

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 13, стр. 607–623 (2016)

УДК 514.8:517.983:519.6

DOI 10.17377/semi.2016.13.048

MSC 44A30

ПРИБЛИЖЕННОЕ ОБРАЩЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ
ДВУМЕРНОЙ ВЕКТОРНОЙ ТОМОГРАФИИ

И.Е. СВЕТОВ, С.В. МАЛЬЦЕВА, А.П. ПОЛЯКОВА

ABSTRACT. We propose two approaches for numerical solution of reconstruction problem of a vector field in an unit disk from the known values of longitudinal and transverse ray transforms. The algorithms are based on the method of approximate inverse. Numerical simulations show that the proposed algorithms yield good results of reconstruction of vector fields.

Keywords: vector tomography, method of approximate inverse, longitudinal ray transform, transverse ray transform, Radon transform, solenoidal vector field, potential vector field, potential, numerical simulation.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время направления в томографии, ориентированные на исследование векторных характеристик сред, интенсивно развиваются. И прежде всего благодаря тому, что области приложений томографических методов исследований не скалярных свойств объектов очень широки. Это исследование потоков жидкости или газа [1], [2], физический эксперимент [3], [4], физика плазмы [5], [6], изучение анизотропных свойств промышленных материалов и земных пород [7], медицинские и биологические приложения [8], [9], и многое другое. В обзорной работе Т. Шустера [10] содержатся существенно более подробные сведения об основных положениях и результатах векторной томографии. Упомянем и о техническом отчете [11], в котором приведена обширная

SVETOV, I.E., MALTSEVA, S.V., POLYAKOVA, A.P., APPROXIMATE INVERSION OF OPERATORS OF TWO-DIMENSIONAL VECTOR TOMOGRAPHY.

© 2016 Светов И.Е., Мальцева С.В., Полякова А.П.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке программы Президиума РАН (проект 0314-2015-0010), РФФИ (проект 14-01-31491-мол_а).

Поступила 19 мая 2016 г., опубликована 12 августа 2016 г.

библиография работ, посвященных исследованиям задач векторной и тензорной томографии в разнообразных физических постановках.

Перечислим основные математические средства, на которых базируются численные методы и алгоритмы решения задач векторной томографии. В случае отсутствия явления рефракции очень привлекательны, с математической точки зрения, формулы обращения [12]–[16]. Особый интерес, и в том числе в силу возможности использования в рефракционной томографии, представляют собой два очень общих метода прикладного функционального анализа, в частности предназначенных и для решения операторных уравнений — это метод наименьших квадратов и метод сингулярного разложения. При численном решении задачи векторной томографии метод наименьших квадратов применялся с полиномиальными [17] и B -сплайновыми [18]–[20] аппроксимирующими последовательностями. Отметим работы, в которых получены сингулярные разложения операторов лучевых преобразований двумерных векторных полей [21], [22], [19], оператора нормального преобразования Радона трехмерных векторных полей [23], [24] и проведены численные исследования алгоритмов, основанных на методе усеченного сингулярного разложения.

Под термином “задача векторной томографии” в данной работе подразумевается следующая постановка. Пусть некоторая ограниченная область плоскости заполнена средой без рефракции. В среде распределено некоторое векторное поле. По известным продольным и (или) поперечным лучевым преобразованиям требуется найти векторное поле.

В данной работе предлагаются два алгоритма решения задачи векторной томографии, основанные на так называемом методе приближенного обращения, который развивается уже более 20-ти лет А. К. Луисом и его учениками [25]–[28]. Метод применялся в том числе и для решения задач доплеровской томографии [29], [30]. Теоретические основы метода лежат в функциональном анализе. Это теорема Рисса о представлении линейного функционала, понятие фундаментального решения и его свойства, приближение δ -функции. Идея метода приближенного обращения состоит в следующем. Пусть требуется найти решение (функцию f) операторного уравнения $Af = g$ для линейного ограниченного оператора $A : H \rightarrow K$, где H и K — Гильбертовы пространства. Для этого используются усредняющие функции e_γ^y , обладающие свойствами $\|e_\gamma^y\|_H = 1$ и $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \langle f, e_\gamma^y \rangle_H = f(y)$. Пусть A^* — сопряженный оператор для A и функции e_γ^y лежат в пространстве образов A^* , тогда существуют функции ψ_γ^y такие, что $A^*\psi_\gamma^y = e_\gamma^y$. Следовательно имеем

$$f(y) \approx \langle f, e_\gamma^y \rangle_H = \langle f, A^*\psi_\gamma^y \rangle_H = \langle Af, \psi_\gamma^y \rangle_K = \langle g, \psi_\gamma^y \rangle_K.$$

Таким образом, приближенное решение строится как скалярное произведение исходных данных g и функций ψ_γ^y , которые могут быть найдены до получения томографических данных.

Проведено тестирование предлагаемых алгоритмов с целью определения пределов их применимости. Исследовано влияние на точность восстановления двумерного векторного поля таких факторов, как гладкость восстанавливаемого поля, дискретизация входных данных, значение параметра регуляризации, уровень и характер вносимого в исходные данные шума.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

2.1. Основные используемые пространства. Введем обозначения $B = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1\}$ для единичного круга, единичной окружности $\partial B = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$ и цилиндра $Z = \{(\alpha, s) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \in [0, 2\pi), s \in [-1, 1]\}$.

Функции (скалярные поля) обозначаем через $f(x), g(x), \dots$. За потенциалами, которые задают векторные поля, закрепляем обозначения $\varphi(x), \chi(x), \dots$. Считаем их определенными в $\mathbb{R}^2$ с носителем в $B \subset \mathbb{R}^2$. Множество векторных полей $\mathbf{w}(x) = (w_i(x))$, $\mathbf{u}(x) = (u_i(x))$, $\mathbf{v}(x) = (v_i(x))$, $i = 1, 2$, определенных в B , обозначается $S^1(B)$. Скалярное произведение в $S^1(B)$ вводится формулой

$$\langle \mathbf{u}(x), \mathbf{v}(x) \rangle_{S^1(B)} = \sum_{i=1}^2 u_i(x) v_i(x).$$

Функциональное пространство $L_2(S^1(B))$ состоит из интегрируемых в квадрате векторных полей, определенных в B . Скалярное произведение двух векторных полей $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ из пространства $L_2(S^1(B))$ задается формулой:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{L_2(S^1(B))} = \int_B \langle \mathbf{u}(x), \mathbf{v}(x) \rangle_{S^1(B)} dx.$$

Через $H^k(S^1(B))$, $H_0^k(S^1(B))$ обозначим пространства Соболева векторных полей. Кроме того, мы будем использовать пространства $L_2(Z)$ и $H^k(Z)$.

2.2. Дифференциальные операторы. Операторы *внутреннего дифференцирования* d и *внутреннего $\perp$ -дифференцирования* $d^\perp$

$$d, d^\perp : H^k(B) \rightarrow H^{k-1}(S^1(B))$$

действуют на скалярное поле φ по правилам

$$d\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right), \quad d^\perp \varphi = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right).$$

Наряду с этими операторами нам понадобится оператор *дивергенции*

$$\operatorname{div} : H^k(S^1(B)) \rightarrow H^{k-1}(B),$$

который действует на векторное поле $\mathbf{w}$ по правилу:

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2}.$$

Напомним, что векторное поле $\mathbf{u} \in H^k(S^1(B))$ называется *потенциальным*, если существует скалярное поле $\varphi \in H^{k+1}(B)$ (потенциал), такое что $\mathbf{u} = d\varphi$. Поле $\mathbf{w} \in H^k(S^1(B))$ называется *соленоидальным*, если $\operatorname{div} \mathbf{w} = 0$. Двумерное соленоидальное векторное поле $\mathbf{w} \in H^k(S^1(B))$ можно представить через одну функцию [31]: $\mathbf{w} = d^\perp \varphi$, где $\varphi \in H^{k+1}(B)$.

Известно [32], что имеет место однозначное разложение любого векторного поля $\mathbf{u} \in L_2(S^1(B))$ на сумму соленоидального и потенциального полей:

$$(1) \quad \mathbf{u} = d^\perp \varphi^{(0)} + d\varphi^{(1)}, \quad \varphi^{(0)} \in H^1(B), \quad \varphi^{(1)} \in H_0^1(B).$$

В данной работе будем рассматривать только те поля, для которых потенциалы $\varphi^{(0)}$, $\varphi^{(1)}$, участвующие в разложении (1), обращаются в нуль на границе ∂B . То есть $\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)} \in H_0^1(B)$.

2.3. Преобразование Радона и лучевые преобразования. Пусть $\alpha \in [0, 2\pi)$, тогда единичные векторы $\xi = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, $\eta = \xi^\perp = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$ и вещественное число $s \in \mathbb{R}$ задают прямую $L_{\xi,s}: x = s\xi + t\eta$.

Преобразование Радона

$$\mathcal{R} : H^k(B) \rightarrow H^k(Z)$$

функции $f \in H^k(B)$ определяется формулой:

$$[\mathcal{R}f](s, \alpha) = \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} f(s\xi + t\eta) dt.$$

Операторы *продольного и поперечного лучевых преобразований*

$$\mathcal{P}, \mathcal{P}^\perp : H^k(S^1(B)) \rightarrow H^k(Z),$$

действующие на векторное поле $\mathbf{w} = (w_i)$, задаются соотношениями

$$(2) \quad [\mathcal{P}\mathbf{w}](s, \alpha) = \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} \sum_{i=1}^2 w_i(s\xi + t\eta) \eta_i dt,$$

$$(3) \quad [\mathcal{P}^\perp \mathbf{w}](s, \alpha) = \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} \sum_{i=1}^2 w_i(s\xi + t\eta) \xi_i dt.$$

В отличие от преобразования Радона, лучевые преобразования векторных полей обладают ненулевыми ядрами. Приведем описание ядер и областей значения лучевых преобразований, а также связей между лучевыми преобразованиями и преобразованиями Радона их потенциалов (см. [20], [15]).

Утверждение. Пусть дано векторное поле $\mathbf{w} \in H^k(S^1(B))$,

$$\mathbf{w} = d^\perp \varphi^{(0)} + d\varphi^{(1)},$$

где потенциалы $\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)} \in H_0^{k+1}(B)$. Тогда верны следующие утверждения.

1) Ядра лучевых преобразований описываются следующими равенствами

$$(4) \quad [\mathcal{P}\mathbf{w}](s, \alpha) = [\mathcal{P}d^\perp \varphi^{(0)}](s, \alpha), \quad [\mathcal{P}^\perp \mathbf{w}](s, \alpha) = [\mathcal{P}^\perp d\varphi^{(1)}](s, \alpha).$$

2) Лучевые преобразования векторного поля $\mathbf{w}$ связаны с преобразованием Радона его потенциалов $\varphi^{(0)}, \varphi^{(1)}$ соотношениями

$$(5) \quad [\mathcal{P}\mathbf{w}](s, \alpha) = \frac{\partial}{\partial s} [\mathcal{R}\varphi^{(0)}](s, \alpha), \quad [\mathcal{P}^\perp \mathbf{w}](s, \alpha) = \frac{\partial}{\partial s} [\mathcal{R}\varphi^{(1)}](s, \alpha).$$

2.4. Постановка задачи векторной томографии. Пусть некоторое векторное поле $\mathbf{w}$ задано в единичном круге B . По известным значениям одного или обоих лучевых преобразований (2), (3) требуется восстановить векторное поле $\mathbf{w}$ или его часть.

3. ПРИБЛИЖЕННОЕ ОБРАЩЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ ЛУЧЕВЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

В данной работе для численного решения поставленной задачи предлагаются два подхода, основанные на методе приближенного обращения, который хорошо себя зарекомендовал при решении задачи по восстановлению скалярного поля по известному преобразованию Радона [28].

3.1. Схема метода приближенного обращения оператора преобразования Радона. Сопряженным оператором для преобразования Радона $\mathcal{R}$ является оператор обратной проекции $\mathcal{R}^*$, который определяется для функции $g(s, \alpha)$ равенством

$$(\mathcal{R}^*g)(x) = \int_0^{2\pi} g(x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha, \alpha) d\alpha.$$

Пусть $e \in L_2(\mathbb{R}^2)$ функция со свойством

$$\int_{\mathbb{R}^2} e(x) dx = 1.$$

С помощью оператора сдвига и растяжения $\mathcal{T}_{1,\gamma}^y : L_2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^2)$ мы образуем из функции e молифайер (от английского mollifier, mollify — смягчать, сглаживать)

$$e_\gamma^y(x) = \mathcal{T}_{1,\gamma}^y e(x) = \gamma^{-2} e\left(\frac{x-y}{\gamma}\right), \quad x, y \in \mathbb{R}^2.$$

То есть, для функции $e_\gamma^y(x)$ и произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$ имеет место равенство

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \langle f, e_\gamma^y \rangle_{L_2(\mathbb{R}^2)} = f(y).$$

Для фиксированного $y \in \mathbb{R}^2$ оператор сдвига и растяжения $\mathcal{T}_{2,\gamma}^y : L_2(Z) \rightarrow L_2(Z)$ для функции $g \in L_2(Z)$ определяется формулой

$$\mathcal{T}_{2,\gamma}^y g(s, \alpha) = \gamma^{-2} g\left(\frac{s - y_1 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha}{\gamma}, \alpha\right)$$

и связан с оператором $\mathcal{T}_{1,\gamma}^y$ равенством

$$\mathcal{R}^* \mathcal{T}_{2,\gamma}^y = \mathcal{T}_{1,\gamma}^y \mathcal{R}^*.$$

Пусть e лежит в пространстве преобразов операторов $\mathcal{R}^*$ и ψ является решением уравнения $\mathcal{R}^* \psi = e$, тогда при фиксированных γ и y функция

$$(6) \quad \psi_\gamma^y = \mathcal{T}_{2,\gamma}^y \psi$$

является решением уравнения $\mathcal{R}^* \psi_\gamma^y = e_\gamma^y$. Имеем

$$\langle f, e_\gamma^y \rangle_{L_2(\mathbb{R}^2)} = \langle f, \mathcal{R}^* \psi_\gamma^y \rangle_{L_2(\mathbb{R}^2)} = \langle \mathcal{R}f, \psi_\gamma^y \rangle_{L_2(Z)}$$

и формула приближенного обращения оператора преобразования Радона следующая

$$(7) \quad f(y) \approx \langle \mathcal{R}f, \psi_\gamma^y \rangle_{L_2(Z)}.$$

3.2. Приближенное обращение операторов лучевых преобразований для покомпонентного восстановления векторных полей. Пусть для векторного поля $\mathbf{v}$ известны значения продольного и поперечного лучевых преобразований. Заметим, что

$$\begin{aligned} [\mathcal{P}\mathbf{v}](s, \alpha) &= \sum_{i=1}^2 [\mathcal{R}v_i](s, \alpha) \eta_i = [\mathcal{R}v_1](s, \alpha)(-\sin \alpha) + [\mathcal{R}v_2](s, \alpha) \cos \alpha, \\ [\mathcal{P}^\perp \mathbf{v}](s, \alpha) &= \sum_{i=1}^2 [\mathcal{R}v_i](s, \alpha) \xi_i = [\mathcal{R}v_1](s, \alpha) \cos \alpha + [\mathcal{R}v_2](s, \alpha) \sin \alpha. \end{aligned}$$

Решая эту систему относительно $\mathcal{R}v_1$, $\mathcal{R}v_2$, получим

$$\begin{aligned} [\mathcal{R}v_1](s, \alpha) &= [\mathcal{P}\mathbf{v}](s, \alpha)(-\sin \alpha) + [\mathcal{P}^\perp \mathbf{v}](s, \alpha) \cos \alpha, \\ [\mathcal{R}v_2](s, \alpha) &= [\mathcal{P}\mathbf{v}](s, \alpha) \cos \alpha + [\mathcal{P}^\perp \mathbf{v}](s, \alpha) \sin \alpha. \end{aligned}$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} [\mathcal{G}_1 \mathbf{v}](s, \alpha) &= [\mathcal{P}\mathbf{v}](s, \alpha)(-\sin \alpha) + [\mathcal{P}^\perp \mathbf{v}](s, \alpha) \cos \alpha, \\ [\mathcal{G}_2 \mathbf{v}](s, \alpha) &= [\mathcal{P}\mathbf{v}](s, \alpha) \cos \alpha + [\mathcal{P}^\perp \mathbf{v}](s, \alpha) \sin \alpha, \end{aligned}$$

и используя (7), получаем формулы приближенного обращения операторов лучевых преобразований для восстановления векторного поля покомпонентно

$$(8) \quad v_1(y) \approx \langle \mathcal{G}_1 \mathbf{v}, \psi_\gamma^y \rangle_{L_2(Z)}, \quad v_2(y) \approx \langle \mathcal{G}_2 \mathbf{v}, \psi_\gamma^y \rangle_{L_2(Z)}.$$

В случае, когда известны значения только продольного лучевого преобразования $\mathcal{P}\mathbf{v}$, мы полагаем $\mathcal{P}^\perp \mathbf{v} = 0$ и имеем

$$[\mathcal{G}_1 \mathbf{v}](s, \alpha) = [\mathcal{P}\mathbf{v}](s, \alpha)(-\sin \alpha), \quad [\mathcal{G}_2 \mathbf{v}](s, \alpha) = [\mathcal{P}\mathbf{v}](s, \alpha) \cos \alpha.$$

В этом случае возможно восстановить лишь соленоидальную часть $d^\perp \varphi^{(0)}$ векторного поля $\mathbf{v}$, так как потенциальная часть $d\varphi^{(1)}$ лежит в ядре продольного лучевого преобразования:

$$(9) \quad (d^\perp \varphi^{(0)})_1(x) \approx \langle \mathcal{G}_1 \mathbf{v}, \psi_\gamma^y \rangle_{L_2(Z)}, \quad (d^\perp \varphi^{(0)})_2(x) \approx \langle \mathcal{G}_2 \mathbf{v}, \psi_\gamma^y \rangle_{L_2(Z)}.$$

В случае, когда известны значения только поперечного лучевого преобразования $\mathcal{P}^\perp \mathbf{v}$ формулы для восстановления потенциальной части $d\varphi^{(1)}$ векторного поля $\mathbf{v}$ получаются аналогично.

Необходимо отметить, что в работе [30] с использованием другого подхода были получены формулы (9) для продольного лучевого преобразования.

3.3. Приближенное обращение операторов лучевых преобразований для восстановления потенциалов векторных полей. Имеет место равенство Парсеваля (смотри, например, [33])

$$(10) \quad \langle g, h \rangle_{L_2(\mathbb{R})} = \langle F[g], F[h] \rangle_{L_2(\mathbb{R})},$$

где $F[\cdot]$ — одномерное преобразование Фурье, определяемое формулой

$$F[f](\tilde{z}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(z) \exp(-iz\tilde{z}) dz.$$

Обратное преобразование Фурье определяется формулой

$$F^{-1}[f](z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\tilde{z}) \exp(iz\tilde{z}) d\tilde{z}$$

и имеет место равенство $F^{-1}[F[f]] = f$.

Пусть $f, g \in L_2(\mathbb{R}^2)$ и носитель хотя бы одной из них лежит в Z , тогда из равенства (10) следует равенство

$$(11) \quad \langle g, h \rangle_{L_2(Z)} = \langle g, h \rangle_{L_2(\mathbb{R}^2)} = \langle F[g], F[h] \rangle_{L_2(\mathbb{R}^2)},$$

где преобразование Фурье применяется по переменной s .

Пусть векторное поле $\mathbf{v}$ имеет вид

$$\mathbf{v} = d^\perp \varphi^{(0)} + d\varphi^{(1)}, \quad \varphi^{(0)}, \varphi^{(1)} \in H_0^1(B).$$

Получим формулу для приближенного восстановления потенциала $\varphi^{(0)}$. Для этого нам потребуется следующее свойство преобразования Фурье:

$$(12) \quad F \left[\frac{\partial f}{\partial z} \right] (\tilde{z}) = i\tilde{z} F[f](\tilde{z}).$$

Имеем

$$(13) \quad \begin{aligned} F[\mathcal{P}\mathbf{v}](\tilde{s}, \alpha) &\stackrel{(4)}{=} F[d^\perp \varphi^{(0)}](\tilde{s}, \alpha) \stackrel{(5)}{=} F \left[\frac{\partial}{\partial s} \mathcal{R}\varphi^{(0)} \right] (\tilde{s}, \alpha) \\ &\stackrel{(12)}{=} i\tilde{s} F[\mathcal{R}\varphi^{(0)}](\tilde{s}, \alpha). \end{aligned}$$

Используя (7), для нашей задачи получим:

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)}(y) &\approx \langle \mathcal{R}\varphi^{(0)}, \psi_\gamma^y \rangle_{L_2(Z)} \stackrel{(11)}{=} \langle F[\mathcal{R}\varphi^{(0)}], F[\psi_\gamma^y] \rangle_{L_2(\mathbb{R}^2)} \\ &= \langle i\tilde{s} F[\mathcal{R}\varphi^{(0)}], \frac{1}{i\tilde{s}} F[\psi_\gamma^y] \rangle_{L_2(\mathbb{R}^2)} \stackrel{(13)}{=} \langle F[\mathcal{P}\mathbf{v}], \frac{1}{i\tilde{s}} F[\psi_\gamma^y] \rangle_{L_2(\mathbb{R}^2)} \\ &\stackrel{(11)}{=} \langle \mathcal{P}\mathbf{v}, F^{-1} \left[\frac{1}{i\tilde{s}} F[\psi_\gamma^y] \right] \rangle_{L_2(Z)}. \end{aligned}$$

Так как

$$\frac{1}{i\tilde{s}} = \sqrt{\pi/2} F[\text{sgn}](\tilde{s}),$$

в силу свойства $F[f * g] = \sqrt{2\pi} F[f] \cdot F[g]$ преобразования Фурье, получаем

$$F^{-1} \left[\frac{1}{i\tilde{s}} F[\psi_\gamma^y] \right] (s, \alpha) = \frac{1}{2} \text{sgn}(s) *_s \psi_\gamma^y(s, \alpha),$$

где $*_s$ — свёртка по переменной s . Введем функции

$$(14) \quad \Psi_\gamma^y(s, \alpha) = \frac{1}{2} \text{sgn}(s) *_s \psi_\gamma^y(s, \alpha),$$

$$(15) \quad \Psi(s, \alpha) = \Psi_1^0(s, \alpha) = \frac{1}{2} \text{sgn}(s) *_s \psi(s, \alpha),$$

тогда формула приближенного обращения оператора продольного лучевого преобразования для восстановления потенциала $\varphi^{(0)}$ векторного поля $\mathbf{v}$ имеет вид

$$(16) \quad \varphi^{(0)}(y) \approx \langle \mathcal{P}\mathbf{v}, \Psi_\gamma^y \rangle_{L_2(Z)}.$$

Формула приближенного обращения оператора поперечного лучевого преобразования для восстановления потенциала $\varphi^{(1)}$ векторного поля $\mathbf{v}$ получается аналогично

$$(17) \quad \varphi^{(1)}(y) \approx \langle \mathcal{P}^\perp \mathbf{v}, \Psi_\gamma^y \rangle_{L_2(Z)}.$$

Установим связь между функциями (14) и (15). Имеем

$$\begin{aligned} \Psi_\gamma^y(s, \alpha) &= \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(s) *_s \psi_\gamma^y(s, \alpha) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(s-t) \psi_\gamma^y(t, \alpha) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(s-t) \gamma^{-2} \psi \left(\frac{t - y_1 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha}{\gamma}, \alpha \right) dt. \end{aligned}$$

Сделав замену $p = (t - y_1 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha)/\gamma$, получим

$$\begin{aligned} \Psi_\gamma^y(s, \alpha) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(s - p\gamma - y_1 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha) \gamma^{-1} \psi(p, \alpha) dp, \\ &= \frac{1}{2} \gamma^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} \left(\frac{s - y_1 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha}{\gamma} - p \right) \psi(p, \alpha) dp. \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место формула

$$(18) \quad \Psi_\gamma^y(s, \alpha) = \gamma^{-1} \Psi \left(\frac{s - y_1 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha}{\gamma}, \alpha \right).$$

4. АЛГОРИТМЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДВУМЕРНОЙ ВЕКТОРНОЙ ТОМОГРАФИИ

4.1. Алгоритм покомпонентного восстановления векторных полей. Алгоритм основан на формулах (8). Опишем подробно особенности численной реализации предлагаемого алгоритма.

1) Дискретизация значений переменных s, α . Задавая натуральное L , получаем дискретные последовательности для переменных s, α :

$$\begin{aligned} s_j &= j\Delta s, & j &= -L+1, \dots, L-1, & \Delta s &= 1/L; \\ \alpha_k &= k\Delta \alpha, & k &= 0, \dots, 2L-1, & \Delta \alpha &= \pi/L. \end{aligned}$$

Задание s_j, α_k означает фиксацию прямой L_{ξ_k, s_j} , по которой ведется интегрирование. Здесь $\xi_k = (\cos \alpha_k, \sin \alpha_k)$ — вектор ортогональный прямой L_{ξ_k, s_j} . В численных экспериментах использовались дискретизации 128×128 , 256×256 , 512×512 по (s, α) .

2) Вычисление интегралов по прямым. Интегралы по прямым $L_{\xi, s}$ могут быть вычислены аналитически или численно. Эта часть является основой для следующих этапов алгоритма восстановления векторного поля, и поэтому при численном вычислении интегралов расчеты проводились с высокой степенью точности. При вычислении продольного (2) и поперечного (3) лучевых преобразований восстанавливаемого векторного поля, заключающемся в интегрировании по прямой, использовалась пятиточечная квадратурная формула

Ньютона-Котеса закрытого типа

$$(19) \quad \int_{t_0}^{t_4} f(t) dt \approx \frac{\Delta t}{45} (14 f(t_0) + 64 f(t_1) + 24 f(t_2) + 64 f(t_3) + 14 f(t_4)).$$

На каждом шаге вычисления лучевых преобразований контролировалось условие выхода луча за пределы круга B .

3) Построение функций ψ_γ^y . Для построения молифаеров использовалась функция Гаусса

$$(20) \quad e_G(x) = \frac{1}{2\pi} \exp(-|x|^2/2),$$

для которой решение уравнения $\mathcal{R}^*\psi = e$ имеет вид

$$(21) \quad \psi_G(s, \alpha) = \psi_G(s) = \frac{1}{2\pi^2} \left(1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} s \exp(-s^2/2) \operatorname{erf}(is/\sqrt{2}) \right),$$

где $\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp(-z^2) dz$ — функция ошибок. Формула (21) получена в работе [28]. При численной реализации формула (21) использовалась в виде без мнимой единицы

$$\psi_G(s) = \frac{1}{2\pi^2} \left(1 - \sqrt{2} s D \left(\frac{s}{\sqrt{2}} \right) \right),$$

где $D(t) = \exp(-t^2) \int_0^t \exp(z^2) dz$ — интеграл Доусона (см., например, [34] стр. 295). Значения функций $\psi_{G,\gamma}^y(s, \alpha)$ вычислялись с использованием формулы (6).

4) Вычисление скалярных произведений. Скалярные произведения в пространстве $L_2(Z)$, участвующие в формулах (8), вычислялись с использованием квадратурной формулы (19) по каждой из переменных s, α .

4.2. Алгоритм восстановления потенциалов векторных полей. Остановимся на особенностях численной реализации алгоритма, основанного на формулах (16) и (17).

1)-2) Дискретизация значений переменных s, α и вычисление интегралов по прямым проводились аналогично с одноименными этапами реализации алгоритма покомпонентного восстановления векторного поля.

3) Построение функций Ψ_γ^y . Для построения молифаеров использовалась функция Гаусса (20). Значения функций $\Psi_{G,\gamma}^y(s, \alpha)$ вычислялись с использованием формул (15) и (18).

4) Вычисление скалярных произведений. Для восстановления потенциалов $\varphi^{(0)}$ и $\varphi^{(1)}$ векторного поля $\mathbf{v}$ использовались формулы (16) и (17), скалярные произведения в которых вычислялись с использованием квадратурной формулы (19) по каждой из переменных s, α .

5) Вычисление значений соленоидальной и потенциальной частей векторного поля $\mathbf{v}$. Применение дифференциальных операторов d и $d^\perp$ для восстановления соленоидальной $d^\perp \varphi^{(0)}$ и потенциальной $d\varphi^{(1)}$ частей векторного поля $\mathbf{v}$ осуществлялось с использованием центральной разностной схемы

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t_m) \approx \frac{f(t_{m+1}) - f(t_{m-1}))}{t_{m+1} - t_{m-1}}.$$

5. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В данном разделе приводятся описания и результаты численных экспериментов. Исходными данными в тестах являются значения функций $[Pw](s, \alpha)$ и $[P^\perp w](s, \alpha)$, вычисленные в узлах сетки при различных дискретизациях по переменным s, α .

Проведена серия численных экспериментов по исследованию влияния на относительную погрешность (% в норме $L_2(S^1(B))$) восстановления векторного поля таких факторов, как гладкость восстанавливаемого поля, дискретизация входных данных, значение параметра регуляризации γ , уровень и характер вносимого в исходные данные шума. Относительная погрешность восстановления векторного поля вычислялась по формуле

$$\frac{\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_\delta\|_{L_2(S^1(B))}}{\|\mathbf{v}\|_{L_2(S^1(B))}} \cdot 100\%,$$

где $\mathbf{v}$ — восстанавливаемое векторное поле, а $\mathbf{v}_\delta$ — его аппроксимация.

Для восстановления каждого из модельных векторных полей использовались оба предлагаемых алгоритма. Для краткости алгоритм покомпонентного восстановления векторного поля будем называть “Алгоритм I”, а алгоритм восстановления потенциалов векторного поля — “Алгоритм II”.

Тест 1. Первый эксперимент поставлен с целью исследования зависимости относительной погрешности восстановления векторного поля от дискретизации входных данных по s, α и параметра регуляризации γ . Восстанавливалось векторное поле $\mathbf{v} = d^\perp \varphi^{(1)} + d\varphi^{(2)}$ с гладкими потенциалами

$$\varphi^{(1)}(x) = \begin{cases} \exp(-20((x_1 - 0.2)^2 + (x_2 - 0.2)^2))(1 - |x|^2), & |x| < 1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\varphi^{(2)}(x) = \begin{cases} \exp(-25((x_1 + 0.2)^2 + x_2^2))(1 - |x|^2), & |x| < 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В Таблице 1 приведены величины относительной погрешности восстановления тестового поля двумя алгоритмами. Использовались дискретизации 128×128 , 256×256 и 512×512 ; значения параметра γ — 0.005, 0.01, 0.02, 0.04 и 0.08.

Алгоритм, $s \times \alpha$	γ	0.005	0.01	0.02	0.04	0.08
Алгоритм I, 128×128		> 100	83.34	3.08	8.68	28.49
Алгоритм II, 128×128		56.85	12.00	3.73	9.90	29.32
Алгоритм I, 256×256		> 100	2.76	2.29	8.68	28.49
Алгоритм II, 256×256		8.57	2.08	3.68	9.90	29.32
Алгоритм I, 512×512		4.02	0.58	2.29	8.68	28.49
Алгоритм II, 512×512		1.65	2.04	3.68	9.90	29.32

ТАБЛИЦА 1. Влияние параметра γ и дискретизации входных данных на относительную погрешность восстановления (в %).

Проведенный численный эксперимент позволяет сделать следующие выводы (выводы 1–3 общие для обоих алгоритмов): 1) При фиксированном γ увеличение дискретизации ведет к уменьшению погрешности восстановления с ее последующей стабилизацией. 2) При фиксированном значении дискретизации

входных данных уменьшение параметра γ ведет к уменьшению погрешности восстановления до некоторого минимального значения (при оптимальном γ_{opt}), после которого погрешность восстановления увеличивается. 3) При увеличении дискретизации входных данных значение γ_{opt} не увеличивается, а погрешность восстановления при γ_{opt} уменьшается. 4) При фиксированной дискретизации входных данных Алгоритмы I и II показали близкую точность восстановления при соответствующих γ_{opt} .

Тест 2. Следующая серия экспериментов направлена на исследование возможности и качества восстановления разрывных векторных полей. Восстанавливалось векторное поле $\mathbf{u} = d^\perp \varphi^{(3)} + d\varphi^{(4)}$ с разрывными компонентами, порожденное потенциалами

$$\varphi^{(3)}(x) = \begin{cases} \sin(5\pi|x|), & |x| < 0.8, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\varphi^{(4)}(x) = \begin{cases} 2\sin(2.5\pi|x|), & |x| < 0.8, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

На Рис. 1 показаны потенциалы $\varphi^{(3)}$ (а), $\varphi^{(4)}$ (г) и компоненты соответствующих им полей $d^\perp \varphi^{(3)}$ (б, в) и $d\varphi^{(4)}$ (д, е).

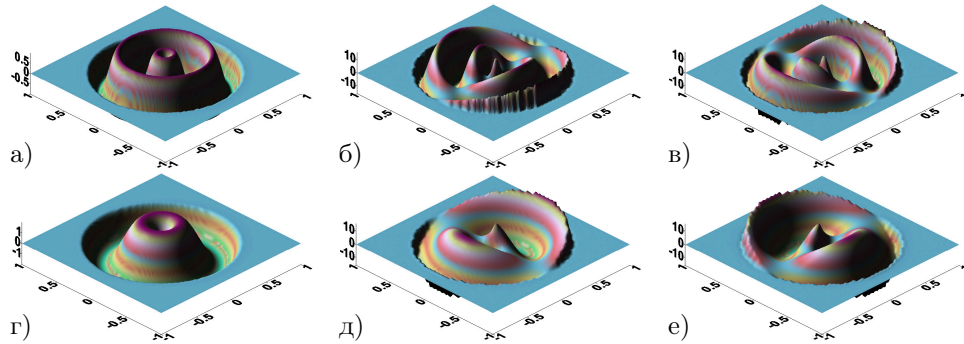


РИС. 1. Потенциалы $\varphi^{(3)}$ (а), $\varphi^{(4)}$ (г) и компоненты соответствующих им векторных полей $d^\perp \varphi^{(3)}$ (б, в) и $d\varphi^{(4)}$ (д, е).

При восстановлении векторного поля $\mathbf{u}$ использовалась дискретизация 256×256 по s, α . На Рис. 2 приведены компоненты тестового поля $\mathbf{u}$ (а, б) и компоненты его лучших аппроксимаций с использованием Алгоритма I (в, г) ($\gamma_{\text{opt}} = 0.01$, погрешность 10.8%) и Алгоритма II (д, е) ($\gamma_{\text{opt}} = 0.01$, погрешность 16.2%). Несмотря на большую погрешность восстановления рисунки хорошо передают характер поведения компонент тестового векторного поля.

Тест 3. Последняя серия экспериментов поставлена с целью исследования зависимости относительной погрешности восстановления векторного поля от параметра регуляризации γ и уровня и характера вносимого в исходные данные шума. Восстанавливалось векторное поле $\mathbf{w} = d^\perp \varphi^{(5)} + d\varphi^{(6)}$ с C^2 -гладкими

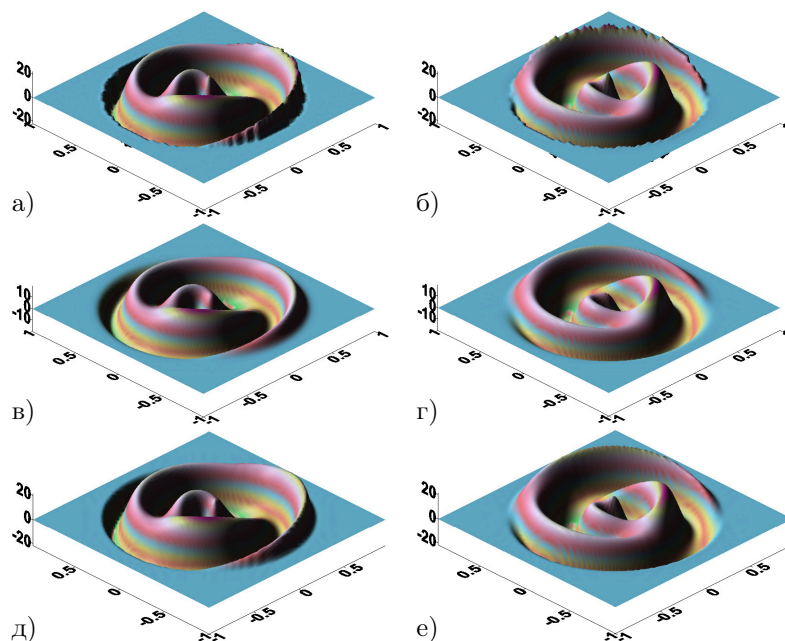


РИС. 2. Компоненты тестового поля $\mathbf{u}$ (а, б) и компоненты его лучших аппроксимаций с использованием Алгоритма I (в, г) и Алгоритма II (д, е).

компонентами и потенциалами

$$\varphi^{(5)}(x) = \begin{cases} -((x_1^2 + 2x_2^2 - 0.81)(x_1^2 + 2x_2^2 - 0.25))^3, & 0.25 < x_1^2 + 2x_2^2 < 0.81, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\varphi^{(6)}(x) = \begin{cases} (0.09 - (x_1 - 0.1)^2 - x_2^2)^3, & (x_1 - 0.1)^2 + x_2^2 < 0.09, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

При восстановлении векторного поля $\mathbf{w}$ использовалась дискретизация 256×256 по s, α . В Таблицах 2 и 3 приведены значения относительной погрешности восстановления тестового поля при разном уровне равномерно и нормально распределенного шума, соответственно. Для всех типов и уровней используемых шумов минимальная погрешность восстановления достигалась, когда параметр γ принимал значения 0.01 или 0.02, поэтому результаты восстановления приведены только для этих γ .

Алгоритм, γ	Уровень шума				
	0%	5%	10%	15%	20%
Алгоритм I, $\gamma = 0.01$	3.8	7.79	14.12	20.74	27.45
Алгоритм II, $\gamma = 0.01$	11.18	11.59	12.62	14.13	15.99
Алгоритм I, $\gamma = 0.02$	11.61	11.92	12.68	13.84	15.3
Алгоритм II, $\gamma = 0.02$	17.69	17.81	18.09	18.51	19.07

ТАБЛИЦА 2. Влияние шума с равномерным распределением на относительную погрешность восстановления (в %).

Алгоритм, γ \ Уровень шума	0%	0.5%	1%	1.5%	2%
Алгоритм I, $\gamma = 0.01$	3.8	10.56	19.44	28.28	37
Алгоритм II, $\gamma = 0.01$	11.18	11.99	13.83	16.28	19.07
Алгоритм I, $\gamma = 0.02$	11.61	12.26	13.69	15.64	17.91
Алгоритм II, $\gamma = 0.02$	17.69	17.96	18.5	19.28	20.26

ТАБЛИЦА 3. Влияние шума с нормальным распределением на относительную погрешность восстановления (в %).

Из таблиц видно, что при внесении шума с равномерным распределением минимальная относительная погрешность восстановления остается в пределах 15%, даже при уровне шума 20%. В то время как при внесении шума с нормальным распределением аналогичная погрешность достигается уже при небольшом (1.5%) уровне шума. При внесении различных типов и уровней шумов для Алгоритма II $\gamma_{\text{opt}} = 0.01$, в то время как для Алгоритма I с ростом уровня шума увеличивается и γ_{opt} , с 0.01 до 0.02.

На Рис. 3 приведены первая компонента w_1 тестового поля $\mathbf{w}$ (а) и первые компоненты его лучших аппроксимаций без внесения шума с использованием Алгоритма I (б) ($\gamma_{\text{opt}} = 0.01$, погрешность 3.8%) и Алгоритма II (в) ($\gamma_{\text{opt}} = 0.01$, погрешность 11.18%); при внесении шума с равномерным распределением уровня 20% с использованием Алгоритма I (г) ($\gamma_{\text{opt}} = 0.02$, погрешность 15.3%) и Алгоритма II (д) ($\gamma_{\text{opt}} = 0.01$, погрешность 15.99%); при внесении шума с нормальным распределением уровня 2% с использованием Алгоритма I (е) ($\gamma_{\text{opt}} = 0.02$, погрешность 17.91%) и Алгоритма II (ж) ($\gamma_{\text{opt}} = 0.01$, погрешность 19.07%). Несмотря на большую погрешность восстановления рисунки хорошо передают характер поведения тестового векторного поля.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе численно решалась задача восстановления двумерного векторного поля по известным значениям продольного и (или) поперечного лучевого преобразования в среде без рефракции. Для решения задачи разработаны два алгоритма, основанные на методе приближенного обращения. При использовании Алгоритма I векторное поле восстанавливается покомпонентно, в то время как при использовании Алгоритма II восстанавливаются потенциалы потенциальной и соленоидальной частей векторного поля с последующим применением дифференциальных операторов.

На основе проведенных численных экспериментов по восстановлению векторных полей можно сделать следующие предварительные выводы:

1) При увеличении степени гладкости компонент восстанавливаемого векторного поля относительная погрешность значительно уменьшается. Наибольшая ошибка наблюдается при восстановлении разрывных полей, что и не удивительно.

2) Увеличение количества исходных данных позволяет улучшить точность восстановления двумерного векторного поля. Кроме того, с увеличением количества исходных данных уменьшается значение параметра γ , при котором

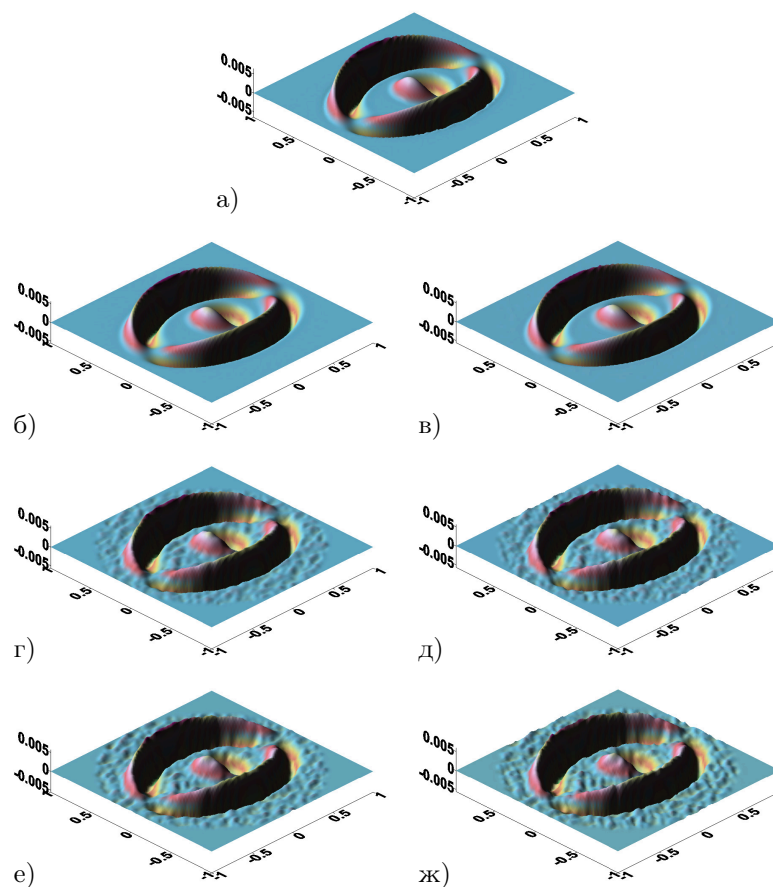


РИС. 3. Первая компонента w_1 тестового поля $\mathbf{w}$ (а) и первые компоненты его лучших аппроксимаций без внесения шума с использованием Алгоритма I (б) и Алгоритма II (в); при внесении шума с равномерным распределением уровня 20% с использованием Алгоритма I (г) и Алгоритма II (д); при внесении шума с нормальным распределением уровня 2% с использованием Алгоритма I (е) и Алгоритма II (ж).

погрешность наименьшая. Этот эффект объясняется тем, что увеличение дискретизации ведет к уменьшению погрешности при вычислении скалярных произведений в пространстве образов.

3) При использовании точных исходных данных относительная погрешность восстановления Алгоритмом I меньше по сравнению с Алгоритмом II. Особенно явно это преимущество видно при восстановлении разрывных полей. Данное обстоятельство можно объяснить тем, что при численной реализации Алгоритма II необходимо использование процедуры численного дифференцирования.

4) При внесении шума с равномерным распределением минимальная относительная погрешность восстановления остается в пределах 15%, даже при

уровне шума 20%. При внесении же шума с нормальным распределением аналогичная погрешность достигается уже при небольшом уровне шума (1.5%). При одинаковом характере и уровне внесенного в исходные данные шума относительная погрешность восстановления Алгоритмом I меньше чем для Алгоритма II.

5) При фиксированной дискретизации входных данных 256×256 оптимальное значение параметра γ менялось незначительно ($0.01 - 0.02$) независимо от используемого алгоритма, гладкости тестового поля, характера и уровня вносимого шума.

6) Даже при большой погрешности восстановления рисунки аппроксимаций при использовании обоих алгоритмов хорошо передают характер поведения компонент тестовых векторных полей.

REFERENCES

- [1] S.J. Norton, *Tomographic reconstruction of 2-D vector fields: application to flow imaging*, Geophysical Journal International, **97**:1 (1989), 161–168. Zbl 0679.76092
- [2] S.A. Johnson, J.F. Greenleaf, M. Tanaka, G. Flandro, *Reconstructing three-dimensional temperature and fluid velocity vector fields from acoustic transmission measurements*, ISA Transactions, **16**:3 (1977), 3–15.
- [3] J.L. Kinsey, *Fourier transform Doppler spectroscopy: A new means of obtaining velocity — angle distributions in scattering experiments*, Journal of Chemical Physics, **66**: 6 (1977), 2560–2565.
- [4] R. Koslover, R. McWilliams, *Measurement of multidimensional ion velocity distributions by optical tomography*, Review of Scientific Instruments, **57**:10 (1986), 2441–2448.
- [5] V.V. Pikalov, T.S. Melnikova, *Plasma tomography*, Novosibirsk, Nauka, 1995. (in Russian)
- [6] N.P. Poluektov, N.P. Efremov, *New tomographic approach for deconvolution of ion velocity and temperature profiles in a plasma centrifuge*, Journal of Physics D: Applied Physics, **31**:8 (1998), 988–995.
- [7] P.J. Basser, *Relationships between diffusion tensor and q-space MRI*, Magnetic Resonance in Medicine, **47**:2 (2002), 392–397.
- [8] S.P. Juhlin, *Doppler tomography*, Proc. 15th Annual Intern. Conf. IEEE, EMBS, (1993), 212–213.
- [9] G. Sparr, K. Strahlen, K. Lindstrom, H.W. Persson, *Doppler tomography for vector fields*, Inverse Problems, **11** (1995), 1051–1061. Zbl 0836.44003
- [10] T. Schuster, *20 years of imaging in vector field tomography: a review*, In Mathematical Methods in Biomedical Imaging and Intensity-Modulated Radiation Therapy (IMRT), Y. Censor, M. Jiang, A. K. Louis (Eds.), Series: Publications of the Scuola Normale Superiore, CRM Series, Birkhäuser, **7** (2008), 389–424.
- [11] M. Defrise, G.T. Gullberg *3D-reconstruction of tensors and vectors*, Technical Report No. LBNL-54936, Berkeley: LBNL, 2005.
- [12] V.A. Sharafutdinov, *Integral Geometry of Tensor Fields*, VSP, Utrecht, 1994. Zbl 0883.53004
- [13] I.E. Svetov, *Reconstruction of the solenoidal part of a three-dimensional vector field by its ray transforms along straight lines parallel to coordinate planes*, Numerical Analysis and Applications, **5**:3 (2012), 271–283. Zbl 1299.65296
- [14] I.E. Svetov, *Slice-by-slice numerical solution of 3D-vector tomography problem*, Journal of Physics: Conference Series, **410** (2013), art. no 012042.
- [15] E.Yu. Derevtsov, I.E. Svetov, *Tomography of tensor fields in the plain*, Eurasian journal of mathematical and computer application, **3**:2 (2015), 24–68.
- [16] I.E. Svetov, *Inversion formulas for recovering the harmonic 2D-vector field by known ray transforms*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **12** (2015), 436–446. (in Russian) Zbl 06607146
- [17] E.Yu. Derevtsov, I.G. Kashina, *Numerical solution of a vector tomography problem with the help of polynomial bases*, Siberian Journal of Numerical Mathematics, **5**:3 (2002), 233–254. (in Russian) Zbl 1027.65176

- [18] E.Yu. Derevtsov, I.E. Svetov, Yu.S. Volkov, T. Schuster, *Numerical B-spline solution of emission and vector 2D-tomography problems for media with absorption and refraction*, Proceedings 2008 IEEE Region 8 International Conference on Computational Technologies in Electrical and Electronics Engineering SIBIRCON-08, Novosibirsk Scientific Center, Novosibirsk, Russia, July 21–25 (2008), 212–217.
- [19] I.E. Svetov, A.P. Polyakova, *Comparison of two algorithms for the numerical solution of the two-dimensional vector tomography*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **10** (2013), 90–108 (in Russian). Zbl 1330.65208
- [20] I.E. Svetov, E.Yu. Derevtsov, Yu.S. Volkov, T. Schuster, *A numerical solver based on B-splines for 2D vector field tomography in a refracting medium*, Mathematics and Computers in Simulation, **97** (2014), 207–223.
- [21] E.Yu. Derevtsov, S.G. Kazantsev, T. Schuster, *Polynomial bases for subspaces of vector fields in the unit ball. Method of ridge functions*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **15**:1 (2007), 1–38. Zbl 1124.33015
- [22] E.Yu. Derevtsov, A.V. Efimov, A.K. Louis, T. Schuster, *Singular value decomposition and its application to numerical inversion for ray transforms in 2D vector tomography*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **19**:4–5 (2011), 689–715. Zbl 1279.33015
- [23] A.P. Polyakova, *Reconstruction of a vector field in a ball from its normal radon transform*, Journal of Mathematical Sciences, **205**:3 (2015), 418–439. Zbl 06605599
- [24] A.P. Polyakova, I.E. Svetov, *Numerical Solution of the Problem of Reconstructing a Potential Vector Field in the Unit Ball from Its Normal Radon Transform*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **9**:4 (2015), 547–558.
- [25] A.K. Louis, *Inverse und schlecht gestellte Probleme*, Teubner, Stuttgart, 1989. Zbl 0667.65045
- [26] A.K. Louis, P. Maass, *A mollifier method for linear operator equations of the first kind*, Inverse Problems, **6** (1990), 427–440. Zbl 0713.65040
- [27] A.K. Louis, *Approximate inverse for linear and some nonlinear problems*, Inverse Problems, **12** (1996), 175–190.
- [28] A. Rieder, T. Schuster, *The Approximate Inverse in Action with an Application to Computerized Tomography*, SIAM Journal on Numerical Analysis, **37**:6 (2000), 1909–1929. Zbl 0961.65112
- [29] A. Rieder, T. Schuster, *The Approximate Inverse in Action III: 3D-Doppler tomography*, Numerische Mathematik, **97** (2004), 353–378. Zbl 1071.65178
- [30] T. Schuster, *Defect correction in vector field tomography: detecting the potential part of a field using BEM and implementation of the method*, Inverse Problems, **21** (2005), 75–91. Zbl 1078.65123
- [31] E.Yu. Derevtsov, *An approach of direct reconstruction of a solenoidal part in vector and tensor tomography problems*, Journal Inverse Ill-Posed Problems, **13**:3 (2005), 213–246. Zbl 1098.53011
- [32] N.E. Kochin, *Vector Calculus and Fundamentals of Tensor Calculus*, ONTI, Gos. tekhniko-teoreticheskoe izd., Leningrad, Moscow, 1934. (in Russian)
- [33] I. Sneddon, *Fourier transforms*, McGraw-Hill, New York, 1951.
- [34] M. Abramowitz, I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1972. Zbl 0543.33001

IVAN EVGENYEVICH SVETOV
 SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
 PR. KOPTYUGA, 4,
 630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
 NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
 ST. PIROGOVA, 2
 630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
 E-mail address: svetovie@math.nsc.ru

SVETLANA VASILIEVNA MALTSEVA
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
PR. KOPTYUGA, 4,
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
ST. PIROGOVA, 2
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
LAVRENTYEV INSTITUTE OF HYDRODYNAMICS,
PR. LAVRENTYEVA, 15,
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
E-mail address: `maltsevasv@math.nsc.ru`

ANNA PETROVNA POLYAKOVA
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
PR. KOPTYUGA, 4,
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
NOVOSIBIRSK STATE UNIVERSITY,
ST. PIROGOVA, 2
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
E-mail address: `apolyakova@math.nsc.ru`