолжения будут браться в качестве начальных данных для поля скоростей i–ой компоненты. Предположим, что

$$\boldsymbol{u}_{0i}\in L_{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}(\Omega),\quad i=1,\ldots,N, \tag{13}$$

тогда $\boldsymbol{u}_{0i}\cdot\boldsymbol{q}_i\in L_1(\Omega)$, $i=1,\ldots,N$. Наконец, на внешние силы для простоты наложим требования

$$\boldsymbol{f}_i\in L_{\infty}(Q_T),\quad i=1,\ldots,N. \tag{14}$$

[2]Условие (10) принято для определенности и может быть заменено на другие варианты, что не вызывает дополнительных трудностей, по крайней мере в случае однородных условий.

Определение 2.1. *Пусть в уравнениях* (8) *коэффициенты вязкости удовлетворяют ограничениям* (2), *давление задано равенством* (11), *а входные данные Задачи А удовлетворяют условиям* (12), (13), (14). *Слабым обобщенным решением Задачи А называется набор функций*

$$\rho_i \in L_\infty(0,T;L_\gamma(\Omega)), \quad \rho_i \geqslant 0, \quad \boldsymbol{u}_i \in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)), \quad i=1,\dots,N,$$

удовлетворяющих следующим условиям:

(1) *Плотности* ρ_i *удовлетворяют уравнениям неразрывности* (7) *и начальным условиям* (9) *в том смысле, что для любых* $\phi_i \in C_0^1\big([0,T);C^\infty(\overline{\Omega})\big)$ *выполняются интегральные тождества*

$$\int\limits_{Q_T} \Big(\rho_i \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \rho_i \boldsymbol{v}\cdot\nabla\phi_i\Big)\,d\boldsymbol{x}dt + \int\limits_{\Omega} \rho_{0i}\phi_i|_{t=0}\,d\boldsymbol{x} = 0, \ \ i=1,\dots,N;$$

(2) *Скорости* $\boldsymbol{u}_i$ *удовлетворяют уравнениям импульсов* (8) (*с определяющими уравнениями* (1)) *и начальным условиям* (9) *в том смысле, что для любых векторных полей* $\boldsymbol{\varphi}_i \in C_0^1([0,T);C_0^\infty(\Omega))$ *выполнены интегральные тождества*

$$\int\limits_{Q_T} \Big(\rho_i\boldsymbol{u}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}_i}{\partial t} + (\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_i):(\nabla\otimes\boldsymbol{\varphi}_i) + p(\rho)\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}_i + \rho_i\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{\varphi}_i\Big)\,d\boldsymbol{x}\,dt$$
$$= \int\limits_{Q_T} \mathbb{S}_i:(\nabla\otimes\boldsymbol{\varphi}_i)\,d\boldsymbol{x}\,dt - \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{q}_i\cdot\boldsymbol{\varphi}_i(0,\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}, \quad i=1,\dots,N$$

(*краевые условия* (10) *выполнены автоматически — в смысле функционального класса* $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$).

Замечание 2.2. *В* [4], [5], [6] *и* [12] *в определение слабого решения включаются требования его ренормализации и конечности энергии. Напомним, что под ренормализацией уравнения* (7) *понимается тот факт, что наряду с самим этим уравнением выполнены все уравнения, получаемые из него формальным умножением на* $G'(\rho_i)$ *(см. Замечание 7.1). Эти требования в самом деле являются существенными как для дальнейшей работы с этим решением, так и для доказательства самого факта его существования (см. конец десятого раздела). Однако в рамках решаемой в статье задачи (доказательство существования решения в виде Теоремы 2.3) в указанных дополнительных требованиях в Определении 2.1 нет необходимости.*

Основным результатом работы является следующая

Теорема 2.3. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *— ограниченная область класса* $C^{2+\nu_1}$ *с некоторым* $\nu_1 > 0$, *и* $T > 0$ *— произвольное конечное число. Тогда для любых входных данных класса, описанного в Определении 2.1, и при оговоренных в нем условиях на параметры уравнений, существует по крайней мере одно слабое обобщенное решение Задачи А.*

Замечание 2.4. *В процессе доказательства Теоремы 2.3 уточняются свойства решения, оговоренные в общих чертах в Определении 2.1. Например, доказываются такие свойства, как:*

$$\int\limits_{Q_T} \rho_i^{\gamma+\zeta_1}\, d\boldsymbol{x}\, dt \leqslant C_{66}, \quad i = 1, \ldots, N,$$

где $\zeta_1 \leqslant \dfrac{2\gamma}{3} - 1$, *если* $\gamma < 6$, *и* $\zeta_1 < \dfrac{\gamma}{2}$, *если* $\gamma \geqslant 6$, *а* C_{66} *зависит только от входных данных Задачи A* (*см. оценку* (141) *с условием* (133)),

$$\rho_i \in C([0,T]; L_{\gamma,\mathrm{weak}}(\Omega)), \qquad i = 1, \ldots, N,$$

$$\rho_i \boldsymbol{u}_i \in C([0,T]; L_{\frac{2\gamma}{\gamma+1},\mathrm{weak}}(\Omega)), \qquad i = 1, \ldots, N,$$

$$\rho_i \in C([0,T]; L_{\zeta_2}(\Omega)), \qquad \forall \zeta_2 < \gamma, \quad i = 1, \ldots, N \tag{15}$$

(*см.* (147), (151) *и Замечание 10.4*).

Весь оставшийся текст статьи посвящен доказательству Теоремы 2.3. Несмотря на то, что логика и техника доказательства в значительной степени следуют своим аналогам в теории однокомпонентных жидкостей, мы вынуждены воспроизводить все детали с достаточной подробностью — во-первых, потому, что аналогия не означает совпадение (и следует явно проложить курс, даже если он местами параллельный), а во-вторых, потому, что статья рассчитана не только на узких специалистов, полностью владеющих всеми нюансами упомянутой теории. Там, где эта теория используется готовыми блоками, мы, естественно, ее не повторяем, а лишь даем ссылки на используемые утверждения.

3. Априорные оценки

Сформулируем априорные оценки классических решений Задачи A. Как обычно в теории слабых решений нелинейных дифференциальных уравнений, в дальнейшем на эти оценки нет прямых ссылок, но их формулировка и доказательство облегчают понимание и формулировку манипуляций, производимых в процессе доказательства существования обобщенного решения посредством построения решений регуляризованных задач.

Выведем сначала соотношение баланса полной энергии. Сложив уравнения (7), получим уравнение неразрывности для суммарной плотности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho \boldsymbol{v}) = 0. \tag{16}$$

Интегрируя уравнения (7) и (16) по области Ω и учитывая начальные и граничные условия (9)–(10), приходим при всех $t \in [0,T]$ к равенствам

$$\int\limits_{\Omega} \rho_i(t)\, d\boldsymbol{x} = M_i, \quad i = 1, \ldots, N, \quad \int\limits_{\Omega} \rho(t)\, d\boldsymbol{x} = M, \tag{17}$$

где $M_i = \|\rho_{0i}\|_{L_1(\Omega)}$, $i = 1, \ldots, N$, $M = \sum\limits_{i=1}^{N} M_i$. Умножая теперь уравнение (16) на функцию $G'(\rho)$ (где $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция), приходим к равенству

$$\frac{\partial G(\rho)}{\partial t} + (\rho G'(\rho) - G(\rho))\operatorname{div} \boldsymbol{v} + \operatorname{div}(G(\rho)\boldsymbol{v}) = 0. \tag{18}$$

Полагая в (18)

$$G(s) = h(s) := s\int\limits_1^s \frac{p(\eta)}{\eta^2}\, d\eta = \frac{K}{\gamma - 1}\left(s^\gamma - s\right),$$

получим с учетом граничных условий (10) равенство

$$\begin{aligned} \int\limits_\Omega \nabla p(\rho(t)) \cdot \boldsymbol{v}(t)\, d\boldsymbol{x} &= -\int\limits_\Omega p(\rho(t)) \operatorname{div} \boldsymbol{v}(t)\, d\boldsymbol{x} \\ &= \frac{d}{dt}\int\limits_\Omega h(\rho(t))\, d\boldsymbol{x} \quad \forall\, t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{19}$$

Далее, используя уравнения (7) и граничные условия (10), выводим при всех $t \in [0, T]$ тождества

$$\begin{aligned} \int\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial t}(\rho_i(t)\boldsymbol{u}_i(t)) \cdot \boldsymbol{u}_i(t)\, d\boldsymbol{x} &+ \int\limits_\Omega \operatorname{div}(\rho_i(t)\boldsymbol{v}(t) \otimes \boldsymbol{u}_i(t)) \cdot \boldsymbol{u}_i(t)\, d\boldsymbol{x} \\ &= \frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \frac{1}{2}\rho_i(t)|\boldsymbol{u}_i(t)|^2\, d\boldsymbol{x}, \quad i = 1, \ldots, N. \end{aligned} \tag{20}$$

Умножим (8) на $\boldsymbol{u}_i$ и сложим. После интегрирования по Ω с учетом равенств (19) и (20) получим соотношение баланса полной энергии смеси

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int\limits_\Omega \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N \rho_i(t)|\boldsymbol{u}_i(t)|^2 + Nh(\rho(t))\right) d\boldsymbol{x} &+ \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N \mathbb{S}_i(t) : (\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i(t))\, d\boldsymbol{x} \\ &= \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N \rho_i(t)\boldsymbol{f}_i(t) \cdot \boldsymbol{u}_i(t)\, d\boldsymbol{x}, \end{aligned} \tag{21}$$

из которого заключаем, что

$$\begin{aligned} \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N \rho_i(t)|\boldsymbol{u}_i(t)|^2 + Nh(\rho(t))\right) d\boldsymbol{x} &+ \int\limits_{Q_t} \sum_{i=1}^N \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i)\, d\boldsymbol{x}\, d\tau \\ = \int\limits_{Q_t} \sum_{i=1}^N \rho_i\boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{u}_i\, d\boldsymbol{x}\, d\tau &+ \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N \rho_{0i}|\boldsymbol{u}_{0i}|^2 + Nh(\rho_0)\right) d\boldsymbol{x}, \end{aligned} \tag{22}$$

где $\rho_0 = \sum\limits_{i=1}^N \rho_{0i}$, $t \in [0, T]$.

Используя (17) и неравенство Юнга с малым множителем, получаем

$$(\text{правая часть } (22)) \leqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \int\limits_\Omega \frac{1}{4}\sum_{i=1}^N \rho_i|\boldsymbol{u}_i|^2\, d\boldsymbol{x} + C_1, \tag{23}$$

где положительная постоянная C_1 зависит только от $\{M_i\}$, K, N, T, $\{\|\boldsymbol{f}_i\|_{L_\infty(Q_T)}\}$, $\{\|\rho_{0i}\|_{L_\gamma(\Omega)}\}$, $\{\|\sqrt{\rho_{0i}}\boldsymbol{u}_{0i}\|_{L_2(\Omega)}\}$, γ и $|\Omega|$ (здесь и далее $|\Omega|$ — лебегова мера области Ω).

С другой стороны, в силу (3) и (17) верно при всех $t \in [0,T]$ неравенство

$$
\text{(левая часть (22))} \geqslant \int\limits_{\Omega} \Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \rho_i(t)|\boldsymbol{u}_i(t)|^2 + \frac{KN}{\gamma-1}\rho^{\gamma}(t)\Big)\,d\boldsymbol{x} - \\ -\frac{KNM}{\gamma-1} + C_0 \int\limits_{Q_t} \sum_{i=1}^{N} |\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i|^2\,d\boldsymbol{x}\,d\tau. \tag{24}
$$

Комбинируя (23) и (24), приходим к первому основному неравенству

$$
\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \int\limits_{\Omega} \Big(\sum_{i=1}^{N} \rho_i|\boldsymbol{u}_i|^2 + \rho^{\gamma}\Big)\,d\boldsymbol{x} + \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{N} |\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i|^2\,d\boldsymbol{x}\,dt \leqslant C_2. \tag{25}
$$

где $C_2 = C_2(C_0, C_1, K, M, N, \gamma)$.

С целью получения более сильной оценки плотностей воспользуемся оператором Боговского $\mathcal{B}$, который любой скалярной функции f, заданной на Ω, сопоставляет векторное поле $\boldsymbol{\xi}$, определяемое из следующей задачи [1]:

$$
\operatorname{div}\boldsymbol{\xi} = f - \overline{f}_{\Omega}, \quad \boldsymbol{\xi}|_{\partial\Omega} = 0, \tag{26}
$$

где

$$
\overline{f}_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} f\,d\boldsymbol{x}. \tag{27}
$$

Существуют такие способы однозначного выбора решения задачи (26), чтобы оператор $\mathcal{B}$ обладал следующими свойствами (см. [4], стр. 315–323):

1) $\|\mathcal{B}f\|_{W_r^{k+1}(\Omega)} \leqslant C_3(r,\Omega)\|f\|_{W_r^k(\Omega)}$ при всех $r \in (1,+\infty)$ и $k = -1, 0, 1, 2, \ldots$, а значит, оператор $\mathcal{B}\circ\operatorname{div}$ ограничен в $L_r(\Omega)$ при всех $r \in (1,+\infty)$;

2) $\dfrac{\partial}{\partial t}(\mathcal{B}f) = \mathcal{B}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial t}\Big)$.

Из (16) при всех $\sigma_0 > 0$ вытекает равенство

$$
\frac{\partial\rho^{\sigma_0}}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho^{\sigma_0}\boldsymbol{v}) - (\sigma_0-1)\rho^{\sigma_0}\operatorname{div}\boldsymbol{v},
$$

из которого следует

$$
\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t} = -(\mathcal{B}\circ\operatorname{div})(\rho^{\sigma_0}\boldsymbol{v}) - (\sigma_0-1)\mathcal{B}(\rho^{\sigma_0}\operatorname{div}\boldsymbol{v}), \tag{28}
$$

где $\boldsymbol{w} = \mathcal{B}(\rho^{\sigma_0})$. Из (25) при $2\sigma_0 < \gamma$ получаем

$$
\|\rho^{\sigma_0}\operatorname{div}\boldsymbol{v}\|_{L_2\left(0,T;L_{\frac{2\gamma}{\gamma+2\sigma_0}}(\Omega)\right)} \leqslant C_4, \quad \|\rho^{\sigma_0}\boldsymbol{v}\|_{L_2\left(0,T;L_{\frac{6\gamma}{\gamma+6\sigma_0}}(\Omega)\right)} \leqslant C_5,
$$

где положительные постоянные C_4, C_5 зависят от C_2, N, γ и σ_0. Тогда из свойств оператора $\mathcal{B}$ и равенства (28) следует оценка

$$
\Big\|\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}\Big\|_{L_2\left(0,T;L_{\frac{6\gamma}{\gamma+6\sigma_0}}(\Omega)\right)} \leqslant C_6(C_3, C_4, C_5, \sigma_0, \gamma).
$$

Далее из (25) имеем

$$
\|\rho_i\boldsymbol{u}_i\|_{L_\infty\left(0,T;L_{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)\right)} \leqslant C_7(C_2,\gamma), \quad i = 1,\ldots,N,
$$

а значит

$$\|\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i\|_{L_2\left(0,T;L_{\frac{6\gamma}{4\gamma+3}}(\Omega)\right)} \leqslant C_8(C_2, C_3, N, \gamma), \quad i = 1, \ldots, N.$$

Наконец, отметим, что при $3\sigma_0 < \gamma$

$$\|\mathbb{S}_i\|_{L_2(Q_T)} \leqslant C_9(C_2, \mathbf{\Lambda}, \mathbf{M}), \quad i = 1, \ldots, N,$$

$$\|\rho_i \boldsymbol{f}_i\|_{L_\infty\left(0,T;L_\gamma(\Omega)\right)} \leqslant C_{10}(C_2, \|\boldsymbol{f}_i\|_{L_\infty(Q_T)}, \gamma), \quad i = 1, \ldots, N,$$

$$\|\nabla \otimes \boldsymbol{w}\|_{L_\infty\left(0,T;L_{\frac{\gamma}{\sigma_0}}(\Omega)\right)} \leqslant C_{11}(C_2, C_3, \sigma_0, \gamma),$$

$$\|(\overline{\rho^{\sigma_0}})_\Omega\|_{L_\infty(Q_T)} \leqslant C_{12}(C_2, \sigma_0, \gamma), \quad \|\boldsymbol{w}\|_{L_\infty(Q_T)} \leqslant C_{13}(C_2, C_3, \sigma_0, \gamma).$$

Умножив уравнения (8) на $\boldsymbol{w}$, после интегрирования по Q_T получим тождества

$$\begin{gathered}\int\limits_{Q_T} p(\rho)\rho^{\sigma_0}\, d\boldsymbol{x}\, dt = \int\limits_{Q_T} p(\rho)(\overline{\rho^{\sigma_0}})_\Omega\, d\boldsymbol{x}\, dt \\ + \int\limits_\Omega \rho_i(t)\boldsymbol{u}_i(t)\cdot\boldsymbol{w}(t)\, d\boldsymbol{x}\Big|_{t=0}^T - \int\limits_{Q_T} \rho_i \boldsymbol{u}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\, d\boldsymbol{x}\, dt - \int\limits_{Q_T} \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{w}\, d\boldsymbol{x}\, dt \\ + \int\limits_{Q_T} (\mathbb{S}_i - \rho_i \boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_i) : (\nabla\otimes\boldsymbol{w})\, d\boldsymbol{x}\, dt, \quad i = 1, \ldots, N.\end{gathered} \tag{29}$$

Из полученных оценок следует ограниченность слагаемых в правых частях (29) при $3\sigma_0 < \gamma - \dfrac{3}{2}$, что позволяет заключить

$$\int\limits_{Q_T} \rho^{\zeta_3}\, d\boldsymbol{x}\, dt \leqslant C_{14} \qquad \forall \zeta_3 < \frac{8\gamma - 3}{6}, \tag{30}$$

где C_{14} зависит от K, C_6–C_{13} и их аргументов.

Возможно доказательство более сильного свойства, чем (30) (т. е. с бо́льшим ζ_3), если действовать аналогично выводу формулы (140), но в третьем разделе в этом нет необходимости. Оценки (25) и (30) содержат всю существенную информацию, на которой основано дальнейшее построение слабого решения Задачи А.

4. Конструкция приближенных решений

Заменим функции ρ_{0i} гладкими функциями $\rho_{0i\delta} \in C^{2+\nu_2}(\overline{\Omega})$, $0 < \nu_2 < 1$, а именно такими, что

$$\begin{gathered}\delta \leqslant \rho_{0i\delta} \leqslant \delta^{-\frac{1}{\beta}}, \quad \nabla\rho_{0i\delta}\cdot\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0, \\ \rho_{0i\delta} \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} \rho_{0i} \quad \text{сильно в} \quad L_\gamma(\Omega), \quad i = 1, \ldots, N,\end{gathered} \tag{31}$$

где $\boldsymbol{n}$ — внешняя единичная нормаль к границе $\partial\Omega$ области Ω, $\delta \in (0, 1]$ — малый параметр (который впоследствии будет устремлен к нулю), а показатель

$$\beta > \max\{\gamma, 6\} \tag{32}$$

выбран произвольно и останется фиксированным.

Будем искать приближенное решение Задачи A как решение следующей задачи (индексы m, ε и δ у величин, от них зависящих, мы пока опускаем):

$$\frac{\partial\rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{v}) = \varepsilon\Delta\rho_i, \tag{33}$$
$$\rho_i|_{t=0} = \rho_{0i}, \quad \nabla\rho_i\cdot\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \quad i = 1,\ldots,N,$$

$$\begin{aligned}\int\limits_{Q_T} \Big(\rho_i\boldsymbol{u}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}_i}{\partial t} + (\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_i):(\nabla\otimes\boldsymbol{\varphi}_i) + \widetilde{p}(\rho)\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}_i + \rho_i\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{\varphi}_i\Big)\,d\boldsymbol{x}\,dt \\ = \int\limits_{Q_T}\Big(\varepsilon((\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i)\boldsymbol{\varphi}_i)\cdot\nabla\rho_i + \mathbb{S}_i:(\nabla\otimes\boldsymbol{\varphi}_i)\Big)\,d\boldsymbol{x}\,dt \\ - \int\limits_{\Omega}\rho_{0i}\boldsymbol{u}_{0i}\cdot\boldsymbol{\varphi}_i(0,\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}, \quad i = 1,\ldots,N\end{aligned} \tag{34}$$

— эти интегральные тождества предполагаются выполненными для всех $\boldsymbol{\varphi}_i \in C_0^1([0,T);X_m)$, $i = 1,\ldots,N$. Здесь приняты следующие обозначения:

- $X_m = \operatorname{Lin}\{\boldsymbol{\psi_i}\}_{i=1}^m \subset L_2(\Omega)$, где $\{\boldsymbol{\psi_i}\}_{i=1}^m$ — базис в $W_2^1(\Omega)$, ортонормированный в $L_2(\Omega)$, состоящий из гладких функций, имеющих компактный носитель в области Ω, для определенности норму в X_m положим равной норме в $L_2(\Omega)$;
- $\varepsilon \in (0,1]$ — малый параметр (который впоследствии будет устремлен к нулю),
- $m \in \mathbb{N}$ (впоследствии $m \to +\infty$),
- $\widetilde{p}(s) = p(s) + \delta s^\beta$.

Из теории параболических уравнений известно (см. [4], Лемма 3.1, стр. 54 и [12], Предложение 7.39, стр. 345; напомним, что Ω — ограниченная область класса $C^{2+\nu_1}$, $\nu_1 \in (0,1)$), что если $\boldsymbol{v} \in C([0,T];X_m)$ задано, то:

- существуют единственные классические решения (33), т. е. $\rho_i \in V_{[0,T]}$, $i = 1,\ldots,N$, где
$$V_{[0,T]} = \Big\{g \,\Big|\quad g \in C([0,T];C^{2+\nu_2}(\overline{\Omega})), \quad \frac{\partial g}{\partial t} \in C([0,T];C^{\nu_2}(\overline{\Omega}))\Big\};$$
- отображения $\mathcal{S}_i : \boldsymbol{v} \mapsto \rho_i$, $i = 1,\ldots,N$, ограничены из $C([0,T];X_m)$ в $V_{[0,T]}$ и непрерывны со значениями в $C^1([0,T]\times\overline{\Omega})$;
- для всех $t \in [0,T]$, $\boldsymbol{x} \in \Omega$, $i = 1,\ldots,N$ верна оценка

$$\delta\exp\Big(-\|\operatorname{div}\boldsymbol{v}\|_{L_1(0,t;L_\infty(\Omega))}\Big) \leqslant \rho_i(t,\boldsymbol{x}) \leqslant \delta^{-\frac{1}{\beta}}\exp\Big(\|\operatorname{div}\boldsymbol{v}\|_{L_1(0,t;L_\infty(\Omega))}\Big); \tag{35}$$

- если $\|\boldsymbol{v}^k\|_{L_\infty(0,T;W_\infty^1(\Omega))} \leqslant \widetilde{R}$, $k = 1,2$, $\widetilde{R} > 0$, то при всех $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}\|(S_i(\boldsymbol{v}^1) - S_i(\boldsymbol{v}^2))(t)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \\ \leqslant \widetilde{C}(\widetilde{R},T,\varepsilon)t\|S_i(\boldsymbol{v}^{1,2})(0,\cdot)\|_{W_2^1(\Omega)}\|\boldsymbol{v}^1 - \boldsymbol{v}^2\|_{L_\infty(0,T;W_\infty^1(\Omega))}, \quad i = 1,\ldots,N.\end{aligned} \tag{36}$$

Покажем, что существуют $\tau_0 \in (0,T)$ и $\boldsymbol{u}_i \in C([0,\tau_0];X_m)$, $i = 1,\ldots,N$, удовлетворяющие уравнениям (34), в которых вместо T стоит τ_0, а $\rho_i = S_i(\boldsymbol{v})$, $i = 1,\ldots,N$. Для этого обозначим $\mathbf{u} = (\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_N)$ и рассмотрим при всех $t \in [0,T]$ отображение

$$\Psi : C\big([0,t];X_m^N\big) \to C\big([0,t];X_m^N\big), \quad \Psi(\mathbf{u})(t) = (\mathcal{T}_1(\mathbf{u})(t),\ldots,\mathcal{T}_N(\mathbf{u})(t)),$$

$$\mathcal{T}_i(\mathbf{u})(t) = \mathcal{M}^{-1}_{\rho_i(t)} \left(P_m \rho_{0i} \boldsymbol{u}_{0i} + \int\limits_0^t P_m \mathcal{N}_i(\mathbf{u})(s) ds \right), \quad i = 1, \dots, N,$$

где P_m — это ортогональный проектор из $L_2(\Omega)$ в X_m,

$$\mathcal{N}_i(\mathbf{u}) = \operatorname{div} \mathbb{S}_i - \nabla \widetilde{p}(\rho) - \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) - \varepsilon(\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i)^* \nabla \rho_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\rho_i = S_i(\boldsymbol{v}), \quad \boldsymbol{v} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \boldsymbol{u}_j, \quad \rho = \sum_{j=1}^N \rho_j, \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\mathcal{M}_\xi : X_m \to X_m, \quad (\mathcal{M}_\xi \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int\limits_\Omega \xi \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \, d\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in X_m, \quad i = 1, \dots, N,$$

т. е. $\mathcal{M}_\xi(\boldsymbol{w}) = P_m(\xi \boldsymbol{w})$. Отметим сначала, что благодаря эквивалентности норм в конечномерном пространстве X_m справедливы неравенства

$$\|P_m \mathcal{N}_i(\mathbf{u})\|_{X_m} \leqslant C_{15} \Big(\sum_{j=1}^N \|\boldsymbol{u}_j\|_{X_m} + \|\rho_i\|_{L_\infty(\Omega)} \Big(\sum_{j=1}^N \|\boldsymbol{u}_j\|^2_{X_m} \Big)$$

$$+\varepsilon \|\rho_i\|_{L_\infty(\Omega)} \|\boldsymbol{u}_i\|_{X_m} + \|\rho_i\|^\gamma_{L_\infty(\Omega)} + \delta \|\rho_i\|^\beta_{L_\infty(\Omega)} + \|\rho_i\|_{L_\infty(\Omega)} \Big) \tag{37}$$

$$\forall\, t \in [0, T], \quad i = 1, \dots, N,$$

где положительная постоянная C_{15} зависит от $\{\|\boldsymbol{f}_i\|_{L_\infty(Q_T)}\}$, $\{\|\boldsymbol{\psi}_i\|_{W^2_2(\Omega)}\}$, K, m, β, γ, $\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{M}$ и $|\Omega|$. Далее, нетрудно проверить, что при всех $t \in [0, T]$

$$\|\mathcal{M}^{-1}_{\rho_i(t)}\|_{\mathcal{L}(X_m, X_m)} \leqslant \delta^{-1} \exp\Big(\|\operatorname{div} \boldsymbol{v}\|_{L_1(0,t;L_\infty(\Omega))} \Big), \quad i = 1, \dots, N.$$

Кроме того, т. к. для любых $\rho_i^k = S_i(\boldsymbol{v}^k)$, $k = 1, 2$, верно представление

$$\mathcal{M}^{-1}_{\rho_i^1(t)} - \mathcal{M}^{-1}_{\rho_i^2(t)} = \mathcal{M}^{-1}_{\rho_i^2(t)} (\mathcal{M}_{\rho_i^2(t)} - \mathcal{M}_{\rho_i^1(t)}) \mathcal{M}^{-1}_{\rho_i^1(t)},$$

то при всех $t \in [0, T]$, $i = 1, \dots, N$

$$\|\mathcal{M}^{-1}_{\rho_i^1(t)} - \mathcal{M}^{-1}_{\rho_i^2(t)}\|_{\mathcal{L}(X_m, X_m)}$$

$$\leqslant C_{16}(m) \delta^{-2} \exp\left(\sum_{k=1}^2 \|\operatorname{div} \boldsymbol{v}^k\|_{L_1(0,t;L_\infty(\Omega))} \right) \|(\rho_i^1 - \rho_i^2)(t)\|_{L_1(\Omega)}. \tag{38}$$

Покажем, что Ψ отображает множество

$$B_{R,\tau_0} = \Big\{ \mathbf{u} \in C([0, \tau_0]; X^N_m) \,\Big|\, \|\mathbf{u}\|_{C([0,\tau_0];X^N_m)} \leqslant R \Big\}$$

в себя и является сжимающим в B_{R,τ_0} (при этом $R > R^*$, что не ограничивает общность, а R^* будет выбрано ниже). Благодаря (35) и (37) имеем для всех $\mathbf{u} \in B_{R,\tau_0}$

$$\|\Psi(\mathbf{u})\|_{C([0,\tau_0];X^N_m)}$$

$$\leqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant \tau_0} \sum_{i=1}^N \|\mathcal{M}^{-1}_{\rho_i(t)}\|_{\mathcal{L}(X_m, X_m)} \Big(\|P_m \rho_{0i} \boldsymbol{u}_{0i}\|_{X_m} + \int\limits_0^t \|P_m \mathcal{N}_i(\mathbf{u})(s)\|_{X_m} ds \Big)$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^N \delta^{-1} \, e^{C_{17}(N,m)\tau_0 R} \Big(C_{18}(\gamma, |\Omega|) \delta^{-\frac{1}{\beta}} \|\boldsymbol{u}_{0i}\|_{L_{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}(\Omega)}$$

$$+\tau_0 C_{15}\big\{NR + NR^2\delta^{-\frac{1}{\beta}}e^{C_{17}(N,m)\tau_0 R} + R\delta^{-\frac{1}{\beta}}e^{C_{17}(N,m)\tau_0 R}$$

$$+\delta^{-\frac{\gamma}{\beta}}e^{C_{17}(N,m)\tau_0 R\gamma} + e^{C_{17}(N,m)\tau_0 R\beta} + \delta^{-\frac{1}{\beta}}e^{C_{17}(N,m)\tau_0 R}\big\}\Big) \leqslant \frac{R}{2}$$

при подходящем выборе $R^*\Big(C_{15}, C_{18}, \big\{\|\boldsymbol{u}_{0i}\|_{L_{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}(\Omega)}\big\}, N, \beta, \gamma, \delta\Big)$ и при всех $\tau_0 < C_{19}(C_{17}, R, \text{аргументы } R^*)$, поэтому отображение Ψ переводит B_{R,τ_0} в себя. Теперь покажем, что отображение Ψ является сжимающим в B_{R,τ_0}. Выберем произвольно $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2 \in B_{R,\tau_0}$ и заметим, что при $i = 1, \ldots, N$

$$\mathcal{T}_i(\mathbf{u}^1)(t) - \mathcal{T}_i(\mathbf{u}^2)(t) = \big(\mathcal{M}^{-1}_{\rho_i^1(t)} - \mathcal{M}^{-1}_{\rho_i^2(t)}\big)P_m\rho_{0i}\boldsymbol{u}_{0i}$$

$$+\big(\mathcal{M}^{-1}_{\rho_i^1(t)} - \mathcal{M}^{-1}_{\rho_i^2(t)}\big)\int_0^t P_m\mathcal{N}_i(\mathbf{u}^1)(s)\,ds + \mathcal{M}^{-1}_{\rho_i^2(t)}\int_0^t P_m(\mathcal{N}_i(\mathbf{u}^1)(s) - \mathcal{N}_i(\mathbf{u}^2)(s))\,ds,$$

где

$$\rho_i^k = S_i(\boldsymbol{v}^k), \quad \boldsymbol{v}^k = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \boldsymbol{u}_j^k, \quad \rho^k = \sum_{j=1}^N \rho_j^k, \quad i = 1, \ldots, N, \quad k = 1, 2,$$

откуда, используя (35) и (38), получаем при $i = 1, \ldots, N$

$$\|\mathcal{T}_i(\mathbf{u}^1) - \mathcal{T}_i(\mathbf{u}^2)\|_{C([0,\tau_0];X_m^N)}$$

$$\leqslant C_{20}\Big(\sum_{i=1}^N \|\rho_i^1 - \rho_i^2\|_{C([0,\tau_0];L_2(\Omega))} + \tau_0\|\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2\|_{C([0,\tau_0];X_m^N)}\Big), \tag{39}$$

где C_{20} зависит от C_{15}, $\{\|\boldsymbol{f}_i\|_{L_\infty(Q_T)}\}$, $\big\{\|\boldsymbol{u}_{0i}\|_{L_{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}(\Omega)}\big\}$, $\{\|\boldsymbol{\psi}_i\|_{W_2^2(\Omega)}\}$, K, N, R, T, m, β, γ, δ, ε, $\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{M}$ и $|\Omega|$. Теперь, используя свойство (36), из (39) получаем

$$\|\Psi(\mathbf{u}^1) - \Psi(\mathbf{u}^2)\|_{C([0,\tau_0];X_m^N)}$$

$$\leqslant C_{21}(\widetilde{C}, C_{20}, \{\|\boldsymbol{\psi}_i\|_{W^1_\infty(\Omega)}\}, N, R, T, m, \beta, \delta, \varepsilon, |\Omega|)\tau_0\|\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2\|_{C([0,\tau_0];X_m^N)}.$$

Подчиняя τ_0 условию $\tau_0 < \dfrac{1}{C_{21}}$, приходим к выводу, что Ψ является сжимающим в B_{R,τ_0}. Выбирая

$$\tau_0 < \min\left\{C_{19}, \frac{1}{C_{21}}\right\},$$

заключаем, что существует единственное решение задачи (33), (34), где $T := \tau_0$. Наконец, в силу свойств оператора $\mathcal{M}_\xi$ (см. [12], стр. 352–353) имеем

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}_i}{\partial t} = -\mathcal{M}^{-1}_{\rho_i(t)}\mathcal{M}_{\frac{\partial\rho_i}{\partial t}(t)}\mathcal{M}^{-1}_{\rho_i(t)}\left(P_m\rho_{0i}\boldsymbol{u}_{0i} + \int_0^t P_m\mathcal{N}_i(\mathbf{u})(s)ds\right)$$

$$+\mathcal{M}^{-1}_{\rho_i(t)}P_m\mathcal{N}_i(\mathbf{u})(t), \quad i = 1, \ldots, N,$$

и ввиду $\rho_i \in V_{[0,T]}$, $i = 1, \ldots, N$, и (35), получаем

$$\boldsymbol{u}_i \in C^1([0,\tau_0]; X_m), \quad i = 1, \ldots, N.$$

Чтобы продолжить построенное локальное решение на произвольный промежуток времени $[0,T]$, необходимо доказать равномерную по τ_0 ограниченность в пространстве $C([0,T]; X_m)$ решений $\boldsymbol{u}_i$, $i = 1, \ldots, N$, уравнений (34).

Для этого возьмем в (34) в качестве пробных функций $\boldsymbol{\varphi}_i = \chi_i \boldsymbol{u}_i$, $i = 1, \dots, N$, где $\chi_i \in C_0^1[0, T)$, $i = 1, \dots, N$, и получим, как и при выводе (21), равенство

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \rho_i(t) |\boldsymbol{u}_i(t)|^2 + N\widetilde{h}(\rho(t)) \right) d\boldsymbol{x} + \int\limits_{Q_t} \sum_{i=1}^{N} \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i)\, d\boldsymbol{x}\, d\tau \\ &+N\varepsilon \int\limits_{Q_t} \frac{\widetilde{p}'(\rho)}{\rho} |\nabla \rho|^2\, d\boldsymbol{x}\, d\tau = \int\limits_{Q_t} \sum_{i=1}^{N} \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{u}_i\, d\boldsymbol{x}\, d\tau \\ &+ \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \rho_{0i} |\boldsymbol{u}_{0i}|^2 + N\widetilde{h}(\rho_0) \right) d\boldsymbol{x} \qquad \forall\, t \in [0, T], \end{aligned} \tag{40}$$

где $\widetilde{h}(s) = s \int\limits_1^s \frac{\widetilde{p}(\eta)}{\eta^2}\, d\eta = \frac{K}{\gamma - 1}\, (s^\gamma - s) + \frac{\delta}{\beta - 1}\, \big(s^\beta - s\big)$, причем

$$\int\limits_{Q_t} \frac{\widetilde{p}'(\rho)}{\rho} |\nabla \rho|^2\, d\boldsymbol{x}\, d\tau = \int\limits_{Q_t} \Big(K\gamma \rho^{\gamma - 2} + \delta \beta \rho^{\beta - 2} \Big) |\nabla \rho|^2\, d\boldsymbol{x}\, d\tau.$$

Таким образом, действуя теперь аналогично выводу (25), из (40) получим неравенство

$$\begin{aligned} &\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \int\limits_{\Omega} \Big(\sum_{i=1}^{N} \rho_i |\boldsymbol{u}_i|^2 + \rho^\gamma + \rho^\beta \Big) d\boldsymbol{x} + \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{N} |\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i|^2\, d\boldsymbol{x}\, dt \\ &+\varepsilon \int\limits_{Q_T} (\rho^{\gamma - 2} + \rho^{\beta - 2}) |\nabla \rho|^2\, d\boldsymbol{x}\, dt \leqslant C_{22}, \end{aligned} \tag{41}$$

в котором положительная постоянная C_{22} зависит только от C_0, $\{\|\boldsymbol{f}_i\|_{L_\infty(Q_T)}\}$, $\Big\{\|\boldsymbol{u}_{0i}\|_{L_{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}(\Omega)}\Big\}$, K, N, T, β, γ, δ и $|\Omega|$. Отсюда сразу следует, что

$$\|\mathbf{u}\|_{L_2(0,T;X_m)} \leqslant C_{23}(C_{22}, \{\|\boldsymbol{\psi}_i\|_{W_2^1(\Omega)}\}, m). \tag{42}$$

Теперь, благодаря (35) и (42), из (41) выводим

$$\|\mathbf{u}\|_{C([0,T];X_m)} \leqslant C_{24}(C_{22}, C_{23}, \{\|\boldsymbol{\psi}_i\|_{W_\infty^1(\Omega)}\}, N, T, m, \delta).$$

Эта оценка позволяет продолжить за конечное число шагов построенное выше локальное решение на произвольный конечный промежуток $[0, T]$.

Теперь необходимо доказать разрешимость Задачи A. Для этого нужно в (33), (34) перейти к пределу сначала при $m \to +\infty$, а затем по $\varepsilon \to 0$ и $\delta \to 0$. При этом на каждом этапе необходимо получать оценки решений, равномерные по тому параметру, по которому предполагается совершать предельный переход.

5. Предельный переход по $m \to +\infty$ в приближенных уравнениях неразрывности

Получим оценки решений задачи (33), (34), равномерные по m, на основании которых и будет происходить предельный переход по $m \to +\infty$. Сначала заметим, что из (31) вытекают неравенства

$$\delta^{1 + \frac{1}{\beta}} \leqslant \frac{\rho_{0i}}{\rho_{0j}} \leqslant \delta^{-\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)}, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

а из (33) следует, что отношения плотностей $\dfrac{\rho_i}{\rho_j}$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\rho_i}{\rho_j}\Big)+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\Big(\frac{\rho_i}{\rho_j}\Big)=\varepsilon\Big(\Delta\Big(\frac{\rho_i}{\rho_j}\Big)+2\nabla\Big(\frac{\rho_i}{\rho_j}\Big)\cdot\nabla(\ln\rho_j)\Big),\quad i,j=1,\ldots,N,$$

откуда получаем, что при всех $t\in[0,T]$, $\boldsymbol{x}\in\Omega$ имеют место ключевые соотношения

$$0<\delta^{1+\frac{1}{\beta}}\rho_j(t,\boldsymbol{x})\leqslant\rho_i(t,\boldsymbol{x})\leqslant\delta^{-\left(1+\frac{1}{\beta}\right)}\rho_j(t,\boldsymbol{x}),\quad i,j=1,\ldots,N, \tag{43}$$

позволяющие проводить анализ разноименных произведений вида $\rho_i\boldsymbol{u}_j$ и т. п. (при $i\neq j$). Далее, из (41) сразу следуют равномерные по m и ε оценки

$$\|\rho_i\|_{L_\infty(0,T;L_\beta(\Omega))}\leqslant C_{25}(C_{22},\beta,\gamma),\quad i=1,\ldots,N, \tag{44}$$

$$\|\sqrt{\rho_i}\boldsymbol{u}_i\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}+\|\boldsymbol{u}_i\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}\leqslant C_{26}(C_{22}),\quad i=1,\ldots,N, \tag{45}$$

а значит, ввиду (43), и

$$\|\sqrt{\rho_i}\boldsymbol{v}\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}\leqslant C_{27}(C_{26},N,\beta,\delta),\quad i=1,\ldots,N. \tag{46}$$

Привлекая (41), получаем оценку ρ_i в $L_\beta(0,T;L_{3\beta}(\Omega))$, и поэтому при всех $\theta_1\in[0,1]$

$$\|\rho_i\|_{L_{\frac{\beta}{\theta_1}}\left(0,T;L_{\frac{3\beta}{3-2\theta_1}}(\Omega)\right)}\leqslant C_{28}(C_{22},C_{25},\beta,\gamma,\varepsilon),\quad i=1,\ldots,N, \tag{47}$$

откуда (при $\theta_1=3/5$) получаем $\|\rho_i\|_{L_{\frac{5\beta}{3}}(Q_T)}\leqslant C_{28}$, $i=1,\ldots,N$. Из (47) при $\theta_1=1$ и второй оценки в (45) следует

$$\|\sqrt{\rho_i}\boldsymbol{u}_i\|_{L_{\frac{2\beta}{\beta+1}}\left(0,T;L_{\frac{6\beta}{\beta+1}}(\Omega)\right)}\leqslant C_{29}(C_{26},C_{28}),\quad i=1,\ldots,N,$$

а теперь, с привлечением первой оценки в (45), получаем при всех $\theta_2\in[0,1]$

$$\|\sqrt{\rho_i}\boldsymbol{u}_i\|_{L_{\frac{2\beta}{\theta_2(\beta+1)}}\left(0,T;L_{\frac{6\beta}{(3-2\theta_2)\beta+\theta_2}}(\Omega)\right)}\leqslant C_{30}(C_{26},C_{28}),\quad i=1,\ldots,N. \tag{48}$$

Теперь умножим уравнения (33) на ρ_i и проинтегрируем результат по Ω, получим при $i=1,\ldots,N$

$$\|\sqrt{\varepsilon}\nabla\rho_i\|^2_{L_2(Q_T)}\leqslant\frac{1}{2}\Big(\|\rho_{0i}\|^2_{L_2(\Omega)}+\sqrt{T}\sum_{i=1}^{N}\|\rho_i\|^2_{L_\infty(0,T;L_4(\Omega))}\|\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i\|_{L_2(Q_T)}\Big),$$

откуда (ввиду $\beta\geqslant 4$) следуют равномерные по m и ε оценки

$$\|\sqrt{\varepsilon}\nabla\rho_i\|_{L_2(Q_T)}\leqslant C_{31}(C_{22},C_{25},N,T,\beta,\delta,|\Omega|),\quad i=1,\ldots,N. \tag{49}$$

На основании (44), (45) и (49) из последовательности $\boldsymbol{u}_{im}$, ρ_{im}, $m\in\mathbb{N}$, построенных решений задачи (33), (34) может быть выделена подпоследовательность (которую мы обозначим так же), для которой при $m\to+\infty$ для всех $i=1,\ldots,N$ имеют место сходимости (далее у величин, зависящих от m, будем писать индекс m)

$$\rho_{im}\to\rho_i\ \ *\text{-слабо в}\ \ L_\infty(0,T;L_\gamma(\Omega))\ \text{ и в }\ L_\infty(0,T;L_\beta(\Omega)),$$

$$\nabla\rho_{im}\to\nabla\rho_i\ \ \text{слабо в}\ \ L_2(Q_T), \tag{50}$$

$$\boldsymbol{u}_{im}\to\boldsymbol{u}_i\ \ \text{слабо в}\ \ L_2\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\big), \tag{51}$$

а значит

$$\boldsymbol{v}_m \to \boldsymbol{v} \text{ слабо в } L_2\big(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\big), \tag{52}$$

где $\boldsymbol{v} = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} \boldsymbol{u}_i$.

Докажем сильную сходимость плотностей. Из оценок (47) и (48) следует

$$\begin{aligned} &\|\rho_{im}\boldsymbol{u}_{im}\|_{L_{\frac{2\beta}{\theta_2\beta+\theta_1+\theta_2}}\left(0,T;L_{\frac{6\beta}{(3-2\theta_2)\beta+\theta_2-2\theta_1+3}}(\Omega)\right)} \\ &+\|\rho_{im}\boldsymbol{v}_m\|_{L_{\frac{2\beta}{\theta_2\beta+\theta_1+\theta_2}}\left(0,T;L_{\frac{6\beta}{(3-2\theta_2)\beta+\theta_2-2\theta_1+3}}(\Omega)\right)} \leqslant C_{32}(C_{28},C_{30},N) \end{aligned} \tag{53}$$

при любых $i=1,\dots,N$, $(\theta_1,\theta_2)\in[0,1]^2$. Из уравнений (33), ввиду (49) и (53) с $\theta_1=\theta_2=0$, получаем

$$\left\|\frac{\partial\rho_{im}}{\partial t}\right\|_{L_2\left(0,T;W^{-1}_{\frac{2\beta}{\beta+1}}(\Omega)\right)} \leqslant C_{33}(C_{31},C_{32},T,|\Omega|), \quad i=1,\dots,N.$$

Таким образом, последовательности ρ_{im}, $i=1,\dots,N$, равностепенно непрерывны по $t\in[0,T]$ со значениями в $W^{-1}_{\frac{2\beta}{\beta+1}}(\Omega) = \Big(\overset{\circ}{W}{}^1_{\frac{2\beta}{\beta-1}}(\Omega)\Big)^*$. Тогда благодаря (44) приходим (см. [12], Лемма 6.2, стр. 301) к сходимости (выделяя подпоследовательности и переобозначая их так же)

$$\rho_{im} \to \rho_i \text{ при } m\to+\infty \text{ в } C([0,T];L_{\beta,\mathrm{weak}}(\Omega)), \quad i=1,\dots,N. \tag{54}$$

Далее, т. к. имеют место вложения (символы $\hookrightarrow$ и $\hookrightarrow\hookrightarrow$ здесь и далее обозначают соответственно непрерывное и компактное вложения пространств)

$$W_2^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_{\sigma_1}(\Omega) \hookrightarrow W^{-1}_{\frac{2\beta}{\beta+1}}(\Omega) \quad \text{при всех } \sigma_1 \in \left[\frac{6\beta}{5\beta+3},6\right),$$

последовательности $\{\rho_{im}\}$ ограничены в $L_\infty(0,T;L_{\sigma_1}(\Omega))\bigcap L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$ (ввиду $\beta\geqslant 6$), а $\left\{\dfrac{\partial\rho_{im}}{\partial t}\right\}$ ограничены в $L_2\big(0,T;W^{-1}_{\frac{2\beta}{\beta+1}}(\Omega)\big)$, то, выбрав подходящие подпоследовательности и переобозначив их так же, получаем (см. [12], Теорема 1.71, стр. 59 — Теорема Лионса—Обена), что при $m\to+\infty$

$$\rho_{im} \to \rho_i \text{ сильно в } L_{\sigma_2}(0,T;L_{\sigma_1}(\Omega)) \quad \forall\, \sigma_2<+\infty, \quad i=1,\dots,N. \tag{55}$$

Теперь, используя (47), получаем

$$\rho_{im} \to \rho_i \text{ при } m\to+\infty \text{ сильно в } L_{\sigma_3}(0,T;L_{\sigma_4}(\Omega)), \quad i=1,\dots,N \tag{56}$$

для всех $\sigma_3 \leqslant \dfrac{\beta}{\theta_1}$, $\sigma_4 \leqslant \dfrac{3\beta}{3-2\theta_1}$, причем хотя бы одно из неравенств должно быть строгим.

Выбирая в (53) любые θ_1, θ_2, после выбора подпоследовательности, мы можем утверждать сходимости

$$\rho_{im}\boldsymbol{u}_{im} \to \rho_i\boldsymbol{u}_i, \quad \rho_{im}\boldsymbol{v}_m \to \rho_i\boldsymbol{v} \quad *\text{-слабо в пространстве (53)}. \tag{57}$$

Теперь, переходя к пределу по $m \to +\infty$ в слабом смысле в (33), получаем, что предельные функции $\boldsymbol{v}$, ρ_i, $i = 1, \ldots, N$, удовлетворяют уравнениям

$$\int\limits_{Q_T} \Big(\rho_i \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + (\rho_i \boldsymbol{v} - \varepsilon \nabla \rho_i) \cdot \nabla \phi_i\Big)\, d\boldsymbol{x}dt + \int\limits_{\Omega} \rho_{0i}\phi_i|_{t=0}\, d\boldsymbol{x} = 0 \quad \forall\, \phi_i \in C_0^1([0,T); C^\infty(\overline{\Omega})), \;\; i = 1, \ldots, N. \tag{58}$$

Докажем, что предельные функции $\boldsymbol{v}$, ρ_i, $i = 1, \ldots, N$ удовлетворяют п. в. уравнениям, начальным и граничным условиям (33). Из классических оценок решений параболических уравнений (см. [12], Лемма 7.38, стр. 344), получаем (ввиду $\beta > 6$) равномерные по m и ε оценки

$$\varepsilon \|\nabla \rho_{im}\|_{L_{\alpha_1}(0,T;L_{\alpha_2}(\Omega))} \leqslant C_{34}(C_{32}, \{\|\rho_{0i}\|_{L_\beta(\Omega)}\}, \theta_1, \theta_2, \Omega), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{59}$$

где

$$\alpha_1 = \frac{2\beta}{\theta_2\beta + \theta_1 + \theta_2}, \qquad \alpha_2 = \frac{6\beta}{(3 - 2\theta_2)\beta + \theta_2 - 2\theta_1 + 3}$$

при любых $(\theta_1, \theta_2) \in [0,1]^2 \backslash \{0,0\}$. Тогда при $i = 1, \ldots, N$

$$\begin{gathered} \varepsilon \|\nabla \otimes (\rho_{im}\boldsymbol{u}_{im})\|_{L_{\alpha_3}\left(0,T;L_{\alpha_4}(\Omega)\right)} \\ +\varepsilon \|\nabla \otimes (\rho_{im}\boldsymbol{v}_m)\|_{L_{\alpha_3}\left(0,T;L_{\alpha_4}(\Omega)\right)} + \varepsilon \|(\nabla \otimes \boldsymbol{u}_{im})^* \nabla \rho_{im}\|_{L_{\alpha_3}\left(0,T;L_{\alpha_5}(\Omega)\right)} \\ +\varepsilon \|(\nabla \otimes \boldsymbol{v}_m)^* \nabla \rho_{im}\|_{L_{\alpha_3}\left(0,T;L_{\alpha_5}(\Omega)\right)} \leqslant C_{35}(C_{26}, C_{34}, N, \theta_1, \theta_2), \end{gathered} \tag{60}$$

где $\alpha_3 = \dfrac{2\beta}{(\theta_2 + 1)\beta + \theta_1 + \theta_2}$, $\alpha_4 = \dfrac{6\beta}{2(2 - \theta_2)\beta + \theta_2 - 2\theta_1 + 3}$,
$\alpha_5 = \dfrac{6\beta}{3(2 - \theta_2)\beta + \theta_2 - 2\theta_1 + 3}$, при любых

$$\theta_1 \in [0,1], \quad \theta_2 \in \left(\frac{3 - 2\theta_1}{3\beta + 1}, \frac{\beta - \theta_1}{\beta + 1}\right) \tag{61}$$

(эти ограничения обеспечивают $\alpha_{3,5} > 1$). Снова обращаясь к классическим оценкам решений параболических уравнений (см. [12], Лемма 7.37, стр. 344), выводим при $i = 1, \ldots, N$

$$\begin{gathered} \varepsilon^{1-\frac{1}{\alpha_3}} \|\rho_{im}\|_{L_\infty\left(0,T;W_{\alpha_4}^{2-\frac{2}{\alpha_3}}(\Omega)\right)} + \left\|\frac{\partial \rho_{im}}{\partial t}\right\|_{L_{\alpha_3}\left(0,T;L_{\alpha_4}(\Omega)\right)} \\ +\varepsilon \|\rho_{im}\|_{L_{\alpha_3}\left(0,T;W_{\alpha_4}^2(\Omega)\right)} \leqslant C_{36}\left(\varepsilon^{1-\frac{1}{\alpha_3}} \|\rho_{0i}\|_{W_{\alpha_4}^{2-\frac{2}{\alpha_3}}(\Omega)} + \frac{C_{35}}{\varepsilon}\right), \end{gathered} \tag{62}$$

где $C_{36} = C_{36}(\theta_1, \theta_2, \beta, \Omega)$.

Замечание 5.1. *Из* (62) *для любых неотрицательных*

$$\theta_3 \leqslant \frac{2\beta + 3(\theta_2 + 1)}{2((\theta_2 + 1)\beta + \theta_1 + \theta_2)}$$

следует равномерная по m *ограниченность* ρ_{im} *в* $L_{\alpha_7}\big(0,T; L_{\alpha_8}(\Omega)\big)$*, где*

$$\alpha_7 = \frac{\alpha_3}{\theta_3} = \frac{2\beta}{((\theta_2 + 1)\beta + \theta_1 + \theta_2)\theta_3},$$

$$\alpha_8 = \frac{3\alpha_3\alpha_4}{3\alpha_3 + 2(1-\theta_3)\alpha_4 - 2\alpha_3\alpha_4} = \frac{6\beta}{2\beta + 3(\theta_2+1) - 2((\theta_2+1)\beta + \theta_1 + \theta_2)\theta_3},$$

а значит равномерная по m ограниченность $\widetilde{p}(\rho_m)$ в $L_{\frac{\alpha_7}{\beta}}\big(0,T;L_{\frac{\alpha_8}{\beta}}(\Omega)\big)$, причем для того, чтобы $\frac{\alpha_7}{\beta} \in (1,+\infty]$ и $\frac{\alpha_8}{\beta} \in (1,+\infty]$, необходимо выполнение условий для θ_3, которые совместны лишь при требовании $\beta < \frac{1}{2} - \frac{3\theta_2}{2}$, которое мы исключаем. Тем самым, оценки (62) не позволяют получить оценку давления, и необходимо для этого пользоваться оценкой (47).

Из (62) получаем, что предельные функции ρ_i, $\boldsymbol{u}_i$, $i = 1,\dots,N$, принадлежат следующим функциональным классам:

$$\begin{gathered} \frac{\partial\rho_i}{\partial t} \in L_{\alpha_3}\big(0,T;L_{\alpha_4}(\Omega)\big), \qquad \rho_i \in L_{\alpha_3}\big(0,T;W^2_{\alpha_4}(\Omega)\big), \\ \nabla\otimes(\rho_i\boldsymbol{v}) \in L_{\alpha_3}\big(0,T;L_{\alpha_4}(\Omega)\big), \qquad i=1,\dots,N \end{gathered} \tag{63}$$

$\Big(\boldsymbol{v} = \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}\boldsymbol{u}_i\Big)$, и удовлетворяют уравнениям (33) почти всюду в Q_T. Заметим, что из (63) вытекает

$$\rho_i \in C([0,T];L_{\alpha_4}(\Omega)), \quad i=1,\dots,N.$$

Из (54) следует, что для всех $t \in [0,T]$ $\rho_{im}(t) \to \rho_i(t)$ при $m \to +\infty$ слабо в $L_\beta(\Omega)$, $i = 1,\dots,N$, в частности, при $t = 0$ это позволяет утверждать, что начальные условия (33) выполняются п. в. в Ω и для предельных функций. Из (62) заключаем, что для п. в. $t \in (0,T)$ $\rho_{im}(t) \to \rho_i(t)$ при $m \to +\infty$ слабо в $W^2_{\alpha_4}(\Omega) \hookrightarrow W^1_{\alpha_6}(\partial\Omega)$, $\alpha_6 = \frac{2\alpha_4}{3-\alpha_4}$, $i = 1,\dots,N$, а т. к. граничное условие (33) выполняется для ρ_{im}, $i = 1,\dots,N$, то $\nabla\rho_i\cdot\boldsymbol{n} = 0$ для п. в. $(t,\boldsymbol{x}) \in (0,T)\times\partial\Omega$, $i = 1,\dots,N$.

6. Предельный переход по $m \to +\infty$ в приближенных уравнениях импульсов

Следующим этапом является предельный переход в (34) по $m \to +\infty$. Взяв в (34) для всех $m \in \mathbb{N}$ в качестве пробных функций $\boldsymbol{\varphi}_i = \chi_i\boldsymbol{\omega}_i$, $i = 1,\dots,N$, где $\chi_i \in C^1_0[0,T)$, $\boldsymbol{\omega}_i \in X_m$, $i = 1,\dots,N$, получим для п. в. $t \in (0,T)$ равенства

$$\begin{gathered} \int\limits_\Omega \frac{\partial(\rho_{im}\boldsymbol{u}_{im})}{\partial t}\cdot\boldsymbol{\omega}_i\,d\boldsymbol{x} = \int\limits_\Omega \Big(-\mathbb{S}_{im} : (\nabla\otimes\boldsymbol{\omega}_i) + \widetilde{p}(\rho_m)\operatorname{div}\boldsymbol{\omega}_i \\ +(\rho_{im}\boldsymbol{v}_m\otimes\boldsymbol{u}_{im}) : (\nabla\otimes\boldsymbol{\omega}_i) - \varepsilon\big((\nabla\otimes\boldsymbol{u}_{im})\boldsymbol{\omega}_i\big)\cdot\nabla\rho_{im} \\ +\rho_{im}\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{\omega}_i\Big)\,d\boldsymbol{x} =: \sum_{k=1}^{5}\langle \boldsymbol{J}^{(k)}_{im}, \boldsymbol{\omega}_i\rangle, \qquad i=1,\dots,N. \end{gathered} \tag{64}$$

Из оценок (45), (47), (53) и (60) следует, что (для всех $i = 1,\dots,N$) величины $\boldsymbol{J}^{(1)}_{im}$ ограничены равномерно по m в пространстве $L_2\big(0,T;W^{-1}_2(\Omega)\big)$, а $\boldsymbol{J}^{(k)}_{im}$, $k = 2,\dots,5$ — в пространствах $L_{\frac{1}{\theta_1}}\big(0,T;W^{-1}_{\frac{3}{3-2\theta_1}}(\Omega)\big)$, $L_{\alpha_3}\big(0,T;W^{-1}_{\alpha_4}(\Omega)\big)$,

$L_{\alpha_3}\big(0,T;L_{\alpha_5}(\Omega)\big)\hookrightarrow L_{\alpha_3}\big(0,T;W^{-1}_{\frac{3\alpha_5}{3-\alpha_5}}(\Omega)\big)$ и $L_\beta(Q_T)\hookrightarrow L_2\big(0,T;W_2^{-1}(\Omega)\big)$ соответственно. Таким образом, приходим к равномерной по m ограниченности $\dfrac{\partial(\rho_{im}\boldsymbol{u}_{im})}{\partial t}$ в пространстве $L_{\alpha_9}(0,T;W^{-1}_{\alpha_{10}}(\Omega))$, $i=1,\ldots,N$, где

$$\alpha_9=\min\left\{\frac{1}{\theta_1},\alpha_3\right\},\quad \alpha_{10}=\min\left\{2,\frac{3}{3-2\theta_1},\alpha_4,\frac{3\alpha_5}{3-\alpha_5}\right\}.$$

Поскольку имеют место вложения $W^1_{\alpha_4}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow L_{\sigma_5}(\Omega)\hookrightarrow W_1^{-1}(\Omega)$ при всех $\sigma_5\in\left[1,\dfrac{3\alpha_4}{3-\alpha_4}\right)$, последовательности $\{\rho_{im}\boldsymbol{u}_{im}\}$ ограничены в $L_{\alpha_3}(0,T;W^1_{\alpha_4}(\Omega))$, а $\left\{\dfrac{\partial(\rho_{im}\boldsymbol{u}_{im})}{\partial t}\right\}$ ограничены в $L_1(0,T;W_1^{-1}(\Omega))$, то, выбрав подходящие подпоследовательности и переобозначив их так же, получаем (Теорема Лионса—Обена)

$$\rho_{im}\boldsymbol{u}_{im}\to\rho_i\boldsymbol{u}_i \text{ при } m\to+\infty \text{ сильно в } L_{\sigma_6}(0,T;L_{\sigma_5}(\Omega)),\quad i=1,\ldots,N,$$

при всех $\sigma_6\in[1,\alpha_3)$. Привлекая оценку (53), получаем

$$\rho_{im}\boldsymbol{u}_{im}\to\rho_i\boldsymbol{u}_i \text{ при } m\to+\infty \text{ сильно в } L_{\sigma_7}(0,T;L_{\sigma_8}(\Omega)),\ i=1,\ldots,N, \tag{65}$$

где при всех $\theta_4\in(0,1]$

$$\sigma_7=\frac{2\beta}{(\theta_2+\theta_4)\beta+\theta_1+\theta_2},\quad \sigma_8=\frac{6\beta}{(3-\theta_4-2\theta_2)\beta+\theta_2-2\theta_1+3}.$$

Теперь в силу (51) заключаем, что при $m\to+\infty$

$$\rho_{im}\boldsymbol{u}_{im}\otimes\boldsymbol{u}_{im}\to\rho_i\boldsymbol{u}_i\otimes\boldsymbol{u}_i \text{ слабо в } L_{\sigma_9}\big(0,T;L_{\sigma_{10}}(\Omega)\big),\quad i=1,\ldots,N, \tag{66}$$

$$\rho_{im}\boldsymbol{v}_m\otimes\boldsymbol{u}_{im}\to\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_i \text{ слабо в } L_{\sigma_9}\big(0,T;L_{\sigma_{10}}(\Omega)\big),\quad i=1,\ldots,N, \tag{67}$$

где $\sigma_9=\dfrac{2\beta}{(\theta_2+\theta_4+1)\beta+\theta_1+\theta_2}$, $\sigma_{10}=\dfrac{6\beta}{(4-\theta_4-2\theta_2)\beta+\theta_2-2\theta_1+3}$, причем $\sigma_{10}>1$ ввиду уже введенных условий, а $\sigma_9>1$ при выполнении неравенства $\theta_4<1-\theta_2-\dfrac{\theta_1+\theta_2}{\beta}$, правая часть которого положительна ввиду (61).

Докажем теперь сильную сходимость градиентов плотностей в $L_2(Q_T)$. Из (33) следуют при $i=1,\ldots,N$ равенства

$$\begin{aligned}&\frac12\|\rho_{im}(t)\|^2_{L_2(Q_T)}+\varepsilon\int_0^T(T-t)\|\nabla\rho_{im}(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\,dt\\&=\frac{T}{2}\|\rho_{0i}\|^2_{L^2(\Omega)}-\frac12\int_0^T(T-t)\int_\Omega\rho_{im}^2(t)\operatorname{div}\boldsymbol{v}_m(t)\,d\boldsymbol{x}dt.\end{aligned}\tag{68}$$

С другой стороны, при $i=1,\ldots,N$ имеют место аналогичные тождества для предельных функций

$$\begin{aligned}&\frac12\|\rho_{i}(t)\|^2_{L_2(Q_T)}+\varepsilon\int_0^T(T-t)\|\nabla\rho_{i}(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\,dt\\&=\frac{T}{2}\|\rho_{0i}\|^2_{L^2(\Omega)}-\frac12\int_0^T(T-t)\int_\Omega\rho_{i}^2(t)\operatorname{div}\boldsymbol{v}(t)\,d\boldsymbol{x}dt.\end{aligned}\tag{69}$$

Переходя к пределу в (68) при $m \to +\infty$, используя (52), (56) и вычитая из получившихся тождеств (69), приходим к соотношениям

$$\lim_{m\to+\infty} \int_0^T (T-t)\|\nabla\rho_{im}(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\,dt = \int_0^T (T-t)\|\nabla\rho_i(t)\|^2_{L_2(\Omega)}\,dt, \quad i=1,\dots,N.$$

Эти равенства вместе с (50) доказывают, что при $m \to +\infty$

$$\nabla\rho_{im} \to \nabla\rho_i \ \text{ сильно в } \ L_2(Q_T), \quad i=1,\dots,N,$$

а значит, благодаря (59),

$$\nabla\rho_{im} \to \nabla\rho_i \ \text{ сильно в } \ L_{\sigma_{11}}(0,T;L_{\sigma_{12}}(\Omega))$$
$$\forall\,\sigma_{11} \in (2,\alpha_1)\,,\ \sigma_{12} \in (2,\alpha_2)\,, \quad i=1,\dots,N,$$

причем, ввиду (61), $\alpha_{1,2} > 2$, что обеспечивает совместность условий для $\sigma_{11,12}$. Отсюда, используя (51), получаем также, что при $m \to +\infty$ для всех $i=1,\dots,N$

$$(\nabla\otimes\boldsymbol{u}_{im})^*\nabla\rho_{im} \to (\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i)^*\nabla\rho_i \ \text{ слабо в } \ L_{\sigma_{13}}(0,T;L_{\sigma_{14}}(\Omega))$$
$$\forall\,\sigma_{13} \in \left(1, \frac{2\alpha_1}{2+\alpha_1}\right),\ \sigma_{14} \in \left(1, \frac{2\alpha_2}{2+\alpha_2}\right). \tag{70}$$

Теперь предельный переход в уравнениях (34) по $m \to +\infty$ становится тривиальным. Действительно, умножая (64) на $\chi_i \in C^1_0[0,T)$ и интегрируя по $[0,T]$, находим

$$\begin{gathered}\int_{Q_T}\Big(\rho_{im}\boldsymbol{u}_{im}\cdot\frac{\partial(\chi_i\boldsymbol{\omega}_i)}{\partial t} + (\rho_{im}\boldsymbol{v}_m\otimes\boldsymbol{u}_{im}):(\nabla\otimes(\chi_i\boldsymbol{\omega}_i)) + \widetilde{p}(\rho_m)\mathrm{div}\,(\chi_i\boldsymbol{\omega}_i)\\ +\rho_{im}\boldsymbol{f}_i\cdot(\chi_i\boldsymbol{\omega}_i)\Big)d\boldsymbol{x}dt = \int_{Q_T}\Big(\varepsilon((\nabla\otimes\boldsymbol{u}_{im})\chi_i\boldsymbol{\omega}_i)\cdot\nabla\rho_{im}\\ +\mathbb{S}_{im}:(\nabla\otimes(\chi_i\boldsymbol{\omega}_i))\Big)\,d\boldsymbol{x}\,dt - \int_\Omega \rho_{0i}\boldsymbol{u}_{0i}\cdot(\chi_i\boldsymbol{\omega}_i)|_{t=0}\,d\boldsymbol{x}\\ \forall\,\boldsymbol{\omega}_i \in X_{m_0}\ \forall\,m_0 \leqslant m, \quad i=1,\dots,N.\end{gathered} \tag{71}$$

Переход к пределу в первом слагаемом в левой части (71) осуществляется благодаря (96), во втором — (67), третьем — (47), (56), четвертом — (56), в первом слагаемом в правой части (71) переход возможен благодаря (70), во втором — (51). В результате предельного перехода получаем, что предельные функции ρ_i, $\boldsymbol{u}_i$, $i=1,\dots,N$, удовлетворяют аналогу (71) при всех $\boldsymbol{\omega}_i \in X_{m_0}$, $m_0 \in \mathbb{N}$, $i=1,\dots,N$, который мы запишем в следующем виде:

$$\begin{gathered}\int_{Q_T}\Big(\rho_i\boldsymbol{u}_i\cdot\frac{\partial(\chi_i\boldsymbol{\omega}_i)}{\partial t} - \mathrm{div}\,(\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_i)\cdot(\chi_i\boldsymbol{\omega}_i) - \nabla\widetilde{p}(\rho)\cdot(\chi_i\boldsymbol{\omega}_i)\\ +\rho_i\boldsymbol{f}_i\cdot(\chi_i\boldsymbol{\omega}_i)\Big)\,d\boldsymbol{x}\,dt = \int_{Q_T}\Big(\varepsilon((\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i)\chi_i\boldsymbol{\omega}_i)\cdot\nabla\rho_i\\ -\mathrm{div}\,\mathbb{S}_i\cdot(\chi_i\boldsymbol{\omega}_i)\Big)\,d\boldsymbol{x}\,dt - \int_\Omega \rho_{0i}\boldsymbol{u}_{0i}\cdot(\chi_i\boldsymbol{\omega}_i)|_{t=0}\,d\boldsymbol{x}, \quad i=1,\dots,N,\end{gathered} \tag{72}$$

где интегралы от обобщенных функций понимаются как их действия на соответствующие регулярные сомножители. Поскольку все сомножители при $\boldsymbol{\omega}_i$ в (72) принадлежат пространству $W^{-1}_{\sigma_{15}}(\Omega)$ при п. в. $t \in (0,T)$, где

$$\sigma_{15} = \min\left\{\sigma_{10}, \frac{\sigma_4}{\beta}, \frac{3\sigma_{14}}{3-\sigma_{14}}\right\},$$

то формула (72) справедлива для всех $\boldsymbol{\omega}_i \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\sigma'_{15}}(\Omega)$ (здесь и далее штрих у показателя означает сопряжение по Лебегу). Ввиду (53) с $\theta_1 = \theta_2 = 0$ и вышеупомянутой ограниченности $\dfrac{\partial(\rho_{im}\boldsymbol{u}_{im})}{\partial t}$ в пространстве $L_{\alpha_9}(0,T;W^{-1}_{\alpha_{10}}(\Omega))$ получаем (см. [12], Лемма 6.2, стр. 301), что $\rho_{im}\boldsymbol{u}_{im} \to \rho_i\boldsymbol{u}_i$ в $C([0,T];L_{\frac{2\beta}{\beta+1},\mathrm{weak}}(\Omega))$, $i = 1,\dots,N$, т. е. $\rho_i\boldsymbol{u}_i \in C([0,T];L_{\frac{2\beta}{\beta+1},\mathrm{weak}}(\Omega))$, $i = 1,\dots,N$ и принимают значения $\rho_{0i}\boldsymbol{u}_{0i}$, $i = 1,\dots,N$ в смысле этого пространства. Поэтому (72) можно переписать при $i = 1,\dots,N$ в виде

$$\int\limits_{Q_T}\Big[-\frac{\partial(\rho_i\boldsymbol{u}_i)}{\partial t}\cdot(\chi_i\boldsymbol{\omega}_i) - \operatorname{div}(\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_i)\cdot(\chi_i\boldsymbol{\omega}_i) - \nabla\widetilde{p}(\rho)\cdot(\chi_i\boldsymbol{\omega}_i)+$$

$$+\rho_i\boldsymbol{f}_i\cdot(\chi_i\boldsymbol{\omega}_i)\Big]d\boldsymbol{x}\,dt = \int\limits_{Q_T}\Big(\varepsilon((\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i)\chi_i\boldsymbol{\omega}_i)\cdot\nabla\rho_i - \operatorname{div}\mathbb{S}_i\cdot(\chi_i\boldsymbol{\omega}_i)\Big)\,d\boldsymbol{x}\,dt.$$

Теперь ясно, что (34) (для предельных функций) справедливо для всех $\boldsymbol{\varphi}_i \in C^1_0([0,T);C^1_0(\Omega))$, $i = 1,\dots,N$. Отметим, что (см. [12], Упражнение 6.3, стр. 302) существуют векторные поля $\boldsymbol{q}_i \in C\big([0,T];L_{\frac{2\beta}{\beta+1},\mathrm{weak}}\big)$, $i = 1,\dots,N$, такие, что для п. в. $t \in (0,T)$ имеют место равенства

$$\boldsymbol{q}_i(t) = \rho_i(t)\boldsymbol{u}_i(t) \quad \text{п. в. в } \Omega, \quad i = 1,\dots,N.$$

Тогда (см. [12], Лемма 7.17, стр. 321), в результате изменения поля скоростей $\boldsymbol{u}_i$ каждой составляющей смеси на множестве нулевой меры в $(0,T)$, получаем

$$\rho_i\boldsymbol{u}_i \in C\big([0,T];L_{\frac{2\beta}{\beta+1},\mathrm{weak}}\big), \quad i = 1,\dots,N. \tag{73}$$

Последним этапом в этом разделе является получение так называемого энергетического соотношения для предельных функций ρ_i, $\boldsymbol{u}_i$, $i = 1,\dots,N$. Для этого возьмем в (34) (до предельного перехода) в качестве пробных функций $\boldsymbol{\varphi}_i = \chi\boldsymbol{u}_{im}$, $i = 1,\dots,N$, где $\chi \in C^1_0[0,T)$, $\chi \geqslant 0$, и получим благодаря (3), (33) неравенство[3]

$$-\int\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\rho_{0i}|\boldsymbol{u}_{0i}|^2 + N\widetilde{h}(\rho_0)\right)\chi(0)\,d\boldsymbol{x}$$

$$-\int\limits_{Q_T}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\rho_{im}|\boldsymbol{u}_{im}|^2 + N\widetilde{h}(\rho_m)\right)\frac{d\chi}{dt}\,d\boldsymbol{x}dt$$

$$+C_0\int\limits_{Q_T}\sum_{i=1}^{N}|\nabla\otimes\boldsymbol{u}_{im}|^2\chi\,d\boldsymbol{x}\,dt + N\varepsilon\int\limits_{Q_T}\frac{\widetilde{p}'(\rho_m)}{\rho_m}|\nabla\rho_m|^2\chi\,d\boldsymbol{x}\,dt$$

[3]Неравенство возникает исключительно в силу применения неравенства (3).

$$\leqslant \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{N} \rho_{im} \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{u}_{im} \chi \, d\boldsymbol{x} \, dt.$$

В результате предельного перехода по $m \to +\infty$ ввиду (51), (56), (65) и (66) приходим к энергетическому соотношению[4]

$$\int\limits_{Q_T} \Big(\frac{\partial}{\partial t} \Big(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \rho_i |\boldsymbol{u}_i|^2 + N\widetilde{h}(\rho) \Big) + C_0 \sum_{i=1}^{N} |\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i|^2 + N\varepsilon\delta\beta\rho^{\beta-2} |\nabla\rho|^2 \Big) \chi \, d\boldsymbol{x} \, dt$$

$$\leqslant \int\limits_{Q_T} \Big(\sum_{i=1}^{N} \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{u}_i \Big) \chi \, d\boldsymbol{x} \, dt \qquad \forall \chi \in C_0^1[0,T), \ \ \chi \geqslant 0,$$

которое эквивалентно неравенству (для п. в. $t \in (0,T)$)

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\Omega} \Big(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \rho_i(t) |\boldsymbol{u}_i(t)|^2 + N\widetilde{h}(\rho(t)) \Big) \, d\boldsymbol{x} \\ &+ C_0 \int\limits_{Q_t} \sum_{i=1}^{N} |\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i|^2 \, d\boldsymbol{x} \, d\tau + N\varepsilon\delta\beta \int\limits_{Q_t} \rho^{\beta-2} |\nabla\rho|^2 \, d\boldsymbol{x} \, d\tau \\ &\leqslant \int\limits_{Q_t} \sum_{i=1}^{N} \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{u}_i \, d\boldsymbol{x} \, d\tau + \int\limits_{\Omega} \Big(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \rho_{0i} |\boldsymbol{u}_{0i}|^2 + N\widetilde{h}(\rho_0) \Big) \, d\boldsymbol{x}. \end{aligned} \tag{74}$$

7. Предельный переход по $\varepsilon \to 0$, кроме слагаемых с давлением

Получим сначала оценки решений задачи (33), (34), равномерные по малому параметру ε. Из неравенств (43)–(46), (49), а также соотношений (50), (51) и (55) следуют при $i = 1, \ldots, N$ оценки (отныне у величин, зависящих от ε, будем писать индекс ε)

$$0 \leqslant \delta^{1+\frac{1}{\beta}} \rho_{j\varepsilon}(t,\boldsymbol{x}) \leqslant \rho_{i\varepsilon}(t,\boldsymbol{x}) \leqslant \delta^{-\left(1+\frac{1}{\beta}\right)} \rho_{j\varepsilon}(t,\boldsymbol{x}) \ \text{ для п. в. } \ (t,\boldsymbol{x}) \in Q_T, \tag{75}$$

$$\|\rho_{i\varepsilon}\|_{L_\infty(0,T;L_\beta(\Omega))} \leqslant C_{25}, \tag{76}$$

$$\begin{aligned} &\|\rho_{i\varepsilon}|\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}|^2\|_{L_\infty(0,T;L_1(\Omega))} + \|\rho_{i\varepsilon}|\boldsymbol{v}_\varepsilon|^2\|_{L_\infty(0,T;L_1(\Omega))} \\ &+ \|\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))} \leqslant C_{26} + C_{27}, \end{aligned} \tag{77}$$

$$\sqrt{\varepsilon}\, \|\nabla\rho_{i\varepsilon}\|_{L_2(Q_T)} \leqslant C_{31}. \tag{78}$$

Из (76) и (77) вытекают оценки

$$\begin{aligned} &\|\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}\|_{L_2\left(0,T;L_{\frac{6\beta}{\beta+6}}(\Omega)\right)} + \|\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}\|_{L_\infty\left(0,T;L_{\frac{2\beta}{\beta+1}}(\Omega)\right)} \\ &+ \|\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{v}_\varepsilon\|_{L_2\left(0,T;L_{\frac{6\beta}{\beta+6}}(\Omega)\right)} + \|\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{v}_\varepsilon\|_{L_\infty\left(0,T;L_{\frac{2\beta}{\beta+1}}(\Omega)\right)} \\ &\leqslant C_{37}(C_{25}, C_{26}, C_{27}), \quad i = 1, \ldots, N, \end{aligned} \tag{79}$$

---

[4]Перед предельным переходом мы отбрасываем неотрицательное слагаемое $N\varepsilon \int\limits_{Q_T} K\gamma\rho_m^{\gamma-2} |\nabla\rho_m|^2 \chi \, d\boldsymbol{x} \, dt$ чтобы избежать возможной сингулярности в случае $\gamma < 2$.

откуда получаем при любых $\theta_5 \in [0,1]$ неравенства

$$\|\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}\|_{L_{\frac{2}{\theta_5}}\left(0,T;L_{\frac{6\beta}{(3-2\theta_5)\beta+3(\theta_5+1)}}(\Omega)\right)} \tag{80}$$
$$+\|\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{v}_{\varepsilon}\|_{L_{\frac{2}{\theta_5}}\left(0,T;L_{\frac{6\beta}{(3-2\theta_5)\beta+3(\theta_5+1)}}(\Omega)\right)} \leqslant C_{38}(C_{37}), \quad i=1,\ldots,N.$$

Тогда из уравнений (33) следуют равномерные по ε оценки

$$\varepsilon\|\nabla\rho_{i\varepsilon}\|_{L_{\frac{2}{\theta_5}}\left(0,T;L_{\frac{6\beta}{(3-2\theta_5)\beta+3(\theta_5+1)}}(\Omega)\right)} \tag{81}$$
$$\leqslant C_{39}(C_{38},\{\|\rho_{0i}\|_{L_\beta(\Omega)}\},\theta_5,\Omega), \quad i=1,\ldots,N$$

при любых $\theta_5 \in (0,1]$. Поэтому (при $i=1,\ldots,N$) верны неравенства

$$\varepsilon\|\nabla\otimes(\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon})\|_{L_{\frac{2}{\theta_5+1}}\left(0,T;L_{\frac{6\beta}{2(2-\theta_5)\beta+3(\theta_5+1)}}(\Omega)\right)}$$
$$+\varepsilon\|\nabla\otimes(\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{v}_{\varepsilon})\|_{L_{\frac{2}{\theta_5+1}}\left(0,T;L_{\frac{6\beta}{2(2-\theta_5)\beta+3(\theta_5+1)}}(\Omega)\right)} \tag{82}$$
$$+\varepsilon\|(\nabla\otimes\boldsymbol{u}_{i\varepsilon})^*\nabla\rho_{i\varepsilon}\|_{L_{\frac{2}{\theta_5+1}}\left(0,T;L_{\frac{6\beta}{2(2-\theta_5)\beta+3(\theta_5+1)}}(\Omega)\right)}$$
$$+\varepsilon\|(\nabla\otimes\boldsymbol{v}_{\varepsilon})^*\nabla\rho_{i\varepsilon}\|_{L_{\frac{2}{\theta_5+1}}\left(0,T;L_{\frac{6\beta}{2(2-\theta_5)\beta+3(\theta_5+1)}}(\Omega)\right)} \leqslant C_{40}(C_{26},C_{27},C_{39}).$$

Наконец, из (77) и (80) следуют для всех $i,j=1,\ldots,N$ оценки

$$\|\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}\otimes\boldsymbol{u}_{j\varepsilon}\|_{L_{\frac{2}{\theta_5+1}}\left(0,T;L_{\frac{6\beta}{2(2-\theta_5)\beta+3(\theta_5+1)}}(\Omega)\right)} \leqslant C_{41}(C_{26},C_{27},C_{38}). \tag{83}$$

Далее, чтобы улучшить интегрируемость плотностей, воспользуемся оператором Боговского $\mathcal{B}$ (см. раздел 3). Из уравнений (33) для предельных функций $\rho_{i\varepsilon}$, $\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}$, $i=1,\ldots,N$, вытекает равенство

$$\frac{\partial\boldsymbol{w}_\varepsilon}{\partial t} = -(\mathcal{B}\circ\operatorname{div})(\rho_\varepsilon\boldsymbol{v}_\varepsilon - \varepsilon\nabla\rho_\varepsilon),$$

где $\boldsymbol{w}_\varepsilon = \mathcal{B}(\rho_\varepsilon)$. Из свойств $\mathcal{B}$ и (80), (81) следует оценка

$$\left\|\frac{\partial\boldsymbol{w}_\varepsilon}{\partial t}\right\|_{L_{\frac{2}{\theta_5}}\left(0,T;L_{\frac{6\beta}{(3-2\theta_5)\beta+3(\theta_5+1)}}(\Omega)\right)} \leqslant C_{42}(C_{38},C_{39},\theta_5,\beta,\Omega). \tag{84}$$

Отметим также следующие равномерные по ε оценки:

$$\|\mathbb{S}_{i\varepsilon}\|_{L_2(Q_T)} \leqslant C_{43}(C_{26},C_{27},\boldsymbol{\Lambda},\mathbf{M}), \quad i=1,\ldots,N,$$
$$\|\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{f}_i\|_{L_\infty\left(0,T;L_\beta(\Omega)\right)} \leqslant C_{25}\|\boldsymbol{f}_i\|_{L_\infty(Q_T)}, \quad i=1,\ldots,N,$$
$$\|\nabla\otimes\boldsymbol{w}_\varepsilon\|_{L_\infty\left(0,T;L_\beta(\Omega)\right)} \leqslant C_{44}(C_{25},\beta,\Omega), \tag{85}$$
$$\overline{(\rho_\varepsilon)}_\Omega = \frac{1}{|\Omega|}\sum_{i=1}^N\|\rho_{0i}\|_{L_1(\Omega)}, \quad \|\boldsymbol{w}_\varepsilon\|_{L_\infty(Q_T)} \leqslant C_{45}(C_{44},\beta).$$

Возьмем в уравнениях (34) в качестве тестовых функций векторные поля $\boldsymbol{\varphi}_i = \chi_k \boldsymbol{w}_\varepsilon$, $k \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, N$, где $\chi_k \in C_0^\infty(0,T)$, $0 \leqslant \chi_k(t) \leqslant 1$, $\chi_k(t) = 1$ при $t \in \left[\dfrac{1}{k}, T - \dfrac{1}{k}\right]$, $|\chi_k'(t)| \leqslant 2k$, $k \in \mathbb{N}$ $\Big($заметим, что $\boldsymbol{\varphi}_i \in L_\infty(0,T; W_\beta^1(\Omega))$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial t} \in L_{\frac{2}{\theta_5}}\big(0,T; L_{\frac{6\beta}{(3-2\theta_5)\beta+3(\theta_5+1)}}(\Omega)\big)$, $i = 1, \ldots, N\Big)$. Тогда получим тождества

$$\begin{aligned}
\int\limits_{Q_T} \widetilde{p}(\rho_\varepsilon)\rho_\varepsilon \chi_k \, d\boldsymbol{x}\, dt &= \int\limits_{Q_T} \widetilde{p}(\rho_\varepsilon)\overline{(\rho_\varepsilon)}_\Omega \chi_k \, d\boldsymbol{x}\, dt - \int\limits_{Q_T} \rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon} \cdot \Big(\frac{d\chi_k}{dt}\boldsymbol{w}_\varepsilon \\
&+\chi_k \frac{\partial \boldsymbol{w}_\varepsilon}{\partial t}\Big)\, d\boldsymbol{x}\, dt - \int\limits_{Q_T} \rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{f}_i \cdot \chi_k \boldsymbol{w}_\varepsilon \, d\boldsymbol{x}\, dt + \int\limits_{Q_T} \mathbb{S}_{i\varepsilon} : (\nabla \otimes \boldsymbol{w}_\varepsilon)\chi_k \, d\boldsymbol{x}\, dt \\
&- \int\limits_{Q_T} (\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{v}_\varepsilon \otimes \boldsymbol{u}_{i\varepsilon}) : (\nabla \otimes \boldsymbol{w}_\varepsilon)\chi_k \, d\boldsymbol{x}\, dt \\
&+\varepsilon \int\limits_{Q_T} ((\nabla \otimes \boldsymbol{u}_{i\varepsilon})\boldsymbol{w}_\varepsilon) \cdot (\nabla \rho_{i\varepsilon})\chi_k \, d\boldsymbol{x}\, dt, \qquad i = 1, \ldots, N.
\end{aligned} \tag{86}$$

Отметим, что проделанные действия корректны при условии, что $\beta \geqslant \sigma_{15}'$ (что обеспечивает допустимость выбранной тестовой функции ввиду (85)), что приводит к следующим дополнительным ограничениям:

$$\theta_1 \geqslant \frac{3}{2\beta}, \quad \sigma_{10} \geqslant \frac{\beta}{\beta - 1}, \quad \sigma_4 \geqslant \frac{\beta^2}{\beta - 1}, \quad \sigma_{14} \geqslant \frac{3\beta}{4\beta - 3}$$

(первое из этих ограничений необходимо и достаточно для совместности третьего ограничения с ранее наложенными, а второе и четвертое совместны с ранее наложенными ограничениями ввиду $\beta \geqslant 6$). Из неравенств $\|\chi_k'\|_{L_1(0,T)} \leqslant 4$, $k \in \mathbb{N}$, соотношений (76), (79), (80), (82), (83), (84) и (85) следует при всех

$$\theta_5 \in \Big[\frac{3}{\beta - 3}, 1\Big] \tag{87}$$

(интервал непуст ввиду $\beta > 6$) равномерная по ε ограниченность слагаемых в правых частях (86), что дает оценки

$$\int\limits_{Q_T} \widetilde{p}(\rho_\varepsilon)\rho_\varepsilon \chi_k \, d\boldsymbol{x}\, dt \leqslant C_{46}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{88}$$

где C_{46} зависит от C_{25}, C_{35}, C_{37}, C_{38}, C_{40}–C_{44}, C_{45}, $\{\|\boldsymbol{f}_i\|_{L_\infty(Q_T)}\}$, $\{\|\rho_{0i}\|_{L_1(\Omega)}\}$, T, K, β, γ, δ, $|\Omega|$ и θ_5. Далее, поскольку при $k \to +\infty$ верно $\chi_k \to 1$ поточечно в $(0,T)$, то получаем из (88) неравенства

$$\int\limits_{Q_T} \rho_{i\varepsilon}^{\beta+1} \, d\boldsymbol{x}\, dt \leqslant C_{47}(C_{46}, \delta), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{89}$$

Ввиду оценок (76), (77), (78) и (89), из семейства $\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}$, $\rho_{i\varepsilon}$, $\varepsilon \in (0,1]$, может быть выделена последовательность (которую мы обозначим так же), для которой при $\varepsilon \to 0$ для всех $i = 1, \ldots, N$ имеют место сходимости

$$\rho_{i\varepsilon} \to \rho_i \ \ * -\text{слабо в } \ L_\infty(0,T; L_\beta(\Omega)), \tag{90}$$

$$\boldsymbol{u}_{i\varepsilon} \to \boldsymbol{u}_i \ \text{ слабо в } \ L_2\big(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\big), \tag{91}$$

$$\varepsilon \nabla \rho_{i\varepsilon} \to 0 \ \text{ сильно в } \ L_2(Q_T), \tag{92}$$

(93) $$\rho_{i\varepsilon} \to \rho_i \ \text{ слабо в } \ L_{\beta+1}(Q_T),$$

(94) $$\rho_{i\varepsilon}^{\beta} \to \overline{\rho_i^{\beta}}, \ \ \widetilde{p}(\rho_\varepsilon) \to \overline{\widetilde{p}(\rho)} \ \text{ слабо в } \ L_{\frac{\beta+1}{\beta}}(Q_T), \ \ \overline{\rho_i^{\beta}} \geqslant 0 \ \text{ п. в. в } \ Q_T$$

и

$$\rho_{i\varepsilon}^{\gamma} \to \overline{\rho_i^{\gamma}} \ \text{ слабо в } \ L_{\frac{\beta+1}{\gamma}}(Q_T), \ \ \overline{\rho_i^{\gamma}} \geqslant 0 \ \text{ п. в. в } \ Q_T,$$

где $\overline{\rho_i^{\beta}}$, $\overline{\rho_i^{\gamma}}$, $i = 1, \ldots, N$, и $\overline{\widetilde{p}(\rho)}$ обозначают слабые пределы последовательностей $\rho_{i\varepsilon}^{\beta}$, $\rho_{i\varepsilon}^{\gamma}$, $i = 1, \ldots, N$, и $\widetilde{p}(\rho_\varepsilon)$ в соответствующих пространствах.

Из уравнений (33) (для функций $\boldsymbol{v}_\varepsilon$, $\rho_{i\varepsilon}$, $i = 1, \ldots, N$) ввиду (78) и (79) получаем при $i = 1, \ldots, N$

$$\left\| \frac{\partial \rho_{i\varepsilon}}{\partial t} \right\|_{L_2\left(0,T;W^{-1}_{\frac{2\beta}{\beta+1}}(\Omega)\right)} \leqslant C_{48}(C_{31}, C_{37}, T, |\Omega|).$$

Таким образом, последовательности $\rho_{i\varepsilon}$, $i = 1, \ldots, N$, равностепенно непрерывны по $t \in [0, T]$ со значениями в $W^{-1}_{\frac{2\beta}{\beta+1}}(\Omega) = \left(\overset{\circ}{W}{}^1_{\frac{2\beta}{\beta-1}}(\Omega)\right)^*$. Тогда, благодаря (54) и (76), приходим (см. [12], Лемма 6.2, стр. 301) к сходимости (выделяя подпоследовательности и переобозначая их так же)

(95) $$\rho_{i\varepsilon} \to \rho_i \ \text{ при } \ \varepsilon \to 0 \ \text{ в } \ C([0, T]; L_{\beta,\mathrm{weak}}(\Omega)), \quad i = 1, \ldots, N.$$

Так как вложение $L_\beta(\Omega)$ в $W_2^{-1}(\Omega)$ компактно, то (см. [12], Лемма 6.4, стр. 302)

$$\rho_{i\varepsilon} \to \rho_i \ \text{ при } \ \varepsilon \to 0 \ \text{ в } \ L_p\big(0, T; W_2^{-1}(\Omega)\big) \quad \forall p \in [1, +\infty), \quad i = 1, \ldots, N.$$

Выбирая в (80) любое θ_5 (из диапазона, указанного в (87)), после выбора подпоследовательности мы можем утверждать сходимости

(96) $$\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon} \to \rho_i \boldsymbol{u}_i, \quad \rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{v}_\varepsilon \to \rho_i \boldsymbol{v} \quad \text{слабо в пространстве (80)}, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Теперь из (33) получаем, что предельные функции $\boldsymbol{v}$, ρ_i, $i = 1, \ldots, N$, удовлетворяют уравнениям

(97) $$\int\limits_{Q_T} \Big(\rho_i \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \rho_i \boldsymbol{v} \cdot \nabla \phi_i \Big) \, d\boldsymbol{x} dt + \int\limits_{\Omega} \rho_{0i} \phi_i|_{t=0} \, d\boldsymbol{x} = 0 \qquad \forall \, \phi_i \in C_0^1\big([0, T); C^\infty(\overline{\Omega})\big), \ \ i = 1, \ldots, N$$

(слабая форма (7)), которые ввиду (95) означают, что ρ_i удовлетворяют начальным условиям в (33) в смысле пространства $C([0, T]; L_{\beta,\mathrm{weak}}(\Omega))$.

Замечание 7.1. *Как известно из теории уравнений переноса и Навье–Стокса (см., например,* [4]*, стр. 353–358), все решения уравнений неразрывности* (97) *(т. е.* (7)*) рассматриваемого класса автоматически являются так называемыми ренормализованными решениями, т. е. удовлетворяют ренормализованным уравнениям* (7)*, формально получающимся из* (7) *умножением на* $\widetilde{G}'(\rho_i)$ *для всех функций* $\widetilde{G}$ *определенного класса (а именно, обладающими достаточной гладкостью и свойствами роста в нуле и на бесконечности).*

Из уравнений (34) (для функций $\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}$, $\rho_{i\varepsilon}$, $i = 1, \ldots, N$) ввиду (77), (82), (83) и (89) получаем при $i = 1, \ldots, N$

$$\left\| \frac{\partial (\rho_{i\varepsilon} \boldsymbol{u}_{i\varepsilon})}{\partial t} \right\|_{L_{\frac{2}{\theta_5+1}}\left(0,T;W^{-1}_{\frac{\beta+1}{\beta}}(\Omega)\right)} \leqslant C_{49}(C_{26}, C_{27}, C_{40}, C_{41}, C_{47}, T, |\Omega|).$$

Таким образом, последовательности $\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}$, $i = 1, \ldots, N$, равностепенно непрерывны по $t \in [0, T]$ со значениями в $W^{-1}_{\frac{\beta+1}{\beta}}(\Omega) = \Big(\overset{\circ}{W}{}^1_{\beta+1}(\Omega)\Big)^*$. Тогда, благодаря (73) и (79), приходим (см. [12], Лемма 6.2, стр. 301) к сходимости (выделяя подпоследовательности и переобозначая их так же)

$$\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon} \to \rho_i\boldsymbol{u}_i \ \text{ при } \ \varepsilon \to 0 \ \text{ в } \ C([0,T]; L_{\frac{2\beta}{\beta+1},\mathrm{weak}}(\Omega)), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{98}$$

Так как вложение $L_{\frac{2\beta}{\beta+1}}(\Omega)$ в $W_2^{-1}(\Omega)$ компактно, то (см. [12], Лемма 6.4, стр. 302) ввиду оценки (83) получаем

$$\begin{gathered} \rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon} \otimes \boldsymbol{u}_{j\varepsilon} \to \rho_i\boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_j \ \text{ при } \ \varepsilon \to 0 \\ \text{слабо в } \ L_{\frac{2}{\theta_5+1}}\big(0, T; L_{\frac{6\beta}{2(2-\theta_5)\beta+3(\theta_5+1)}}(\Omega)\big), \quad i, j = 1, \ldots, N. \end{gathered} \tag{99}$$

Теперь, привлекая (91) и (92), мы можем перейти к пределу в (34) при $\varepsilon \to 0$ и получить

$$\begin{gathered} \int\limits_{Q_T} \Big(\rho_i\boldsymbol{u}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial t} + (\rho_i\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i) + \overline{\widetilde{p}(\rho)}\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}_i + \rho_i\boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i\Big)\,d\boldsymbol{x}\,dt \\ = \int\limits_{Q_T} \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i)\,d\boldsymbol{x}\,dt - \int\limits_{\Omega} \rho_{0i}\boldsymbol{u}_{0i} \cdot \boldsymbol{\varphi}_i(0, \boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \end{gathered} \tag{100}$$

при всех $\boldsymbol{\varphi}_i \in C^1_0([0,T); C^\infty_0(\Omega))$, $i = 1, \ldots, N$, причем ввиду (98) начальные условия для импульсов принимаются в смысле (98).

Таким образом, для завершения предельного перехода по ε осталось доказать, что

$$\overline{\widetilde{p}(\rho)} = \widetilde{p}(\rho) \ \text{ п. в. в } \ Q_T. \tag{101}$$

8. Завершение предельного перехода по $\varepsilon \to 0$

Рассмотрим для всех $i = 1, \ldots, N$ так называемые эффективные вязкие потоки компонент смеси $\widetilde{p}(\rho) - \sum\limits_{j=1}^N \nu_{ij}\operatorname{div}\boldsymbol{u}_j$, соответствующие величины для регуляризованной задачи $\widetilde{p}(\rho_\varepsilon) - \sum\limits_{j=1}^N \nu_{ij}\operatorname{div}\boldsymbol{u}_{j\varepsilon}$, и их слабые пределы в $L_{\frac{\beta+1}{\beta}}(Q_T)$:

$$\overline{\widetilde{p}(\rho)} - \sum_{j=1}^N \nu_{ij}\operatorname{div}\boldsymbol{u}_j.$$

Будем использовать оператор Δ^{-1}, действующий по формуле

$$(\Delta^{-1}v)(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{v(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|},$$

применяя его к функциям $v \in L_{\sigma_{16}}(\Omega)$, $\sigma_{16} > \dfrac{3}{2}$, продолженным нулем за пределы Ω. При этом $\Delta^{-1} : \ L_{\sigma_{16}}(\Omega) \to W^2_{\sigma_{16}}(\Omega)$, и $\Delta \circ \Delta^{-1} = I$.

Из уравнений (33) (для функций $\boldsymbol{v}_\varepsilon$, $\rho_{i\varepsilon}$, $i=1,\ldots,N$) после элементарных преобразований (которые законны ввиду ограничения (61) и аналогов оценок (60) и (62) после перехода к пределу при $m\to+\infty$) получим тождества

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_{j\varepsilon}}{\partial t} = -\nabla \mathrm{div}\Delta^{-1}(\rho_{j\varepsilon}\boldsymbol{v}_\varepsilon) + \varepsilon\nabla\rho_{j\varepsilon}, \quad j=1,\ldots,N, \tag{102}$$

в которых введены обозначения $\boldsymbol{r}_{j\varepsilon} = \nabla\Delta^{-1}\rho_{j\varepsilon}$, $j=1,\ldots,N$.

Возьмем в уравнениях (34) (для функций $\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}$, $\rho_{i\varepsilon}$, $i=1,\ldots,N$) в качестве тестовых функций векторные поля $\boldsymbol{\varphi}_i = \psi\tau\boldsymbol{r}_{j\varepsilon}$, $i,j=1,\ldots,N$, где

$$\psi\in C_0^\infty(0,T), \qquad \tau\in C_0^\infty(\Omega). \tag{103}$$

Тогда, учитывая (102), придем к равенствам

$$\begin{gathered}\int\limits_{Q_T}\psi\left(\tau\widetilde{p}(\rho_\varepsilon)\rho_{j\varepsilon} - \mathbb{S}_{i\varepsilon} : (\nabla\otimes(\tau\boldsymbol{r}_{j\varepsilon}))\right)d\boldsymbol{x}dt \\ = -\int\limits_{Q_T}\psi\widetilde{p}(\rho_\varepsilon)(\nabla\tau)\cdot\boldsymbol{r}_{j\varepsilon}\,d\boldsymbol{x}dt - \varepsilon\int\limits_{Q_T}\psi\tau\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}\cdot\nabla\rho_{j\varepsilon}\,d\boldsymbol{x}dt \\ -\int\limits_{Q_T}\psi\tau(\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{v}_\varepsilon\otimes\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}) : (\nabla\otimes\boldsymbol{r}_{j\varepsilon})\,d\boldsymbol{x}dt \\ +\int\limits_{Q_T}\psi\tau\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}\cdot\nabla\mathrm{div}\Delta^{-1}(\rho_{j\varepsilon}\boldsymbol{v}_\varepsilon)\,d\boldsymbol{x}dt \\ -\int\limits_{Q_T}\psi(\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{v}_\varepsilon\otimes\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}) : ((\nabla\tau)\otimes\boldsymbol{r}_{j\varepsilon})\,d\boldsymbol{x}dt - \int\limits_{Q_T}\psi\tau\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{r}_{j\varepsilon}\,d\boldsymbol{x}dt \\ -\int\limits_{Q_T}\frac{d\psi}{dt}\tau\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}\cdot\boldsymbol{r}_{j\varepsilon}\,d\boldsymbol{x}dt + \varepsilon\int\limits_{Q_T}\psi\tau(\nabla\otimes\boldsymbol{u}_{i\varepsilon})^*\nabla\rho_{i\varepsilon}\cdot\boldsymbol{r}_{j\varepsilon}\,d\boldsymbol{x}dt,\end{gathered} \tag{104}$$

где $i,j=1,\ldots,N$. С другой стороны, приняв в (100) в качестве тестовых функций векторные поля $\boldsymbol{\varphi}_i = \psi\tau\nabla\Delta^{-1}\rho_j$, $i,j=1,\ldots,N$ (см. (103)), выводим тождества

$$\begin{gathered}\int\limits_{Q_T}\psi\left(\tau\overline{\widetilde{p}(\rho)}\rho_j - \mathbb{S}_i : (\nabla\otimes(\tau\boldsymbol{r}_j))\right)d\boldsymbol{x}dt \\ = -\int\limits_{Q_T}\psi\overline{\widetilde{p}(\rho)}(\nabla\tau)\cdot\boldsymbol{r}_j\,d\boldsymbol{x}dt - \int\limits_{Q_T}\psi\tau(\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_i) : (\nabla\otimes\boldsymbol{r}_j)\,d\boldsymbol{x}dt \\ +\int\limits_{Q_T}\psi\tau\rho_i\boldsymbol{u}_i\cdot\nabla\mathrm{div}\Delta^{-1}(\rho_j\boldsymbol{v})\,d\boldsymbol{x}dt - \int\limits_{Q_T}\psi(\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_i) : ((\nabla\tau)\otimes\boldsymbol{r}_j)\,d\boldsymbol{x}dt \\ -\int\limits_{Q_T}\psi\tau\rho_i\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{r}_j\,d\boldsymbol{x}dt - \int\limits_{Q_T}\frac{d\psi}{dt}\tau\rho_i\boldsymbol{u}_i\cdot\boldsymbol{r}_j\,d\boldsymbol{x}dt, \quad i,j=1,\ldots,N,\end{gathered} \tag{105}$$

где $\boldsymbol{r}_j = \nabla\Delta^{-1}\rho_j$, $j=1,\ldots,N$.

Из (95) и компактности вложения $W^1_\beta(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$ следует, что при $\varepsilon\to 0$

$$\boldsymbol{r}_{j\varepsilon}\to\boldsymbol{r}_j \ \text{ в } \ C(\overline{Q}_T), \quad j=1,\ldots,N. \tag{106}$$

Вычитая из (104) равенства (105) и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим благодаря (77), (79), (83), (89), (92)–(94), (96), (99) и (106) соотношения (при $i, j = 1, \dots, N$)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{Q_T} \psi\left(\tau\widetilde{p}(\rho_\varepsilon)\rho_{j\varepsilon} - \mathbb{S}_{i\varepsilon} : (\nabla\otimes(\tau\boldsymbol{r}_{j\varepsilon}))\right) d\boldsymbol{x}dt \\
&\qquad - \int\limits_{Q_T} \psi\left(\tau\overline{\widetilde{p}(\rho)}\rho_j - \mathbb{S}_i : (\nabla\otimes(\tau\boldsymbol{r}_j))\right) d\boldsymbol{x}dt \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{Q_T} \psi\tau\Big(\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}\cdot\nabla\mathrm{div}\Delta^{-1}(\rho_{j\varepsilon}\boldsymbol{v}_\varepsilon) - (\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{v}_\varepsilon\otimes\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}) : (\nabla\otimes\boldsymbol{r}_{j\varepsilon})\Big) d\boldsymbol{x}dt \\
&\qquad - \int\limits_{Q_T} \psi\tau\Big(\rho_i\boldsymbol{u}_i\cdot\nabla\mathrm{div}\Delta^{-1}(\rho_j\boldsymbol{v}) - (\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_i) : (\nabla\otimes\boldsymbol{r}_j)\Big) d\boldsymbol{x}dt.
\end{aligned}
\tag{107}
$$

Проведем анализ правой части (107) (докажем, что она равна нулю). Введем в рассмотрение оператор Comm, действующий по формуле

$$
\mathrm{Comm}(z,\tau) = (\nabla\otimes\nabla\Delta^{-1}z)\tau - z(\nabla\otimes\nabla\Delta^{-1}\tau),
$$

о котором известно (см. [2], [5], [7] и [16]) следующее: если $z_k \overset{w}{\to} z$ в $L_{\sigma_{17}}(\Omega)$, $\tau_k \overset{w}{\to} \tau$ в $L_{\sigma_{18}}(\Omega)$, где $\sigma_{17}^{-1} + \sigma_{18}^{-1} < 1$, то $\mathrm{Comm}(z_k,\tau_k) \overset{w}{\to} \mathrm{Comm}(z,\tau)$ в $L_{\sigma_{19}}(\Omega)$, где $\sigma_{19}^{-1} = \sigma_{17}^{-1} + \sigma_{18}^{-1}$. Перепишем правую часть (107) в виде

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{Q_T} \psi\Big(\rho_{j\varepsilon}\boldsymbol{v}_\varepsilon\cdot\nabla\mathrm{div}\Delta^{-1}(\tau\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}) - (\tau\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{v}_\varepsilon\otimes\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}) : (\nabla\otimes\boldsymbol{r}_{j\varepsilon})\Big) d\boldsymbol{x}dt \\
&\qquad - \int\limits_{Q_T} \psi\Big(\rho_j\boldsymbol{v}\cdot\nabla\mathrm{div}\Delta^{-1}(\tau\rho_i\boldsymbol{u}_i) - (\tau\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_i) : (\nabla\otimes\boldsymbol{r}_j)\Big) d\boldsymbol{x}dt \\
&\qquad\qquad = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{Q_T} \psi\boldsymbol{v}_\varepsilon\cdot\mathrm{Comm}(\tau\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon},\rho_{j\varepsilon})\, d\boldsymbol{x}dt \\
&\qquad\qquad - \int\limits_{Q_T} \psi\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{Comm}(\tau\rho_i\boldsymbol{u}_i,\rho_j)\, d\boldsymbol{x}dt, \quad i,j = 1,\dots,N.
\end{aligned}
\tag{108}
$$

Из (95) и (98) следует, что при всех $t \in [0,T]$, $i = 1,\dots,N$

$$
\rho_{i\varepsilon}(t) \to \rho_i(t) \text{ слабо в } L_\beta(\Omega), \quad \rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}(t) \to \rho_i\boldsymbol{u}_i(t) \text{ слабо в } L_{\frac{2\beta}{\beta+1}}(\Omega),
$$

а следовательно и

$$
\mathrm{Comm}(\tau\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon},\rho_{j\varepsilon}) \to \mathrm{Comm}(\tau\rho_i\boldsymbol{u}_i,\rho_j) \text{ слабо в } L_{\frac{2\beta}{\beta+3}}(\Omega), \ \ i,j = 1,\dots,N,
$$

а поскольку вложение $L_{\frac{2\beta}{\beta+3}}(\Omega)$ в $W_2^{-1}(\Omega)$ компактно, то ввиду (76) и (79) получаем

$$
\mathrm{Comm}(\tau\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon},\rho_{j\varepsilon}) \to \mathrm{Comm}(\tau\rho_i\boldsymbol{u}_i,\rho_j)
$$

сильно в $L_{\sigma_{20}}(0,T;W_2^{-1}(\Omega))$ при всех $\sigma_{20} < \infty$, $i,j = 1,\dots,N$. Эти соотношения вместе с (91) влекут для всех $i,j = 1,\dots,N$ равенства

$$
\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{Q_T} \psi\boldsymbol{v}_\varepsilon\cdot\mathrm{Comm}(\tau\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon},\rho_{j\varepsilon})\, d\boldsymbol{x}dt = \int\limits_{Q_T} \psi\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{Comm}(\tau\rho_i\boldsymbol{u}_i,\rho_j)\, d\boldsymbol{x}dt.
$$

Таким образом, из (107) и (108) следует, что

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{Q_T}\psi\left(\tau\widetilde{p}(\rho_\varepsilon)\rho_{j\varepsilon}-\mathbb{S}_{i\varepsilon}:(\nabla\otimes(\tau\boldsymbol{r}_{j\varepsilon}))\right)d\boldsymbol{x}dt\\
&=\int\limits_{Q_T}\psi\left(\tau\overline{\widetilde{p}(\rho)}\rho_j-\mathbb{S}_i:(\nabla\otimes(\tau\boldsymbol{r}_j))\right)d\boldsymbol{x}dt,\quad i,j=1,\dots,N.
\end{aligned}
\tag{109}
$$

Наконец, поскольку

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{Q_T}\psi\mathbb{S}_{i\varepsilon}:(\nabla\otimes(\tau\boldsymbol{r}_{j\varepsilon}))\,d\boldsymbol{x}dt-\int\limits_{Q_T}\psi\mathbb{S}_i:(\nabla\otimes(\tau\boldsymbol{r}_j))\,d\boldsymbol{x}dt\\
&=\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=1}^N\nu_{ik}\int\limits_{Q_T}\psi\tau\rho_{j\varepsilon}\operatorname{div}\boldsymbol{u}_{k\varepsilon}\,d\boldsymbol{x}dt-\sum_{k=1}^N\nu_{ik}\int\limits_{Q_T}\psi\tau\rho_j\operatorname{div}\boldsymbol{u}_k\,d\boldsymbol{x}dt\\
&\quad+\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=1}^N\nu_{ik}\int\limits_{Q_T}\psi\operatorname{div}\boldsymbol{u}_{k\varepsilon}(2\nabla\tau\cdot\boldsymbol{r}_{j\varepsilon}+(\Delta\tau)\Delta^{-1}\rho_{j\varepsilon})\,d\boldsymbol{x}dt\\
&\quad-\sum_{k=1}^N\nu_{ik}\int\limits_{Q_T}\psi\operatorname{div}\boldsymbol{u}_k(2\nabla\tau\cdot\boldsymbol{r}_j+(\Delta\tau)\Delta^{-1}\rho_j)\,d\boldsymbol{x}dt\\
&\quad-\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{Q_T}\psi\mathbb{S}_{i\varepsilon}:(\nabla\otimes[(\nabla\tau)\Delta^{-1}\rho_{j\varepsilon}])\,d\boldsymbol{x}dt\\
&\quad+\int\limits_{Q_T}\psi\mathbb{S}_i:(\nabla\otimes[(\nabla\tau)\Delta^{-1}\rho_j])\,d\boldsymbol{x}dt,\quad i,j=1,\dots,N,
\end{aligned}
\tag{110}
$$

то (благодаря (77) и (91) последние четыре интеграла в (110) взаимно уничтожаются) равенства (109) превращаются в следующие соотношения для эффективных вязких потоков компонент смеси

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{Q_T}\psi\tau\rho_{j\varepsilon}\left(\widetilde{p}(\rho_\varepsilon)-\sum_{k=1}^N\nu_{ik}\mathrm{div}\boldsymbol{u}_{k\varepsilon}\right)d\boldsymbol{x}dt\\
&=\int\limits_{Q_T}\psi\tau\rho_j\left(\overline{\widetilde{p}(\rho)}-\sum_{k=1}^N\nu_{ik}\mathrm{div}\boldsymbol{u}_k\right)d\boldsymbol{x}dt,\qquad i,j=1,\dots,N.
\end{aligned}
\tag{111}
$$

На этом этапе особенно ярко проявляется отличие многожидкостной модели от одножидкостной (подробно изученной в [4] и др. работах — см. обзор в разделе 1) ввиду присутствия в (111) разноименных произведений вида $\rho_i\mathrm{div}\boldsymbol{u}_j$, $i\neq j$, которые невозможно анализировать при помощи уравнений неразрывности, как это обычно делается в рамках метода эффективных вязких потоков, лежащего в основе упомянутой теории одножидкостных течений. В общем случае решение этой проблемы (другими словами, обобщение техники эффективных вязких потоков со скалярного на матричный случай) является трудной и нерешенной задачей, но из обозримых способов частичного решения можно предложить два. Первый состоит в рассмотрении треугольных матриц полных вязкостей $\mathbf{N}$ (как это делалось во всех работах по многожидкостной модели до сих пор), а второй, впервые предлагаемый в настоящей работе (и не налагающий ограничения треугольности на $\mathbf{N}$), основан на идеях равенства фазовых давлений и их зависимости от суммарной плотности. Эти идеи были нами учтены при формулировке Задачи А. Тем самым (в рамках описанного второго подхода), мы можем вывести из (111) такое следствие:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{Q_T}\psi\tau\rho_\varepsilon\left(\nu_0\widetilde{p}(\rho_\varepsilon)-\mathrm{div}\boldsymbol{v}_\varepsilon\right)d\boldsymbol{x}dt=\int\limits_{Q_T}\psi\tau\rho\left(\nu_0\overline{\widetilde{p}(\rho)}-\mathrm{div}\boldsymbol{v}\right)d\boldsymbol{x}dt, \tag{112}$$

где $\nu_0=\dfrac{\mathbf{N}^{-1}:\mathbf{J}}{N}>0$ (см. (2) и ниже), а $\mathbf{J}$ — матрица размерности $N\times N$, все элементы которой равны 1. Ввиду произвольности ψ и τ (112) выражает соотношение

$$\nu_0\overline{\rho\widetilde{p}(\rho)}-\overline{\rho\mathrm{div}\boldsymbol{v}}=\nu_0\rho\overline{\widetilde{p}(\rho)}-\rho\mathrm{div}\boldsymbol{v}\ \text{ п. в. в }\ Q_T. \tag{113}$$

Согласно Замечанию 7.1, выполнены ренормализованные уравнения (7). В частности, для функций $\widetilde{G}\in C[0,\infty)\bigcap C^1(0,\infty)$ таких, что

$$\lim_{s\to 0+}\left(s\widetilde{G}'(s)-\widetilde{G}(s)\right)\in\mathbb{R},\qquad \left|\widetilde{G}'(s)\right|\leqslant C_{50}s^{\sigma_{21}}$$

при всех $s\in(1,\infty)$ для некоторого $\sigma_{21}\leqslant\dfrac{\beta}{2}-1$, выполнены в $D'((0,T)\times\mathbb{R}^3)$ уравнения

$$\frac{\partial\widetilde{G}(\rho)}{\partial t}+\mathrm{div}(\widetilde{G}(\rho)\boldsymbol{v})+(\rho\widetilde{G}'(\rho)-\widetilde{G}(\rho))\mathrm{div}\boldsymbol{v}=0,$$

откуда при $\widetilde{G}(s)=s\ln s$ следует (при п. в. $t\in(0,T)$) равенство

$$\int\limits_\Omega(\rho\ln\rho)(t)\,d\boldsymbol{x}-\int\limits_\Omega\rho_0\ln\rho_0\,d\boldsymbol{x}+\int\limits_{Q_t}\rho\,\mathrm{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}ds=0. \tag{114}$$

С другой стороны, сложив соотношения (33), получим

$$\frac{\partial\rho_\varepsilon}{\partial t}+\mathrm{div}\left(\rho_\varepsilon\boldsymbol{v}_\varepsilon\right)=\varepsilon\Delta\rho_\varepsilon,\quad \rho_\varepsilon|_{t=0}=\rho_0:=\sum_{i=1}^N\rho_{0i},\quad \nabla\rho_\varepsilon\cdot\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega\times(0,T)}=0. \tag{115}$$

Умножая (115) на $\ln(\rho_\varepsilon+h)+\dfrac{\rho_\varepsilon}{\rho_\varepsilon+h}$, $h\in(0,1]$, интегрируя результат по Q_t, а затем проводя элементарные оценки и переходя к пределу по $h\to 0$ и $\varepsilon\to 0$, получаем неравенство

$$\int\limits_\Omega\overline{\rho\ln\rho}(t)\,d\boldsymbol{x}-\int\limits_\Omega\rho_0\ln\rho_0\,d\boldsymbol{x}+\int\limits_{Q_t}\overline{\rho\,\mathrm{div}\boldsymbol{v}}\,d\boldsymbol{x}d\tau\leqslant 0. \tag{116}$$

Комбинируя (114) и (116), приходим к неравенству

$$\int\limits_{Q_t}\left(\overline{\rho\,\mathrm{div}\boldsymbol{v}}-\rho\,\mathrm{div}\boldsymbol{v}\right)d\boldsymbol{x}d\tau\leqslant\int\limits_\Omega\left((\rho\ln\rho)(t)-\overline{\rho\ln\rho}(t)\right)d\boldsymbol{x}. \tag{117}$$

Теперь, пользуясь (113), мы можем вовсе исключить скорость из (117), и тем самым свести проблему к ситуации, аналогичной теории уравнений однокомпонентной среды, так что дальнейшие действия на данном этапе повторяют приемы этой теории (см., например, [4], стр. 101–102). Ввиду монотонности функции $\widetilde{p}(\cdot)$ (напомним, что $\widetilde{p}'(s) = K\gamma s^{\gamma-1}+\delta\beta s^{\beta-1}$), верно поточечное неравенство $(\rho_\varepsilon - \rho)(\widetilde{p}(\rho_\varepsilon) - \widetilde{p}(\rho)) \geqslant 0$, благодаря которому и формулам (93), (94) выводим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_B (\widetilde{p}(\rho_\varepsilon)\rho_\varepsilon - \widetilde{p}(\rho_\varepsilon)\rho)\, d\boldsymbol{x}dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_B (\widetilde{p}(\rho_\varepsilon) - \widetilde{p}(\rho))(\rho_\varepsilon - \rho)\, d\boldsymbol{x}dt + \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_B \widetilde{p}(\rho)(\rho_\varepsilon - \rho)\, d\boldsymbol{x}dt \geqslant 0,$$

где B — произвольный шар в Q_T, поэтому

$$\overline{\widetilde{p}(\rho)\rho} \geqslant \overline{\widetilde{p}(\rho)}\rho \ \text{ п. в. в } \ Q_T.$$

Из (113) тогда следует, что

$$\overline{\rho \mathrm{div} \boldsymbol{v}} - \rho \mathrm{div} \boldsymbol{v} \geqslant 0 \ \text{ п. в. в } \ Q_T.$$

Возвращаясь к (117), теперь получаем

$$\int\limits_\Omega \Big((\rho \mathrm{ln} \rho)(t) - \overline{\rho \mathrm{ln} \rho}(t)\Big)\, d\boldsymbol{x} \geqslant 0,$$

откуда, пользуясь свойствами функции $s \mapsto s\ln s$ (а именно, ее слабой полунепрерывностью снизу и строгой выпуклостью), заключаем (см. [4], Теорема 10.20, стр. 339)

$$\rho_\varepsilon \to \rho \ \text{ п. в. } \ Q_T, \tag{118}$$

что завершает доказательство формулы (101).

Итак, функции ρ_i, $\boldsymbol{u}_i$, $i = 1, \ldots, N$, являются решением Задачи A, в которой p в уравнениях (8) пока что заменено на $\widetilde{p}$; другими словами, выполнены интегральные соотношения (97) и (100), причем в последних $\overline{\widetilde{p}(\rho)}$ уже заменено на $\widetilde{p}(\rho)$. При этом построенное решение принадлежит классу (75)–(77), (80), (83), (89) (в том смысле, что после предельного перехода по $\varepsilon \to 0$ предельные функции удовлетворяют упомянутым оценкам и принадлежат соответствующим классам), (95), (98) (в том смысле, что предельные функции принадлежат соответствующим классам).

Замечание 8.1. *Из сходимости* (95) *следует (см.* [12]*, стр. 310, Лемма 6.15), что $\rho_i \in C([0,T]; L_{\sigma_{22}}(\Omega))$, $i = 1, \ldots, N$ для всех $\sigma_{22} < \beta$.*

В завершение раздела выведем энергетическое неравенство для предельных функций. Для этого умножим неравенство (74) на произвольную гладкую функцию $\chi(t) \geqslant 0$, проинтегрируем по $t \in [0, T]$ и отбросим третий интеграл в левой части, получим

$$\int\limits_0^T dt\chi(t)\int\limits_\Omega \Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N \rho_{i\varepsilon}(t)|\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}(t)|^2 + N\widetilde{h}(\rho_\varepsilon(t))\Big)\, d\boldsymbol{x} +$$

$$+C_0\int\limits_0^T dt\chi(t)\int\limits_{Q_t}\sum_{i=1}^N |\nabla\otimes\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}|^2\, d\boldsymbol{x}\, ds \leqslant \int\limits_0^T dt\chi(t)\int\limits_{Q_t}\sum_{i=1}^N \rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}\cdot\boldsymbol{f}_i\, d\boldsymbol{x}\, ds +$$

$$+\int\limits_0^T dt\chi(t)\int\limits_\Omega\Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N\rho_{0i}|\boldsymbol{u}_{0i}|^2+N\widetilde{h}(\rho_0)\Big)\,d\boldsymbol{x}.$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon\to 0$, ввиду (76), (96), (99) и (118) получим соответствующее предельное соотношение, из которого ввиду произвольности функции χ следует для п. в. $t\in(0,T)$

$$\begin{aligned}&\int\limits_\Omega\Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N\rho_i(t)|\boldsymbol{u}_i(t)|^2+N\widetilde{h}(\rho(t))\Big)\,d\boldsymbol{x}+C_0\int\limits_{Q_t}\sum_{i=1}^N|\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i|^2\,d\boldsymbol{x}\,ds\leqslant\\ &\qquad\leqslant\int\limits_{Q_t}\sum_{i=1}^N\rho_i\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{u}_i\,d\boldsymbol{x}\,ds+\int\limits_\Omega\Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N\rho_{0i}|\boldsymbol{u}_{0i}|^2+N\widetilde{h}(\rho_0)\Big)\,d\boldsymbol{x}.\end{aligned}\tag{119}$$

9. Предельный переход по $\delta\to 0$, кроме слагаемых с давлением

Получим оценки решений, равномерные по малому параметру δ. Заметим, что в силу (12), (13), (31) и (32) последнее слагаемое в правой части (119) ограничено положительной постоянной, зависящей от величин:

$$\{\|\rho_{0i}\|_{L_\gamma(\Omega)}\},\Big\{\|\boldsymbol{u}_{0i}\|_{L_{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}(\Omega)}\Big\},K,N,\beta,\gamma,|\Omega|.\tag{120}$$

Тогда, используя (97) (откуда следует, что для п. в. $t\in(0,T)$ верно $\|\rho_{i\delta}(t)\|_{L_1(\Omega)}=\|\rho_{0i\delta}\|_{L_1(\Omega)}$, $i=1,\dots,N$; отныне у величин, зависящих от δ, будем писать индекс δ), получаем из неравенства (119), что

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)}\int\limits_\Omega\Big(\sum_{i=1}^N\rho_{i\delta}|\boldsymbol{u}_{i\delta}|^2+\rho_\delta^\gamma+\delta\rho_\delta^\beta\Big)\,d\boldsymbol{x}+\int\limits_{Q_T}\sum_{i=1}^N|\nabla\otimes\boldsymbol{u}_{i\delta}|^2\,d\boldsymbol{x}\,dt\leqslant C_{51},\tag{121}$$

где положительная постоянная C_{51} зависит только от величин (120), а также от C_0, $\{\|\boldsymbol{f}_i\|_{L_\infty(Q_T)}\}$ и T. Из (121) сразу следуют при $i=1,\dots,N$ равномерные по δ оценки

$$\|\rho_{i\delta}\|_{L_\infty(0,T;L_\gamma(\Omega))}\leqslant C_{52}(C_{51},\gamma),\tag{122}$$

$$\delta^{\frac{1}{\beta}}\|\rho_{i\delta}\|_{L_\infty(0,T;L_\beta(\Omega))}\leqslant C_{53}(C_{51},\beta),\tag{123}$$

$$\|\rho_{i\delta}|\boldsymbol{u}_{i\delta}|^2\|_{L_\infty(0,T;L_1(\Omega))}+\|\boldsymbol{u}_{i\delta}\|_{L_2(0,T;W_2^1(\Omega))}\leqslant C_{54}(C_{51},\Omega).\tag{124}$$

Из (122) и (124) получаем при $i=1,\dots,N$

$$\|\rho_{i\delta}\boldsymbol{u}_{i\delta}\|_{L_2\left(0,T;L_{\frac{6\gamma}{\gamma+6}}(\Omega)\right)}+\|\rho_{i\delta}\boldsymbol{u}_{i\delta}\|_{L_\infty\left(0,T;L_{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)\right)}\leqslant C_{55}(C_{52},C_{54}),\tag{125}$$

откуда следуют при любых $\theta_6\in[0,1]$ неравенства

$$\|\rho_{i\delta}\boldsymbol{u}_{i\delta}\|_{L_{\frac{2}{\theta_6}}\left(0,T;L_{\frac{6\gamma}{(3-2\theta_6)\gamma+3(\theta_6+1)}}(\Omega)\right)}\leqslant C_{56}(C_{55}),\quad i=1,\dots,N.\tag{126}$$

Далее, чтобы улучшить интегрируемость плотностей, снова воспользуемся оператором Боговского $\mathcal{B}$ (см. раздел 3). Выберем число $\tau\in\Big(0,\dfrac{T}{2}\Big)$. Из ренормализованных уравнений (97) для любых гладких ограниченных функций $\widehat{G}$

вытекают для п. в. $(t,\boldsymbol{x}) \in (\tau, T-\tau)\times\Omega$ равенства

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathcal{A}_\tau\left(\widehat{G}(\rho_\delta)\right)\right)+\operatorname{div}\mathcal{A}_\tau\left(\widehat{G}(\rho_\delta)\boldsymbol{v}_\delta\right)\\ +\mathcal{A}_\tau\left(\left(\rho_\delta\widehat{G}'(\rho_\delta)-\widehat{G}(\rho_\delta)\right)\operatorname{div}\boldsymbol{v}_\delta\right)=0,\end{gathered}\tag{127}$$

где через $\mathcal{A}_\tau$ обозначен оператор усреднения по Соболеву по переменной t, т. е. для произвольной функции $g \in L_{\sigma_{23}}(\mathbb{R}; L_{\sigma_{24}}(\mathbb{R}^3))$, $\sigma_{23,24}\in[1,+\infty)$, полагаем

$$(\mathcal{A}_\tau g)(t,\boldsymbol{x})=\int\limits_{\mathbb{R}} g(s,\boldsymbol{x})\zeta_\tau(t-s)\,ds,\quad \zeta_\tau(t)=\frac{1}{\tau}\zeta\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

с некоторым ядром усреднения $\zeta\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\zeta\subset(-1,1)$, $\zeta(-t)=\zeta(t)\geqslant 0$, $\int\limits_{\mathbb{R}}\zeta(t)\,dt=1$. Из (127), в свою очередь, следует, что

$$\begin{gathered}\frac{\partial \boldsymbol{w}_{\delta,\tau}}{\partial t}=-\mathcal{B}\mathcal{A}_\tau\left(\operatorname{div}\left(\widehat{G}(\rho_\delta)\boldsymbol{v}_\delta\right)\right)\\ -\mathcal{B}\mathcal{A}_\tau\left(\left(\rho_\delta\widehat{G}'(\rho_\delta)-\widehat{G}(\rho_\delta)\right)\operatorname{div}\boldsymbol{v}_\delta-\left(\overline{\left(\rho_\delta\widehat{G}'(\rho_\delta)-\widehat{G}(\rho_\delta)\right)\operatorname{div}\boldsymbol{v}_\delta}\right)_\Omega\right),\end{gathered}\tag{128}$$

где $\boldsymbol{w}_{\delta,\tau}=\mathcal{B}\mathcal{A}_\tau\left(\widehat{G}(\rho_\delta)-\left(\overline{\widehat{G}(\rho_\delta)}\right)_\Omega\right)$ (напомним обозначение (27)). Из свойств оператора $\mathcal{B}$ и равенства (128) для любых $t\in[\tau,T-\tau]$ получаем оценки

$$\|\boldsymbol{w}_{\delta,\tau}(t)\|_{W^1_{\sigma_{25}}(\Omega)}\leqslant C_{57}(C_3,\sigma_{25},\Omega)\left\|\mathcal{A}_\tau\left(\widehat{G}(\rho_\delta)\right)(t)\right\|_{L_{\sigma_{25}}(\Omega)},\quad 1<\sigma_{25}<\infty,\tag{129}$$

$$\begin{gathered}\left\|\frac{\partial \boldsymbol{w}_{\delta,\tau}}{\partial t}(t)\right\|_{L_{\sigma_{26}}(\Omega)}\leqslant C_{58}(C_3,\sigma_{26},\sigma_{27},\Omega)\Big(\left\|\mathcal{A}_\tau\left(\widehat{G}(\rho_\delta)\boldsymbol{v}_\delta\right)(t)\right\|_{L_{\sigma_{26}}(\Omega)}\\ +\left\|\mathcal{A}_\tau\left(\left(\rho_\delta\widehat{G}'(\rho_\delta)-\widehat{G}(\rho_\delta)\right)\operatorname{div}\boldsymbol{v}_\delta\right)(t)\right\|_{L_{\sigma_{27}}(\Omega)}\Big),\\ \sigma_{27}=\frac{3\sigma_{26}}{\sigma_{26}+3},\ \text{если}\ \frac{3}{2}<\sigma_{26}<+\infty,\\ \sigma_{27}\in(1,+\infty)\ \text{любое, если}\ 1\leqslant\sigma_{26}\leqslant\frac{3}{2}.\end{gathered}\tag{130}$$

Возьмем в уравнениях импульса (т. е. (100), в которых $\overline{\widetilde{p}(\rho_\delta)}$ заменено на $\widetilde{p}(\rho_\delta)$) в качестве тестовых функций векторные поля $\boldsymbol{\varphi}_i=\chi\boldsymbol{w}_{\delta,\tau}$, $i=1,\ldots,N$, где $\chi \in C_0^\infty(0,T)$. Тогда получим при $i = 1,\dots,N$ тождества

$$\begin{aligned}\int\limits_{Q_T} \widetilde{p}(\rho_\delta)\mathcal{A}_\tau\left(\widehat{G}(\rho_\delta)\right)\chi\,d\boldsymbol{x}\,dt = \int\limits_{Q_T} \widetilde{p}(\rho_\delta)\left(\overline{\mathcal{A}_\tau\left(\widehat{G}(\rho_\delta)\right)}\right)_\Omega \chi\,d\boldsymbol{x}\,dt \\ - \int\limits_{Q_T} \rho_{i\delta}\boldsymbol{u}_{i\delta}\cdot\frac{d\chi}{dt}\boldsymbol{w}_{\delta,\tau}d\boldsymbol{x}\,dt - \int\limits_{Q_T} \chi\rho_{i\delta}\boldsymbol{u}_{i\delta}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{w}_{\delta,\tau}}{\partial t}\,d\boldsymbol{x}\,dt \\ - \int\limits_{Q_T} \rho_{i\delta}\boldsymbol{f}_i\cdot\chi\boldsymbol{w}_{\delta,\tau}\,d\boldsymbol{x}\,dt + \int\limits_{Q_T} \mathbb{S}_{i\delta} : (\nabla\otimes\boldsymbol{w}_{\delta,\tau})\chi\,d\boldsymbol{x}\,dt \\ - \int\limits_{Q_T} (\rho_{i\delta}\boldsymbol{v}_\delta\otimes\boldsymbol{u}_{i\delta}) : (\nabla\otimes\boldsymbol{w}_{\delta,\tau})\chi\,d\boldsymbol{x}\,dt =: \sum_{s=1}^{6} J_{si}.\end{aligned}\tag{131}$$

Положим

$$\widehat{G}(s) = \widehat{G}_k(s) := \begin{cases} s^{\sigma_{28}}, & s\in[0,k], \\ k^{\sigma_{28}}, & s\in[k,+\infty), \end{cases}\tag{132}$$

где $k > 0$, а σ_{28} выбирается произвольно из диапазона

$$0 < \sigma_{28} \leqslant \frac{2\gamma}{3} - 1, \quad \text{если } \gamma < 6, \qquad \text{и} \qquad 0 < \sigma_{28} < \frac{\gamma}{2}, \quad \text{если } \gamma \geqslant 6.\tag{133}$$

Хотя эти функции не являются гладкими, но они удовлетворяют условиям Леммы 6.11 из [12] (стр. 309), и поэтому процедура ренормализации для них остается в силе. Благодаря тому, что $\widehat{G}_k(\rho_\delta) \in L_\infty(Q_T)$, получаем $(\boldsymbol{\varphi_i})_t, \nabla\otimes\boldsymbol{\varphi_i} \in L_{\sigma_{29}}(Q_T)$ при всех $\sigma_{29} < +\infty$, что обеспечивает законность выбора таких пробных функций. Получим оценки интегралов в правой части (131), равномерные по параметрам τ, k и δ. Ввиду (122) и (123), имеют место при $\sigma_{28} \leqslant \gamma$ оценки

$$\begin{aligned}|J_{1i}| \leqslant \frac{1}{|\Omega|}\|\chi\|_{L_\infty(0,T)}\|\widetilde{p}(\rho_\delta)\|_{L_\infty(0,T,L_1(\Omega))}\left\|\mathcal{A}_\tau\left(\widehat{G}_k(\rho_\delta)\right)\right\|_{L_1(Q_T)} \\ \leqslant C_{59}(C_{52},C_{53},\|\chi\|_{L_\infty(0,T)},T,K,\gamma,\beta,\sigma_{28},|\Omega|), \quad i=1,\dots,N;\end{aligned}\tag{134}$$

в силу (122), (125), (129) $\left(\text{с } \sigma_{25} = \dfrac{6\gamma}{5\gamma-3}\right)$ и $W^1_{\frac{6\gamma}{5\gamma-3}}(\Omega) \hookrightarrow L_{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}(\Omega)$ верны при $\sigma_{28} \leqslant \dfrac{5\gamma}{6} - \dfrac{1}{2}$ соотношения

$$\begin{aligned}|J_{2i}| \leqslant \|\chi'\|_{L_1(0,T)}\|\rho_{i\delta}\boldsymbol{u}_{i\delta}\|_{L_\infty\left(0,T;L_{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)\right)}\|\boldsymbol{w}_{\delta,\tau}\|_{L_\infty\left(0,T;L_{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}(\Omega)\right)} \\ \leqslant C_{60}(C_{52},C_{55},C_{57},\|\chi'\|_{L_1(0,T)},\gamma,\sigma_{28},\Omega), \quad i=1,\dots,N;\end{aligned}\tag{135}$$

благодаря (122), (124), (125), (130) при условии (133) справедливы оценки

$$\begin{aligned}|J_{3i}| \leqslant \|\chi\|_{L_\infty(0,T)}\|\rho_{i\delta}\boldsymbol{u}_{i\delta}\|_{L_2\left(0,T;L_{\frac{6\gamma}{\gamma+6}}(\Omega)\right)}\left\|\frac{\partial\boldsymbol{w}_{\delta,\tau}}{\partial t}\right\|_{L_2\left(0,T;L_{\frac{6\gamma}{5\gamma-6}}(\Omega)\right)} \\ \leqslant C_{61}(C_{52},C_{54},C_{55},C_{58},\|\chi\|_{L_\infty(0,T)},\gamma,\sigma_{28},|\Omega|), \quad i=1,\dots,N;\end{aligned}\tag{136}$$

из (122), (129) $\left(\text{при } \sigma_{25} = \dfrac{3}{2}\right)$ следует, при $\sigma_{28} \leqslant \dfrac{2\gamma}{3}$, $i = 1, \ldots, N$, что

$$
\begin{aligned}
|J_{4i}| &\leqslant \|\chi\|_{L_1(0,T)} \|\boldsymbol{f}_i\|_{L_\infty(Q_T)} \|\rho_{i\delta}\|_{L_\infty\big(0,T;L_\gamma(\Omega)\big)} \\
&\times \|\boldsymbol{w}_{\delta,\tau}\|_{L_\infty\big(0,T;L_{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(\Omega)\big)} \leqslant C_{62},
\end{aligned}
\tag{137}
$$

где $C_{62} = C_{62}(C_{52}, C_{57}, \|\boldsymbol{f}_i\|_{L_\infty(Q_T)}, \|\chi\|_{L_1(0,T)}, \gamma, \sigma_{28}, \Omega)$; ввиду (122), (124) и (129) имеют место при $\sigma_{28} \leqslant \dfrac{\gamma}{2}$, $i = 1, \ldots, N$ неравенства

$$
\begin{aligned}
|J_{5i}| &\leqslant \|\chi\|_{L_\infty(0,T)} \|\mathbb{S}_{i\delta}\|_{L_2(Q_T)} \, \|\nabla \otimes \boldsymbol{w}_{\delta,\tau}\|_{L_2(Q_T)} \\
&\leqslant C_{63}(C_{52}, C_{54}, C_{57}, \|\chi\|_{L_\infty(0,T)}, N, T, \gamma, \boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{M}, \sigma_{28}, |\Omega|);
\end{aligned}
\tag{138}
$$

и наконец, в силу (122), (124), (129) верны при $\sigma_{28} \leqslant \dfrac{2\gamma}{3} - 1$, $i = 1, \ldots, N$ оценки

$$
\begin{aligned}
|J_{6i}| &\leqslant \|\chi\|_{L_\infty(0,T)} \|\rho_{i\delta} \boldsymbol{v}_\delta \otimes \boldsymbol{u}_{i\delta}\|_{L_1\big(0,T;L_{\frac{3\gamma}{\gamma+3}}(\Omega)\big)} \\
&\times \|\nabla \otimes \boldsymbol{w}_{\delta,\tau}\|_{L_\infty\big(0,T;L_{\frac{3\gamma}{2\gamma-3}}(\Omega)\big)} \leqslant C_{64},
\end{aligned}
\tag{139}
$$

где $C_{64} = C_{64}(C_{52}, C_{54}, C_{57}, \|\chi\|_{L_\infty(0,T)}, N, T, \gamma, \sigma_{28}, |\Omega|)$. Таким образом, из (131), с учетом (134)–(139) (при условии (133)), следует соотношение

$$
\int\limits_{Q_T} \widetilde{p}(\rho_\delta) \mathcal{A}_\tau \left(\widehat{G}_k(\rho_\delta)\right) \chi \, d\boldsymbol{x} \, dt \leqslant C_{65}(C_{59}\text{–}C_{64}),
$$

совершая в котором предельный переход по $\tau \to 0$, затем выбирая в качестве тестовых функций χ функции χ_m, $m \in \mathbb{N}$, с такими же свойствами, как и при выводе (86), после чего переходя к пределу по $m \to +\infty$, и наконец — по $k \to +\infty$, приходим к оценке

$$
\int\limits_{Q_T} \widetilde{p}(\rho_\delta) \rho_\delta^{\sigma_{28}} \, d\boldsymbol{x} \, dt \leqslant C_{65}. \tag{140}
$$

В результате из (140) получаем при $i = 1, \ldots, N$ нужные неравенства

$$
\int\limits_{Q_T} (\rho_{i\delta}^\gamma + \delta \rho_{i\delta}^\beta) \rho_{i\delta}^{\sigma_{28}} \, d\boldsymbol{x} \, dt \leqslant C_{66}(C_{65}, N, K, \gamma, \beta, \sigma_{28}) \tag{141}
$$

при всех σ_{28}, удовлетворяющих (133).

Ввиду оценок (122), (124) и (141) из семейства $\boldsymbol{u}_{i\delta}$, $\rho_{i\delta}$, $i = 1, \ldots, N$, $\delta \in (0, 1]$, может быть выделена последовательность (которую мы обозначим так же), для которой при $\delta \to 0$ для всех $i = 1, \ldots, N$ имеют место сходимости

$$
\rho_{i\delta} \to \rho_i \quad * -\text{слабо в } \ L_\infty(0, T; L_\gamma(\Omega)), \tag{142}
$$

$$
\boldsymbol{u}_{i\delta} \to \boldsymbol{u}_i \ \text{ слабо в } \ L_2\big(0, T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\big), \tag{143}
$$

$$
\rho_{i\delta} \to \rho_i \ \text{ слабо в } \ L_{\gamma+\sigma_{28}}(Q_T), \tag{144}
$$

$$
\widetilde{p}(\rho_\delta) \to \overline{p(\rho)} \ \text{ слабо в } \ L_{\frac{\gamma+\sigma_{28}}{\gamma}}(Q_T), \tag{145}
$$

$$\delta\rho_{i\delta}^{\beta} \to 0 \ \text{ в } \ L_{\frac{\beta+\sigma_{28}}{\beta}}(Q_T). \tag{146}$$

Из уравнений (97) благодаря (125) получаем при $i = 1, \ldots, N$

$$\left\| \frac{\partial \rho_{i\delta}}{\partial t} \right\|_{L_\infty\left(0,T;W^{-1}_{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)\right)} \leqslant C_{67}(C_{55}).$$

Таким образом, последовательности $\rho_{i\delta}$, $i = 1, \ldots, N$, равностепенно непрерывны по $t \in [0, T]$ со значениями в $W^{-1}_{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega) = \Big(\overset{\circ}{W}{}^1_{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}(\Omega)\Big)^*$. Тогда, благодаря (95) и (122), приходим, выделяя подпоследовательности и переобозначая их так же, к сходимости (см. [12], Лемма 6.2, стр. 301)

$$\rho_{i\delta} \to \rho_i \ \text{ при } \ \delta \to 0 \ \text{ в } \ C([0,T]; L_{\gamma,\mathrm{weak}}(\Omega)), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{147}$$

Так как вложение $L_\gamma(\Omega)$ в $W_2^{-1}(\Omega)$ при $\gamma > \dfrac{6}{5}$ компактно, то (см. [12], Лемма 6.4, стр. 302)

$$\rho_{i\delta} \to \rho_i \ \text{ при } \ \delta \to 0 \ \text{ в } \ L_p\big(0,T; W_2^{-1}(\Omega)\big) \quad \forall p \in [1, +\infty), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{148}$$

Выбирая в (126) любое $\theta_6 \in (0, 1]$, после выбора подпоследовательности можно утверждать сходимости

$$\rho_{i\delta}\boldsymbol{u}_{i\delta} \to \rho_i\boldsymbol{u}_i \ \text{ при } \ \delta \to 0 \quad \text{слабо в пространстве (126).} \tag{149}$$

Из (122) и (124), ввиду (148), следует (после выбора подпоследовательности), что при $\delta \to 0$

$$\rho_{i\delta}\boldsymbol{u}_{j\delta} \to \rho_i\boldsymbol{u}_j \quad \text{слабо в пространстве} \quad L_2(0,T; L_{\frac{6\gamma}{\gamma+6}}(\Omega)), \quad i, j = 1, \ldots, N.$$

Тогда из (97) и (31) вытекает, что предельные функции $\boldsymbol{v}$, ρ_i, $i = 1, \ldots, N$, удовлетворяют уравнениям (7) в слабом смысле, т. е.

$$\int\limits_{Q_T} \Big(\rho_i \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \rho_i \boldsymbol{v} \cdot \nabla \phi_i\Big)\, d\boldsymbol{x}dt + \int\limits_{\Omega} \rho_{0i}\phi_i|_{t=0}\, d\boldsymbol{x} = 0$$

$$\forall\, \phi_i \in C_0^1\big([0,T); C^\infty(\overline{\Omega})\big), \quad i = 1, \ldots, N.$$

Перейдем теперь к пределу в уравнениях импульса (т. е. (100), в которых $\overline{\widetilde{p}(\rho_\delta)}$ заменено на $\widetilde{p}(\rho_\delta)$):

$$\begin{aligned} \int\limits_{Q_T} \Big[&-\frac{\partial(\rho_{i\delta}\boldsymbol{u}_{i\delta})}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\varphi}_i + (\rho_{i\delta}\boldsymbol{v}_\delta \otimes \boldsymbol{u}_{i\delta}) : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i) + (K\rho_\delta^\gamma + \delta\rho_\delta^\beta)\mathrm{div}\, \boldsymbol{\varphi}_i \\ &+ \rho_{i\delta}\boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i \Big] d\boldsymbol{x}dt = \int\limits_{Q_T} \mathbb{S}_{i\delta} : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i)\, d\boldsymbol{x}\, dt, \quad i = 1, \ldots, N, \end{aligned} \tag{150}$$

при всех $\boldsymbol{\varphi}_i \in C_0^1([0,T); C_0^\infty(\Omega))$. Используя оценки (124), (126) $\Big($при $\theta_6 = \dfrac{\gamma+3}{5\gamma-3}\Big)$ и (141), получаем при $i = 1, \ldots, N$

$$\left\| \frac{\partial(\rho_{i\delta}\boldsymbol{u}_{i\delta})}{\partial t} \right\|_{L_{\frac{\beta+\sigma_{28}}{\beta}}\left(0,T;W^{-1}_{\frac{\beta+\sigma_{28}}{\beta}}(\Omega)\right)} \leqslant C_{68},$$

где $C_{68} = C_{68}(C_{54}, C_{56}, C_{66}, \|\boldsymbol{f}\|_{L_\infty(Q_T)}, K, T, \beta, \gamma, \sigma_{28}, \boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{M}, |\Omega|)$. Поэтому последовательности $\rho_{i\delta}\boldsymbol{u}_{i\delta}$, $i = 1, \ldots, N$, равностепенно непрерывны по $t \in [0, T]$

со значениями в $W^{-1}_{\frac{\beta+\sigma_{28}}{\beta}}(\Omega) = \left(\overset{\circ}{W}{}^{1}_{\frac{\beta+\sigma_{28}}{\sigma_{28}}}(\Omega)\right)^*$. Тогда, благодаря (98) и (125), приходим (см. [12], Лемма 6.2, стр. 301) к сходимости (выделяя подпоследовательности и переобозначая их так же)

$$\rho_{i\delta}\boldsymbol{u}_{i\delta} \to \rho_i\boldsymbol{u}_i \ \text{ при } \ \delta \to 0 \ \text{ в } \ C([0,T]; L_{\frac{2\gamma}{\gamma+1},\mathrm{weak}}(\Omega)), \quad i = 1,\dots,N. \tag{151}$$

Так как вложение $L_{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)$ в $W_2^{-1}(\Omega)$ компактно, то (см. [12], Лемма 6.4, стр. 302) ввиду оценки (83) получаем при любых $\theta_6 \in (0,1)$

$$\begin{gathered}\rho_{i\delta}\boldsymbol{u}_{i\delta} \otimes \boldsymbol{u}_{j\delta} \to \rho_i\boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_j \ \text{ при } \ \delta \to 0 \\ \text{слабо в } \ L_{\frac{2}{\theta_6+1}}\big(0,T; L_{\frac{6\gamma}{2(2-\theta_6)\gamma+3(\theta_6+1)}}(\Omega)\big), \quad i,j = 1,\dots,N,\end{gathered} \tag{152}$$

и, кроме того, из (151) заключаем

$$\rho_{i\delta}\boldsymbol{u}_{i\delta} \to \rho_i\boldsymbol{u}_i \ \text{ при } \ \delta \to 0 \ \text{ в } \ C([0,T]; W_2^{-1}(\Omega)), \quad i = 1,\dots,N. \tag{153}$$

Теперь, перебрасывая производную по времени на пробные функции в (150) и привлекая (31), (143), (144), (145), (146), (149) и (152), мы можем перейти к пределу при $\delta \to 0$ и получить

$$\begin{gathered}\int\limits_{Q_T} \Big(\rho_i\boldsymbol{u}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial t} + (\rho_i\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i) + \overline{p(\rho)}\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi}_i + \rho_i\boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i\Big)\, d\boldsymbol{x}\, dt \\ = \int\limits_{Q_T} \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i)\, d\boldsymbol{x}\, dt - \int\limits_{\Omega} \rho_{0i}\boldsymbol{u}_{0i} \cdot \boldsymbol{\varphi}_i(0,\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}\end{gathered} \tag{154}$$

для всех $\boldsymbol{\varphi}_i \in C_0^1([0,T); C_0^\infty(\Omega))$, $i = 1,\dots,N$, причем ввиду (151) начальные условия для импульсов принимаются в смысле (151). Таким образом для завершения предельного перехода по δ осталось доказать, что

$$\overline{p(\rho)} = p(\rho) \ \text{ п. в. в } \ Q_T. \tag{155}$$

10. Завершение предельного перехода по $\delta \to 0$

Перебросим производную по времени на пробные функции в (150) и примем в качестве тестовых функций векторные поля $\boldsymbol{\varphi}_i = \psi\tau\boldsymbol{r}_{\delta k}$ (см. (103)), $i = 1,\dots,N$, где $\boldsymbol{r}_{\delta k} = \nabla\Delta^{-1}T_k(\rho_\delta)$, $\rho_\delta = \sum\limits_{j=1}^{N}\rho_{j\delta}$, а

$$T_k(s) = \begin{cases} s, & s \in [0,k], \\ k, & s \in [k,+\infty), \end{cases} \qquad k > 0.$$

Тогда получим тождества при $i = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{Q_T} \psi \left(\tau \widetilde{p}(\rho_\delta) T_k(\rho_\delta) - \mathbb{S}_{i\delta} : (\nabla \otimes (\tau \boldsymbol{r}_{\delta k}))\right) d\boldsymbol{x}dt \\
&= -\int\limits_{Q_T} \psi \widetilde{p}(\rho_\delta)(\nabla \tau) \cdot \boldsymbol{r}_{\delta k}\, d\boldsymbol{x}dt - \int\limits_{Q_T} \psi \tau (\rho_{i\delta} \boldsymbol{v}_\delta \otimes \boldsymbol{u}_{i\delta}) : (\nabla \otimes \boldsymbol{r}_{\delta k})\, d\boldsymbol{x}dt \\
&+ \int\limits_{Q_T} \psi \tau \rho_{i\delta} \boldsymbol{u}_{i\delta} \cdot \nabla \mathrm{div} \Delta^{-1} (T_k(\rho_\delta) \boldsymbol{v}_\delta)\, d\boldsymbol{x}dt \\
&- \int\limits_{Q_T} \psi (\rho_{i\delta} \boldsymbol{v}_\delta \otimes \boldsymbol{u}_{i\delta}) : ((\nabla \tau) \otimes \boldsymbol{r}_{\delta k})\, d\boldsymbol{x}dt - \int\limits_{Q_T} \psi \tau \rho_{i\delta} \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{r}_{\delta k}\, d\boldsymbol{x}dt \\
&- k \int\limits_{Q_T} \psi \tau \rho_{i\delta} \boldsymbol{u}_{i\delta} \cdot \nabla \Delta^{-1} (\chi_{\{\rho_\delta > k\}} \mathrm{div}\, \boldsymbol{v}_\delta)\, d\boldsymbol{x}dt - \int\limits_{Q_T} \frac{d\psi}{dt} \tau \rho_{i\delta} \boldsymbol{u}_{i\delta} \cdot \boldsymbol{r}_{\delta k}\, d\boldsymbol{x}dt.
\end{aligned} \tag{156}$$

Замечание 10.1. *В восьмом разделе проводилась аналогичная процедура, но в качестве пробных функций брались* $\boldsymbol{\varphi}_i = \psi \tau \boldsymbol{r}_{j\varepsilon}$ *с* $\boldsymbol{r}_{j\varepsilon} = \nabla \Delta^{-1} \rho_{j\varepsilon}$, $j = 1, \dots, N$, *что давало двухиндексные соотношения (с произвольными* i, j*) для эффективных вязких потоков. Если действовать по аналогии с теорией одножидкостных уравнений (Навье—Стокса), то следует проводить ту же процедуру, но для* $i = j$. *Однако оба этих варианта не годятся в данном случае — это связано с нелинейностью срезающей функции* T_k, *применение которой лежит в основе возможности рассматривать* $\gamma > 3/2$ *(в противном случае возникает ограничение* $\gamma > 3$, *в рамках которого мы фактически действовали до начала девятого раздела путем регуляризации с параметрами* δ *и* β*). Ключевой идеей в рассматриваемой нами задаче является отказ от обоих упомянутых вариантов и выбор третьего пути, сформулированного в начале данного раздела и реализованного ниже.*

Замечание 10.2. *При выводе* (156) *мы выразили* $(\boldsymbol{r}_{\delta k})_t$ *аналогично тому, как это делалось в* (102), *но при этом воспользовались ренормализацией с негладкой функцией* T_k *с помощью Леммы 6.11 из* [12], *стр. 309* (*аналогично рассуждениям после формулы* (132)). *А именно, мы используем соотношение*

$$\frac{\partial T_k(\rho_\delta)}{\partial t} + \mathrm{div}(T_k(\rho_\delta) \boldsymbol{v}_\delta) - k \chi_{\{\rho_\delta > k\}} \mathrm{div} \boldsymbol{v}_\delta = 0. \tag{157}$$

Эта процедура законна благодаря тому, что $\rho_\delta \in L_\infty(0, T; L_\beta(\Omega))$, $\beta > 2$ (*см.* (90)).

Переходя в (157) к пределу при $\delta \to 0$ (после выделения подпоследовательности и использования стандартных обозначений для слабых пределов), получим

$$\frac{\partial \overline{T_k(\rho)}}{\partial t} + \mathrm{div}(\overline{T_k(\rho) \boldsymbol{v}}) - k \overline{\chi_{\{\rho > k\}} \mathrm{div} \boldsymbol{v}} = 0.$$

Применяя к этому соотношению оператор $\nabla \Delta^{-1}$ и умножая на $\rho_i \boldsymbol{u}_i$, получим для всех $i = 1, \dots, N$

$$\rho_i \boldsymbol{u}_i \cdot \frac{\partial \overline{\boldsymbol{r}}_k}{\partial t} = -\rho_i \boldsymbol{u}_i \cdot \nabla \mathrm{div} \Delta^{-1} \overline{T_k(\rho) \boldsymbol{v}} + k \rho_i \boldsymbol{u}_i \cdot \nabla \Delta^{-1} \overline{\chi_{\{\rho > k\}} \mathrm{div} \boldsymbol{v}}, \tag{158}$$

где $\overline{\boldsymbol{r}}_k = \nabla \Delta^{-1} \overline{T_k(\rho)}$ — эта величина является пределом величин $\boldsymbol{r}_{\delta k}$, причем сходимость имеет место слабо в $L_{\sigma_{30}}(0, T; W^1_{\sigma_{30}}(\Omega))$ при всех $\sigma_{30} \in (1, +\infty)$.

Ввиду (147) по Лемме 6.2 из [12], стр. 301, мы можем заключить, что

$$T_k(\rho_\delta) \to \overline{T_k(\rho)} \quad \text{в} \quad C([0,T]; L_{\sigma_{31},\mathrm{weak}}(\Omega)) \tag{159}$$

при всех $\sigma_{31} \in (1, +\infty)$, а следовательно

$$\boldsymbol{r}_{\delta k} \to \overline{\boldsymbol{r}}_k \quad \text{в} \quad C([0,T]; L_{\sigma_{32}}(\Omega)) \tag{160}$$

для любых $\sigma_{32} \in (1, +\infty)$.

Подставляя в уравнениях (154) в качестве пробных функций $\boldsymbol{\varphi}_i = \psi\tau\overline{\boldsymbol{r}}_k$, получим при $i = 1, \ldots, N$

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{Q_T} \psi\left(\tau\overline{p(\rho)}\;\overline{T_k(\rho)} - \mathbb{S}_i : (\nabla\otimes(\tau\overline{\boldsymbol{r}}_k))\right) d\boldsymbol{x}dt = -\int\limits_{Q_T} \psi\overline{p(\rho)}(\nabla\tau)\cdot\overline{\boldsymbol{r}}_k\, d\boldsymbol{x}dt \\
&-\int\limits_{Q_T} \psi\tau(\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_i) : (\nabla\otimes\overline{\boldsymbol{r}}_k)\, d\boldsymbol{x}dt + \int\limits_{Q_T} \psi\tau\rho_i\boldsymbol{u}_i\cdot\nabla\mathrm{div}\Delta^{-1}\overline{T_k(\rho)\boldsymbol{v}}\, d\boldsymbol{x}dt \\
&-\int\limits_{Q_T} \psi(\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_i) : ((\nabla\tau)\otimes\overline{\boldsymbol{r}}_k)\, d\boldsymbol{x}dt - \int\limits_{Q_T} \psi\tau\rho_i\boldsymbol{f}_i\cdot\overline{\boldsymbol{r}}_k\, d\boldsymbol{x}dt \\
&-k\int\limits_{Q_T} \psi\tau\rho_i\boldsymbol{u}_i\cdot\nabla\Delta^{-1}\overline{\chi_{\{\rho>k\}}\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}}\, d\boldsymbol{x}dt - \int\limits_{Q_T} \frac{d\psi}{dt}\tau\rho_i\boldsymbol{u}_i\cdot\overline{\boldsymbol{r}}_k\, d\boldsymbol{x}dt.
\end{aligned} \tag{161}$$

Ввиду (153) и сходимости $\chi_{\{\rho_\delta>k\}}\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}_\delta \to \overline{\chi_{\{\rho>k\}}\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}}$ слабо в $L_2(Q_T)$, выводим

$$\begin{aligned}
&-k\int\limits_{Q_T} \psi\tau\rho_{i\delta}\boldsymbol{u}_{i\delta}\cdot\nabla\Delta^{-1}(\chi_{\{\rho_\delta>k\}}\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}_\delta)\, d\boldsymbol{x}dt \\
&\to -k\int\limits_{Q_T} \psi\tau\rho_i\boldsymbol{u}_i\cdot\nabla\Delta^{-1}\overline{\chi_{\{\rho>k\}}\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}}\, d\boldsymbol{x}dt
\end{aligned} \tag{162}$$

при $\delta \to 0$ для всех $i = 1, \ldots, N$.

Перейдем к пределу в (156) и вычтем из полученных соотношений уравнения (161). При этом ввиду (145), (146), (147), (151), (152), (160) и (162) взаимно уничтожатся первый, четвертый, пятый, шестой и седьмой интегралы в правых частях. В результате получим соотношения

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{Q_T} \psi\left(\tau\widetilde{p}(\rho_\delta)T_k(\rho_\delta) - \mathbb{S}_{i\delta} : (\nabla\otimes(\tau\boldsymbol{r}_{\delta k}))\right) d\boldsymbol{x}dt \\
&-\int\limits_{Q_T} \psi\left(\tau\overline{p(\rho)}\;\overline{T_k(\rho)} - \mathbb{S}_i : (\nabla\otimes(\tau\overline{\boldsymbol{r}}_k))\right) d\boldsymbol{x}dt \\
&= \lim_{\delta\to 0}\int\limits_{Q_T} \psi\boldsymbol{v}_\delta\cdot\mathrm{Comm}(\tau\rho_{i\delta}\boldsymbol{u}_{i\delta}, T_k(\rho_\delta))\, d\boldsymbol{x}dt \\
&-\int\limits_{Q_T} \psi\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{Comm}(\tau\rho_i\boldsymbol{u}_i, \overline{T_k(\rho)})\, d\boldsymbol{x}dt, \quad i = 1, \ldots, N.
\end{aligned} \tag{163}$$

Здесь мы использовали равенство $\overline{T_k(\rho)\boldsymbol{v}} = \overline{T_k(\rho)}\boldsymbol{v}$, вытекающее из (143) и (159).

Правая часть (163) обращается в нуль в силу (151), (159) и свойств оператора Comm, а левую часть можно представить в виде

$$\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{Q_T}\psi\tau T_k(\rho_\delta)\left(\widetilde{p}(\rho_\delta)-\sum_{m=1}^N\nu_{im}\mathrm{div}\boldsymbol{u}_{m\delta}\right)d\boldsymbol{x}dt$$

$$-\int\limits_{Q_T}\psi\tau\overline{T_k(\rho)}\left(\overline{p(\rho)}-\sum_{m=1}^N\nu_{im}\mathrm{div}\boldsymbol{u}_m\right)d\boldsymbol{x}dt$$

$$-\lim_{\delta\to 0}\sum_{m=1}^N\nu_{im}\int\limits_{Q_T}\psi(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}_{m\delta})(2\nabla\tau\cdot\boldsymbol{r}_{\delta k}+(\Delta\tau)\Delta^{-1}T_k(\rho_\delta))\,d\boldsymbol{x}dt$$

$$+\sum_{m=1}^N\nu_{im}\int\limits_{Q_T}\psi(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}_m)(2\nabla\tau\cdot\overline{\boldsymbol{r}}_k+(\Delta\tau)\Delta^{-1}\overline{T_k(\rho)})\,d\boldsymbol{x}dt$$

$$+\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{Q_T}\psi\mathbb{S}_{i\delta}:(\nabla\otimes[(\nabla\tau)\Delta^{-1}T_k(\rho_\delta)])\,d\boldsymbol{x}dt$$

$$-\int\limits_{Q_T}\psi\mathbb{S}_i:(\nabla\otimes[(\nabla\tau)\Delta^{-1}\overline{T_k(\rho)}])\,d\boldsymbol{x}dt,$$

причем здесь благодаря (143) и (160) последние четыре интеграла взаимно уничтожаются. Следовательно, (163) превращаются в соотношения для эффективных вязких потоков компонент смеси

$$\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{Q_T}\psi\tau T_k(\rho_\delta)\left(\widetilde{p}(\rho_\delta)-\sum_{m=1}^N\nu_{im}\mathrm{div}\boldsymbol{u}_{m\delta}\right)d\boldsymbol{x}dt$$

$$=\int\limits_{Q_T}\psi\tau\overline{T_k(\rho)}\left(\overline{p(\rho)}-\sum_{m=1}^N\nu_{im}\mathrm{div}\boldsymbol{u}_m\right)d\boldsymbol{x}dt,\qquad i=1,\dots,N.$$

Отсюда аналогично выводу формулы (113) (но с привлечением (146)) получаем ключевое соотношение

$$\nu_0\overline{T_k(\rho)p(\rho)}-\overline{T_k(\rho)\mathrm{div}\boldsymbol{v}}=\nu_0\overline{T_k(\rho)}\;\overline{p(\rho)}-\overline{T_k(\rho)}\mathrm{div}\boldsymbol{v}\ \text{ п. в. в }\ Q_T. \tag{164}$$

Отметим, что начиная с этой формулы окончательно исчезают индексы, отвечающие за нумерацию компонент смеси (что удалось достичь в том числе благодаря соображениям, изложенным в Замечании 10.1), и рассуждения начинают почти буквально повторять таковые из известной теории однокомпонентной модели, в связи с чем дальнейшее изложение будет достаточно конспективным.

Для любых $\delta_{1,2}>0$ при п. в. $(t,\boldsymbol{x})\in Q_T$, в силу монотонности функции $s\mapsto Ks^\gamma$, имеем неравенство

$$(p(\rho_{\delta_1})-p(\rho_{\delta_2}))(T_k(\rho_{\delta_1})-T_k(\rho_{\delta_2}))\geqslant 0,$$

переходя в котором к пределу сначала по $\delta_1\to 0$, а затем по $\delta_2\to 0$, получим поточечное неравенство

$$\overline{p(\rho)T_k(\rho)}\geqslant\overline{p(\rho)}\;\overline{T_k(\rho)},$$

благодаря которому (164) превращается в соотношение

$$\overline{T_k(\rho)\mathrm{div}\boldsymbol{v}} \geqslant \overline{T_k(\rho)}\mathrm{div}\boldsymbol{v} \text{ п. в. в } Q_T. \tag{165}$$

Обозначим $L_k(s) = \int\limits_1^s \frac{T_k(z)}{z^2}\,dz$. Ввиду Леммы 10.13 из [4], стр. 354, мы можем применить процедуру ренормализации к уравнению неразрывности для ρ_δ и в результате получить

$$\frac{\partial(\rho_\delta L_k(\rho_\delta))}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho_\delta L_k(\rho_\delta)\boldsymbol{v}_\delta) + T_k(\rho_\delta)\mathrm{div}\boldsymbol{v}_\delta = 0.$$

Переходя в этом соотношении к слабому пределу при $\delta \to 0$, получаем

$$\frac{\partial\overline{\rho L_k(\rho)}}{\partial t} + \mathrm{div}(\overline{\rho L_k(\rho)}\boldsymbol{v}) + \overline{T_k(\rho)\mathrm{div}\boldsymbol{v}} = 0. \tag{166}$$

Ренормализуя уравнение неразрывности для предельной плотности, выводим

$$\frac{\partial(\rho L_k(\rho))}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho L_k(\rho)\boldsymbol{v}) + T_k(\rho)\mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0. \tag{167}$$

Замечание 10.3. *Здесь* (*при выводе* (167)) *впервые в статье возникает ситуация, в которой ренормализация уравнения не может быть проведена для произвольного решения соответствующего класса, но требуется нетривиальная процедура именно для построенного решения. Эту процедуру мы не воспроизводим, поскольку она буквально повторяет изложенное в* [4], *стр. 118–122. См. также Замечание 2.2.*

Вычитая (167) из (166) и пользуясь (165), получаем

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\Big(\overline{\rho L_k(\rho)} - \rho L_k(\rho)\Big) + \mathrm{div}\Big(\big(\overline{\rho L_k(\rho)} - \rho L_k(\rho)\big)\boldsymbol{v}\Big)\\ &\qquad + \Big(\overline{T_k(\rho)} - T_k(\rho)\Big)\mathrm{div}\boldsymbol{v} \leqslant 0.\end{aligned} \tag{168}$$

В силу аргументов, изложенных в [4], стр. 118–122, последнее слагаемое в левой части (168) стремится к нулю при $k \to +\infty$, и следовательно, переходя к пределу по $k \to +\infty$ в (168), мы приходим к ключевому соотношению

$$\int\limits_\Omega \overline{\rho\ln\rho}(t)\,d\boldsymbol{x} \leqslant \int\limits_\Omega (\rho\ln\rho)(t)\,d\boldsymbol{x} \text{ для п. в. } t \in (0,T).$$

Ввиду выпуклости функции $s \mapsto s\ln s$ это неравенство означает (см. Теорему 10.20 из [4], стр. 339) сходимость $\rho_\delta \to \rho$ п. в. в Q_T (после выбора подпоследовательности), что и доказывает требуемое равенство (155). Теорема 2.3 доказана.

Аналогично (119) можно доказать энергетическое неравенство для построенного решения (см. [4], [5], [6] и [12]), но в этом нет необходимости (см. Замечание 2.2).

Замечание 10.4. *Аналогично рассуждениям Замечания 8.1, можно доказать более сильное, чем* (97), *свойство* (15).

Замечание 10.5. *Вопрос об ограничениях на матрицы вязкостей является неочевидным. Наложенные нами условия* (2) *можно ослабить. А именно,* *фактически мы не использовали второе условие в* (2)*, а вместо него пользовались лишь его следствием* $\boldsymbol{N} > 0$*, которое как раз и обеспечивает выполнение интегрального неравенства* (3)*. С другой стороны, второе условие в* (2) *обязательно возникает в физически осмысленных моделях, поскольку оно выражает локальное выполнение второго закона термодинамики (в то время как* (3) *соответствует его выполнению лишь в целом по области течения) и необходимо математически в смежных задачах, например в теплопроводных моделях.*

References

[1] M.E. Bogovski, *On solutions of certain problems of vector analysis involving the operators div and grad*, Tr. Semin. im. S. L. Soboleva, **1**, Institute of Mathematics, Siberian Branch of USSR Acad. Sci., Novosibirsk, 1980, 5–40. (in Russian).

[2] R. Coifman, Y. Meyer, *On commutators of singular integrals and bilinear singular integrals*, Transactions of the American Mathematical Society, **212** (1975), 315–331. Zbl 0324.44005

[3] V.N. Dorovsky, Yu.V. Perepechko, Theory of the partial melting, Sov. Geology and Geophysics, **30**:9 (1989), 56–64. (in Russian).

[4] E. Feireisl, A. Novotný, *Singular limits in thermodynamics of viscous fluids*, Advances in Mathematical Fluid Mechanics, Birkhäuser, Basel, 2009. Zbl 1176.35126

[5] E. Feireisl, *Dynamics of viscous compressible fluids*, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, **26**, Oxford University Press, Oxford, 2003.

[6] E. Feireisl, A. Novotný, H. Petzeltová, *On the existence of globally defined weak solutions to the Navier—Stokes equations*, Journal of Mathematical Fluid Mechanics, **3** (2001), 358–392. Zbl 0997.35043

[7] P.-L. Lions, *Mathematical topics in fluid mechanics, v. 2: Compressible Models*, Oxford University Press, New York, 1998. Zbl 0908.76004

[8] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Solubility of a stationary boundary-value problem for the equations of motion of a one-temperature mixture of viscous compressible heat–conducting fluids*, Izvestiya: Mathematics, **78**:3 (2014), 554–579. Zbl 06323424

[9] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Viscous compressible multi-fluids: modeling and multi-D existence*, Methods and Applications of Analysis, **20**:2 (2013), 179–195. Zbl 1290.35203

[10] E.A. Nagnibeda, E.V. Kustova, *Non-Equilibrium Reacting Gas Flow*, Springer, Berlin, 2009. Zbl 1186.82003

[11] R.I. Nigmatulin *Dynamics of multiphase media*, Vol. 1, Hemisphere, N.Y., 1990.

[12] A. Novotný, I. Straškraba, *Introduction to the mathematical theory of compressible flow*, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, **27**, Oxford University Press, Oxford, 2004. Zbl 1088.35051

[13] P. Plotnikov, J. Sokolowski, *Compressible Navier-Stokes equations. Theory and shape optimization*, IMPAN Monografie Matematyczne (N. S.), **73**, Birkhäuser, Basel, 2012. Zbl 1260.35002

[14] D.A. Prokudin, M.V. Krayushkina, *Solvability of steady boundary value problem for a model system of equations of barotropic motion of a mixture of viscous compressible fluids*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2016, to appear.

[15] K.L. Rajagopal, L. Tao, *Mechanics of mixtures*, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, **35**, World Scientific, River Edge, NJ, 1995. Zbl 0941.74500

[16] L. Tartar, *Compensated compactness and applications to partial differential equations*, in Nonlinear Analysis and Mechanics, Heriot–Watt Symposium IV, R. Knops, ed., Pitman Research Notes in Mathematics, **39**, Pitman, Boston, 1979, 136–212. Zbl 0437.35004

[17] V.M. Zhdanov, *Transport Processes in Multicomponent Plasma*, Taylor and Francis, London and New York, 2002.

Alexander Evgenyevich Mamontov, Dmitriy Alexeyevich Prokudin
Lavrentyev Institute of Hydrodynamics,
pr. Lavrent'eva, 15,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: aemamont@hydro.nsc.ru