S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 624–634 (2016) УДК 517.51
DOI 10.17377/semi.2016.13.049 MSC 46E35

О ГЕЛЬДЕРОВОСТИ СОБОЛЕВСКИХ ФУНКЦИЙ НА ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ

А.С.РОМАНОВ

Abstract. We discuss some of the problems associated with the Holder continuity of traces of Sobolev functions on hypersurfaces.

Keywords: Sobolev space, embedding theorem, Hausdorff measure, p-module.

В работе [1] рассматривались вопросы, связанные с непрерывностью соболевских функций из пространств $W_p^1(R^n)$ на семействах гиперплоскостей ортогональных фиксированному направлению. При показателях суммируемости $p > n-1$ в терминах меры Хаусдорфа были получены оценки исключительных семейств «плохих» гиперплоскостей, на которых для фиксированной функции $u \in W_p^1(R^n)$ может не выполняться условие Гельдера с показателем $\alpha \leq 1 - \dfrac{n-1}{p}$. В данной работе изучаются аналогичные вопросы только вместо семейств гиперплоскостей ортогональных фиксированному направлению рассматриваются семейства произвольных липшицевых гиперповерхностей, а оценки исключительных семейств гиперповерхностей получаются в терминах соответствующих модулей.

При $d > 0$ символом H^d будем обозначать d-меру Хаусдорфа [2], для n-мерной меры Лебега будем использовать обозначения H^n и m_n, а через ω_n обозначим меру Лебега единичного n-мерного шара. Для теорем, лемм и утверждений мы будем использовать единую сквозную нумерацию.

Romanov, A.S., The Holder continuity of Sobolev functions on the hypersurfaces.

Работа поддержана РФФИ (грант - 14-01-00552-а).

Поступила 3 марта 2016, опубликована 13 августа 2016.

I. Некоторые свойства соболевских функций

Нам удобнее рассматривать соболевские функции класса W_p^1 на единичном кубе $Q \subset R^n$. С одной стороны, для всякой функции $u \in W_p^1(R^n)$ ее сужение $u|_Q$ принадлежит пространству Соболева $W_p^1(Q)$, с другой стороны, всякая функция $v \in W_p^1(Q)$ может быть продолжена до функции $\tilde{v}$, определенной во всем евклидовом пространстве R^n и принадлежащей пространству Соболева $W_p^1(R^n)$. Поэтому интересующие нас метрические свойства соболевских функций на всем евклидовом пространстве и на кубе будут одинаковы.

Мы не будем повторять рассуждения работы [1], но отметим нужные нам факты.

Для всякой функции $u \in W_p^1(Q)$ ее класс эквивалентности содержит уточненную функцию $\tilde{u}$, однозначно определенную вне некоторого множества нулевой $(1,p)$-емкости [2, 3]. При $p > n$ нулевую $(1,p)$-емкость имеет только пустое множество, поэтому уточненная функция $\tilde{u} \in W_p^1(Q)$ однозначно определена всюду и согласно классической соболевской теореме вложения является непрерывной [4]. Из оценки емкости через меру Хаусдорфа следует, что при $p > 1$ уточненная функция $\tilde{u} \in W_p^1(Q)$ будет однозначно определена H^{n-1} почти всюду на произвольной липшицевой гиперповерхности $S \subset Q$. Говоря далее о свойствах соболевской функции, мы всегда будем предполагать, что эта функция является уточненной.

При $n < p < \infty$ функция $u \in W_p^1(Q)$ не только является непрерывной, но для нее верны и более точные результаты [2]:

1. **Неравенство Морри**

$$|u(x) - u(y)| \le Cr \left(\fint_{B(x,r)} |\nabla u|^p \, dm_n \right)^{1/p}, \tag{1}$$

где $u \in W_p^1(Q), x, y \in B(a,r) \subset Q$;

2. *Функция u удовлетворяет условию Гельдера с показателем* $\alpha_p = 1 - \dfrac{n}{p}$.

При $p \to n+0$ показатель гельдеровости α_p стремится к нулю. В предельном случае $p = n$ пространство Соболева $W_p^1(Q)$ содержит функции, имеющие неустранимые разрывы. Довольно тонкий результат связан с абсолютной непрерывностью соболевских функций.

Принадлежность функции u пространству Соболева-Лоренца $W_{n,1}^1(G)$ в области $G \subset R^n$ определим условиями: $u \in L_n(G)$, функция u имеет обобщенные производные первого порядка и $|\nabla u| \in L_{n,1}(G)$, где $L_{n,1}(G)$ – пространство Лоренца [5]. Отметим, что для ограниченной области $G \subset R^n$ при всех $p > n$ выполняются включения

$$W_p^1(G) \subset W_{n,1}^1(G) \subset W_n^1(G). \tag{2}$$

Функцию u определенную в области $G \subset R^n$ будем называть s-абсолютно непрерывной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всякой системы непересекающихся шаров $\{B_k \subset G\}$ из неравенства $\sum\limits_k m_n(B_k) < \delta$ следует

$$\sum_k (osc_{B_k} u)^s < \varepsilon.$$

Согласно результатам работы [6] всякая функция $u \in W^1_{n,1}(G)$ является n-абсолютно непрерывной.

При увеличении показателя суммируемости p показатель гельдеровости α_p тоже увеличивается. Возникает вполне естественный вопрос о взаимосвязи между показателем суммируемости p и показателем абсолютной непрерывности s. Из соотношения (2) следует, что при всех $p > n$ произвольная функция $u \in W^1_p(G)$ является n-абсолютно непрерывной. Может ли показатель абсолютной непрерывности быть меньшим чем n?

При $0 < s \le n$ можно непосредственно получить оценки, используя неравенство Морри и неравенство Гельдера. Пусть $p > n$, $\dfrac{1}{q} = s\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{p}\right)$, $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$. При $0 < s \le n$ значение $q > 1$.

Рассмотрим систему непересекающихся шаров $\{B_k = B(a_k, r_k)\}$ и, учитывая оценку (1), получим

$$\sum_k (osc_{B_k}\, u)^s \le C_1 \sum_k r_k^s \left(\fint_{B_k} |\nabla u|^p\, dm_n \right)^{s/p} =$$

$$C_1 \sum_k r_k^{n/q} \left(\int_{B_k} |\nabla u|^p\, dm_n \right)^{s/p} \le$$

$$C_1 \left(\sum_k r^n \right)^{1/q} \cdot \left(\sum_k \left(\int_{B_k} |\nabla u|^p\, dm_n \right)^{sq'/p} \right)^{1/q'} =$$

$$C_2 \left(\sum_k m_n(B_r) \right)^{1/q} \cdot \left(\sum_k \left(\int_{B_k} |\nabla u|^p\, dm_n \right)^{sq'/p} \right)^{1/q'}. \tag{3}$$

При $s = n$ получаем $\dfrac{sq'}{p} = 1$ и последнюю сумму в (3) можно оценить через $\|\, |\nabla u|; L_p\|^{p/q'}$. При $s < n$ легко проверить, что $\dfrac{sq'}{p} < 1$, поэтому мы не можем гарантировать конечность последней суммы в (3) для всех функций $u \in W^1_p(G)$. Это, конечно, не является доказательством, но приводит к предположению, что при всех $p > n$ для всего класса функций $W^1_p(G)$ наилучший показатель абсолютной непрерывности равен размерности евклидова пространства, т.е. $s = n$. Убедиться в этом несколько неожиданном факте позволяет довольно простой пример.

Пример. Рассмотрим область $G \subset R^n$, последовательность непересекающихся шаров $B_k = B(b_k, r_k) \subset G$, последовательность положительных чисел $\{a_k\}$ и функции

$$u_k(x) = \begin{cases} a_k \left(1 - \dfrac{|x - b_k|}{r_k}\right), & \text{если } x \in B_k \\ 0, & \text{если } x \notin B_k. \end{cases}$$

Носители функций u_k расположены в замкнутых шарах $\overline{B_k}$. Легко находятся нормы этих функций

$$\|u_k; L_p^1\|^p = \|\nabla u_k; L_p\|^p = \omega_n a_k^p r_k^{n-p}.$$

Для функции $u(x) = \sum\limits_k u_k(x)$ получаем

$$\|u; L_p^1\|^p = \sum_k \|u_k; L_p^1\|^p = \omega_n \sum_k a_k^p r_k^{n-p}.$$

Пусть $0 < s < n < p$ и

$$0 < \varepsilon < \frac{p(n-s)}{ns},\ \gamma = \frac{p-s-\varepsilon s}{s(p-n)}.$$

Заметим, что

$$\gamma - \frac{1}{n} = \frac{p(n-s) - \varepsilon ns}{ns(p-n)} > 0,$$

следовательно $\gamma > \dfrac{1}{n}$.

Положим

$$a_k = \left(\frac{1}{k}\right)^{1/s},\ r_k = \left(\frac{1}{k}\right)^{\gamma}.$$

Получаем

$$\|u; L_p^1\|^p = \omega_n \sum_k a_k^p r_k^{n-p} = \omega_n \sum_k \frac{1}{k^{1+\varepsilon}} < \infty.$$

Поскольку $\|u_k; L_p\|^p \le \omega_n a_k^p r_k^n \le \|u_k; L_p^1\|^p$, то функция u принадлежит пространству Соболева $W_p^1(G)$, где $G \supset \bigcup\limits_k B_k$.

При выбранных условиях на параметры $n\gamma > 1$, поэтому

$$\sum_k m_n(B_k) = \omega_n \sum_k r_k^n = \omega_n \sum_k \frac{1}{k^{n\gamma}} < \infty. \tag{4}$$

При этом

$$\sum_k (osc_{B_k} u)^s = \sum_k a_k^s = \sum_k \frac{1}{k}. \tag{5}$$

Поскольку ряд (4) сходится, то для любого $\delta > 0$ можно выбрать номер m так, что

$$\sum_{k=m}^{\infty} m_n(B_k) < \delta,$$

при этом, в силу расходимости ряда (5),

$$\sum_{k=m}^{\infty} (osc_{B_k} u)^s = \infty.$$

Это доказывает, что ни при каком $s < n$ функция u не будет s-абсолютно непрерывной.

При $p \le n$ пространство Соболева $W_p^1(Q)$ содержит разрывные функции. Произвольная точка $x \in Q$ может быть точкой разрыва некоторой функции $u \in W_p^1(Q)$, но для фиксированной функции множество точек разрыва имеет нулевую d-меру Хаусдорфа, где $d < n$ и существенным образом зависит от показателя суммируемости p. Хорошо известно, что при $p > n-1$ всякая функция $u \in W_p^1(Q)$ непрерывна на почти всех сферах с центром в фиксированной точке и на почти всех гиперплоскостях ортогональных фиксированному направлению. Более точные результаты, касающиеся свойств следов соболевских функции на семействах гиперплоскостей, получены в работе [1].

Хаусдорфова размерность семейства исключительных "плохих" гиперплоскостей, на которых соболевская функция не удовлетворяет условию Гельдера с показателем α, зависит от показателя суммируемости p и показателя гельдеровости α.

Далее для сечения куба Q гиперплоскостью $x_n = t$ будем использовать обозначение Q_t.

Утверждение 1 [1]**.** *Пусть* $0 < d < 1, n-d < p < n$ *и* $\alpha < \alpha_{p,d} = 1 - \dfrac{n-d}{p}$. *Тогда для всякой функции* $u \in W_p^1(Q)$ *ее след* $u|_{Q_t}$ *принадлежит пространству Гельдера* $C^\alpha(Q_t)$ *при* H^d *почти всех* $t \in (-1,1)$.

Для предельного показателя гельдеровости в утверждении 1 приходится предполагать дополнительное условие на множество значений параметра t. Множество $E \subset R^n$ называют d-множеством, если существует такая мера μ, что для всякого шара $B(x,r)$ с центром $x \in E$ и радиуса $r \leq diam(E)$ выполняется оценка

$$C_1 r^d \leq \mu(E \cap B(x,r)) \leq C_2 r^d, \quad 0 < C_1 \leq C_2, \infty.$$

Утверждение 2 [1]**.** *Пусть* $0 < d < 1$, d*-множество* $E \subset (-1,1)$, $n-d < p < n$ *и* $\alpha_{p,d} = 1 - \dfrac{n-d}{p}$. *Тогда для всякой функции* $u \in W_p^1(Q)$ *ее след* $u|_{Q_t}$ *принадлежит пространству Гельдера* $C^\alpha(Q_t)$ *при* H^d *почти всех* $t \in E$.

Нашей целью является получение аналогичных результатов для следов соболевских функций на липшицевых гиперповерхностях. Можно различными способами определить соболевские классы функций на липшицевых поверхностях, но для получения нужных нам оценок удобнее воспользоваться классами функций, введенными П. Хайлашем.

II. Пространства соболевского типа на липшицевых гиперповерхностях

Классы функций соболевского типа M_p^1 появились впервые в работе П. Хайлаша [7]. Несмотря на двадцатилетнюю историю пространства M_p^1, конечно же, существенно менее известны чем классические пространства Соболева. Для нас эти функциональные классы играют вспомогательную роль, поэтому мы дадим основные определения и ограничимся изложением основных нужных нам результатов в удобной для наших целей формулировке.

Пусть (X,ρ) – метрическое пространство с конечным диаметром, а μ – регулярная борелевская мера с носителем в множестве X. Для произвольной μ -измеримой функции $u : X \to \overline{R}$ функцию $g : X \to [0,\infty)$ будем называть допустимой, если существует такое множество $E \subset X$, что $\mu(E) = 0$ и неравенство

$$|u(x) - u(y)| \leq \rho(x,y)(g(x) + g(y)) \tag{6}$$

выполняется для всех точек $x, y \in X \setminus E$.

Множество всех допустимых функций для функции u обозначим через $D(u)$ и при $p \geq 1$ положим $D_p(u) = D(u) \cap L_p(X, \mu)$.

Функциональные классы $S^1_p(X, \rho, \mu)$ и $M^1_p(X, \rho, \mu)$ определяются условиями:

$$S^1_p(X, \rho, \mu) = \{u : X \to \overline{R} \mid D_p(u) \neq \emptyset\},$$

$$M^1_p(X, \rho, \mu) = \{u \in L_p(X, \mu) \mid u \in S^1_p(X, \rho, \mu)\}.$$

Полунорма в пространстве $S^1_p(X, \rho, \mu)$ и норма в пространстве $M^1_p(X, \rho, \mu)$ определяются равенствами

$$||u \mid S^1_p|| = \inf_{g \in D_p(u)} ||g \mid L_p||, \quad ||u \mid M^1_p|| = ||u \mid L_p|| + ||u \mid S^1_p||.$$

В евклидовых областях $G \subset R^n$ с достаточно регулярной границей (к примеру, липшицевой) классическое пространство Соболева $W^1_p(G)$ и пространство $M^1_p(G, |*|, m_n)$, рассматриваемое относительно стандартной евклидовой метрики и меры Лебега, совпадают как множества функций, а их нормы эквивалентны [7]. В частности, $W^1_p(Q) = M^1_p(Q, |*|, m_n)$ для произвольного куба $Q \subset R^n$.

Для пространств $M^1_p(X, \rho, \mu)$ получены аналоги многих результатов, известных в евклидовом случае для классических пространств Соболева. При этом полученные в метрическом случае результаты обычно формулируются в весьма общей ситуации и в отличных от евклидовых терминах.

Нас будут интересовать свойства функций из пространств M^1_p на липшицевых гиперповерхностях.

Липшицеву гиперповерхность определим стандартным способом, следуя [8]. Пусть $D, E \subset R^n$, взаимно однозначное отображение $f : D \to E$ называют билипшицевым или квазиизометрией, если существует такая положительная постоянная $K < \infty$, что

$$K^{-1}|x' - x''| \leq |f(x') - f(x'')| \leq K|x' - x''|$$

для всех $x', x'' \in D$. Подмножество $S \subset R^n$ называют $(n-1)$-мерной липшицевой поверхностью, если для каждой точки $y \in S$ существует такая окрестность V, что множество $U = S \cap V$ квазиизометрично некоторому $(n-1)$-мерному шару $\mathbb{B} \subset R^{n-1}$. В этом определении описываются локальные свойства поверхности и, вообще говоря, показатель квазиизометричности K в различных точках может быть различным.

Далее для обозначения шаров в R^n и в R^{n-1} будем использовать соответственно символы B и $\mathbb{B}$. Отметим, что для двух шаров $\mathbb{B}(a, R)$ и $\mathbb{B}(b, r)$ при условии $b \in \mathbb{B}(a, R), r \leq 2R$ выполняется оценка

$$H^{n-1}\left(\mathbb{B}(a, R) \cap \mathbb{B}(b, r)\right) \geq C_0 r^{n-1},$$

где постоянная $C_0 > 0$ и не зависит от r.

Покажем, что множество $U = S \cap V$ является $(n-1)$-множеством. Рассмотрим точку $y \in U$, шар $B(y, r)$ $(r \leq diam(U))$ и множество $E = B(y, r) \cap U$. Пусть $x = f^{-1}(y)$ и $U = f(\mathbb{B}_0), \mathbb{B}_0 \subset R^{n-1}$. В силу квазиизометричности отображения f прообраз множества E содержит пересечение шаров $\mathbb{B}(x, K^{-1}r)$ и

$\mathbb{B}_0$. Поскольку $x \in \mathbb{B}_0$ и $K^{-1}r$ не превосходит диаметра шара $\mathbb{B}_0$, то

$$H^{n-1}\left(\mathbb{B}(x, K^{-1}r) \cap \mathbb{B}_0\right) \geq C_0(K^{-1}r)^{n-1}.$$

Учитывая искажение меры липшицевыми отображениями [2], получаем

$$H^{n-1}\left(B(y, r) \cap U\right) \geq C_0 K^{-2(n-1)} r^{n-1}.$$

Аналогичным образом получается оценка сверху. Следовательно существует такая положительная постоянная $C = C(n, K)$, что

$$C^{-1} r^{n-1} \leq H^{n-1}\left(B(y, r) \cap U\right) \leq C r^{n-1}.$$

Это означает, что множество U с евклидовой метрикой можно рассматривать как $(n-1)$-регулярное метрическое пространство, для которого выполняются результаты работ [9, 10].

III. Модули семейств гиперповерхностей

Семейство всех липшицевых гиперповерхностей в единичном кубе $Q \subset R^n$ обозначим символом Σ.

Стандартным образом определим p-модуль семейства гиперповерхностей $\Gamma \subset \Sigma$:

i) неотрицательная борелевская функция $f : Q \to \overline{R}$ называется допустимой для семейства гиперповерхностей Γ, если для всех поверхностей $S \in \Gamma$

$$\int\limits_S f\, dH^{n-1} \geq 1,$$

множество всех допустимых функций обозначим символом $D(\Gamma)$;

ii) числовое значение

$$M_p(\Gamma) = \inf_{f \in D(\Gamma)} \int\limits_Q f^p\, dH^n$$

называют p-модулем семейства гиперповерхностей Γ [8].

Непосредственно из определения видно, что из включения $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ следует неравенство $M_p(\Gamma_1) \leq M_p(\Gamma_2)$. Таким образом p-модуль в некотором смысле характеризует "размер" семейства гиперповерхностей. Вообще говоря можно определить p-модуль не только для липшицевых, но и для произвольных гиперповерхностей. Однако такие семейства, как правило, оказываются "слишком большими" и для них p-модуль оказывается неинформативным. К примеру, p-модуль семейства всех гиперповерхностей, проходящих через фиксированную точку $a \in Q$, равен бесконечности. При этом в случае $p\,(n-1) < n$ для семейства всех липшицевых гиперповерхностей, проходящих через фиксированную точку $a \in Q$, p-модуль равен нулю. В различных задачах особый интерес представляют именно семейства поверхностей имеющие нулевой p-модуль.

Определение. Семейство $\Gamma \subset \Sigma$ называют p-исключительным, если его p-модуль равен нулю. Говорят,что некоторое свойство выполняется для p-почти всех гиперповерхностей семейства Γ, если множество гиперповерхностей $S \in \Gamma$, для которых свойство не выполняется, является p-исключительным.

Из неравенства Гельдера следует, что при $q < p$ всякое p-исключительное семейство является q-исключительным, т.е. из условия $M_p(\Gamma) = 0$ следует $M_q(\Gamma) = 0$.

Лемма 3. *Пусть* $1 \le q \le p$. *Если* $f \in L_p(Q, H^n)$, *то* $f \in L_q(S, H^{n-1})$ *для* p/q*-почти всех гиперповерхностей* $S \in \Sigma$.

Утверждение леммы является непосредственным следствием пункта (е) теоремы 3 работы [8], согласно которому из принадлежности борелевской функции h пространству Лебега $L_r(Q, H^n)$ следует принадлежность сужений $h|_s$ пространствам $L_1(S, H^{n-1})$ для r-почти всех гиперповерхностей $S \in \Sigma$. Полагая $h = f^q$ и $r = p/q$, получаем требуемое.

IV. О следах соболевских функций на гиперповерхностях

Пусть $n - 1 < p \le n$ и функция $u \in W_p^1(Q)$. Мы воспользуемся совпадением пространств $W_p^1(Q)$ и $M_p^1(Q, |*|, m_n)$.

Поскольку куб Q является n-регулярным метрическим пространством, то согласно работе [11] пространство $M_p^1(Q, |*|, m_n)$ допускает описание в терминах максимальных функций.

Символом u_E будем означать среднее значение функции u на множестве E

$$u_E = \fint_E u\, d\mu = \frac{1}{\mu(E)} \int_E u\, d\mu.$$

Для локально суммируемой функции u определим максимальную функцию $u^\#$ равенством

$$u^\#(x) = \sup_{r>0} r^{-1} \fint_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}|\, dm_n.$$

Чтобы не усложнять обозначения, при определении максимальной функции можно считать, что определенная на кубе Q функция u продолжена на все пространство нулем, а мера m_n является сужением меры Лебега на куб Q.

Согласно работе [11] для всякой локально суммируемой функции $u : Q \to R$ в точках Лебега выполняется неравенство

$$|u(x) - u(y)| \le C|x - y| \left(u^\#(x) + u^\#(y)\right), \tag{7}$$

где постоянная C зависит только от размерности евклидова пространства.

Из результатов работы [11] применительно к кубу Q при $p > 1$ следует эквивалентность следующих утверждений $u \in L_p(Q)$:

1. *функция* $u \in M_p^1(Q, |*|, m_n)$;
2. *существует такая функция* $h \in L_p(Q, m_n)$, *что для произвольных* $x \in Q$ *и* $r > 0$ *выполняется неравенство Пуанкаре*

$$\fint_{B(x,r)} |u - u_{B(x,r)}| dm_n \le r \fint_{B(x,r)} h\, d\mu;$$

3. *максимальная функция* $u^\# \in L_p(Q, m_n)$.

При этом

$$\|h; L_p\| \sim \|u^\#; L_p\| \sim \|u; S_p^1\|.$$

Как было отмечено в начале работы, для уточненной функции $u \in W_p^1(Q)$ точками Лебега являются все точки куба за исключением быть может некоторого множества нулевой $(1, p)$-емкости. При $p > 1$ из оценок емкости следует, что для произвольной липшицевой гиперповерхности $S \subset Q$ точками Лебега функции u являются H^{n-1} почти все точки S. Следовательно неравенство (7) будет выполняться для H^{n-1} почти всех точек произвольной липшицевой гиперповерхности S.

Теорема 4. *Пусть $n-1 < q \le p \le n$. Если функция $u \in W_p^1(Q)$, то $u \in M_q^1(S, |*|, H^{n-1})$ для p/q-почти всех липшицевых гиперповерхностей $S \in \Sigma$.*

Доказательство. Поскольку пространства $W_p^1(Q)$ и $M_p^1(Q, |*|, m_n)$ совпадают, то $u^{\#} \in L_p(Q, m_n)$. Согласно утверждению леммы 3 максимальная функция $u^{\#} \in L_q(S, H^{n-1})$ для p/q-почти всех липшицевых гиперповерхностей $S \in \Sigma$. Для завершения доказательства остается заметить, что неравенство (7) выполняется для H^{n-1} почти всех точек S.

Теорема 5. *Пусть $n-1 < q \le p \le n$. Если функция $u \in W_p^1(Q)$, то она локально удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha = 1 - \dfrac{n-1}{q}$ на p/q-почти всех липшицевых гиперповерхностях $S \in \Sigma$.*

Доказательство. Локальность результата связана с определением липшицевой поверхности, в котором не предполагается существование единого показателя квазиизометричности для всей поверхности. Показатель квазиизометричности влияет на константы в условии $(n-1)$-регулярности соответствующей окрестности, что в свою очередь влияет на оценки в теоремах вложения.

Пусть точка $x \in S$ и U – соответствующая окрестность точки x из определения липшицевости поверхности S. При учете теоремы 4 для получения оценки на показатель гельдеровости достаточно воспользоваться для функций из пространства $M_q^1(U, |*|, H^{n-1})$ утверждением леммы работы [1].

Таким образом семейство “плохих” гиперповерхностей, на которых функция не удовлетворяет условию Гельдера с соответствующим показателем, является p/q-исключительным.

Следствие 6. *Пусть $n-1 < p \le n$. Если функция $u \in W_p^1(Q)$, то она локально является $(n-1)$-абсолютно непрерывной на r-почти всех липшицевых гиперповерхностях $S \in \Sigma$, где $r < p/(n-1)$.*

Доказательство. Положим $q = p/r$, тогда $q > n-1$. Из доказательства теоремы 4 следует, что для p/q-почти всех липшицевых гиперповерхностей $S \in \Sigma$ сужение максимальной функции $u^{\#}$ принадлежит пространству $L_q(U, H^{n-1})$, которое в свою очередь непрерывно вложено в пространство Лоренца $L_{n-1,1}(U, H^{n-1})$. Остается воспользоваться основным результатом работы [10].

Как мы видим непосредственное доказательство утверждений в терминах p-модулей оказывается довольно простым, однако сравнение этих утверждений с результатами работы [1] оказывается не совсем очевидным.

С одной стороны, в работе [1] рассматривались лишь семейства гиперплоскостей, а в данной работе результаты получаются для семейств произвольных липшицевых гиперповерхностей. С другой стороны, оценка результатов для семейств гиперплоскостей в терминах p-модулей оказывается слишком грубой.

Пример. Рассмотрим единичный куб Q и обозначим через I интервал, являющийся пересечением куба Q и оси OX_n. Для произвольного $t \in I$ обозначим через Q_t сечение куба Q гиперплоскостью $x_n = t_n$. Пусть множество $E \subset I$ и $H^1(E) = \alpha$. Найдем p-модуль семейства гиперплоскостей $\Gamma_E = \{Q_t\ ;\ t \in E\}$.

Функция

$$f_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n-1}}, & \text{если } x \in \bigcup\limits_{t \in E} Q_t \\ 0, & \text{если } x \notin \bigcup\limits_{t \in E} Q_t. \end{cases}$$

является допустимой для семейства Γ_E и

$$\int\limits_Q f_0^p\ dH^n = \frac{\alpha}{2^{(n-1)(p-1)}}.$$

Если f – допустимая функция, то

$$1 \le \int\limits_{Q_t} f\ dH^{n-1} \le \left(\int\limits_{Q_t} f^p\, dH^{n-1}\right)^{1/p} \cdot \left(H^{n-1}(Q_t)\right)^{1/p'}.$$

Поэтому

$$\int\limits_Q f^p\, dH^n = \int\limits_{-1}^{1} \left(\int\limits_{Q_t} f^p\, dH^{n-1}\right) dt_n \ge \int\limits_E \left(\int\limits_{Q_t} f^p\, dH^{n-1}\right) dH^1 \ge$$

$$\frac{\alpha}{2^{(n-1)(p-1)}} = \int\limits_Q f_0^p\ dH^n.$$

Это означает, что функция f_0 является экстремальной и

$$M_p(\Gamma_E) = \frac{\alpha}{2^{(n-1)(p-1)}}.$$

Таким образом для любого множества E, имеющего нулевую линейную меру Хаусдорфа семейство гиперплоскостей Γ_E “слишком мало” и имеет нулевой p-модуль. Поэтому результаты работы [1] не допускают переформулировку в терминах модулей.

Пусть множество $E \subset Q$, символом Σ_E обозначим семейство всех липшицевых гиперповерхностей, проходящих через точки множества E. Множество E называют p-исключительным относительно гиперповерхностей или $[n-1,p]$-исключительным, если $M_p(\Sigma_E) = 0$. В работе [12] показано, что класс $[n-1,p]$-исключительных множеств совпадает с классом множеств нулевой $(n-1,p)$-емкости.

Пусть $n-1 < q < p < n$, множество $E \subset Q$ и лежит на оси OX_n. Предположим, что существует такая функция $u \in W_p^1(Q)$, что для нее на всякой гиперповерхности $S \in \Sigma_E$ не выполняется локальное условие Гельдера с показателем $\alpha = 1 - \dfrac{n-1}{q}$. Тогда по теореме 5 семейство Σ_E является r-исключительным, т.е. $M_r(\Sigma_E) = 0$, где $r = \dfrac{p}{q} < \dfrac{p}{n-1}$. Это в свою очередь означает, что множество E является $[n-1,r]$-исключительным и его $(n-1,r)$-емкость равна нулю. Поскольку $r(n-1) < n$, то согласно работе [12] для хаусдорфовой размерности d множества E выполняется оценка $d \le n - r(n-1)$. В предельном случае при $d = n - r(n-1)$ выполняется равенство $\dfrac{n-1}{q} = \dfrac{n-d}{p}$ и для показателя гельдеровости получаем

$$\alpha = 1 - \frac{n-1}{q} = 1 - \frac{n-d}{p}.$$

Последнее выражение как раз и используется для оценки гельдеровости соболевских функций на гиперплоскостях в работе [1]. Поэтому взаимосвязь между результатами данной работы и работы [1] безусловно имеется.

References

[1] А.С.Романов, *О непрерывности соболевских функций на гиперплоскостях*, СЭМИ, **12** (2015), 832–841. Zbl 06607148

[2] Л.К. Эванс, Р.Ф. Гариепи *Теория меры и тонкие свойства функций*, Н.: Научная книга, 2002.

[3] H. Federer, W.P. Ziemer, *The Lebesgue set of a function whose distributon derivatives are p-th summable*, Indiana Univ. Math. J., **22**:2 (1972), 139–158. Zbl 0238.28015

[4] И. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, М.: Мир, 1973. Zbl 0281.44003

[5] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, М.: Мир, 1974. Zbl 0294.42003

[6] J. Kauhanen, P. Koskela, J. Maly, *On functions with derivatives in a Lorentz space*, Manuscripta math., **100**:1 (1999), 87–101. Zbl 0976.26004

[7] P. Hajlasz, *Sobolev Spaces on an Arbitrary Metric Space*, Potential Anal., **5** (1996), 403–415. Zbl 0859.46022

[8] B. Fuglede, *Extremal lenght and functional completion*, Acta math., **98**:3–4 (1957), 171–219. Zbl 0079.27703

[9] А.С. Романов, *О следах функций, принадлежащих обобщенным классам соболевского типа*, Сиб. матем. журн., **48**:4 (2007), 848–866. Zbl 1164.46326

[10] А.С. Романов, *Об абсолютной непрерывности функций соболевского типа на метрических пространствах*, Сиб. матем. журн., **49**:5 (2008), 1147–1156. Zbl 1224.46067

[11] P. Hajlasz, J. Kinnunen, *Hölder quasicontinuity of Sobolev functions*, Rev. Mat. Iberoamericana, **14**:3 (1998), 601–622. Zbl 1155.46306

[12] Ю.Г. Решетняк, *О понятии емкости в теории функций с обобщенными производными*, Сиб. матем. журн., **10**:5 (1969), 1100–1138.

Romanov Alexandr Sergeevich,
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Novosibirsk State University,
Pirogova str., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: asrom@math.nsc.ru