S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 635–644 (2016) УДК 517.958
DOI 10.17377/semi.2016.13.050 MSC 35L20,35R30,35Q99

МНОГОМЕРНАЯ ЗАДАЧА ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Ж.Д. ТОТИЕВА

Abstract. The integro-differential system of viscoelasticity equations is considered. The problem of determining the function of density $\rho(x_2, x_3)$ is investigated. For its determination an additional condition relative to the Fourier transform of the first component of the displacements vector for $x_3 = 0$ is given. The theorems of the local unique solvability of the inverse problem is proved in the special class of functions. The stability estimate of solving the inverse problem is obtained.

Keywords: inverse problem, stability, delta function, Lame's coefficients, density.

1. Введение

Исследуемая задача относится к классу коэффициентных обратных задач и имеет практическую значимость, прежде всего, для сейсмической разведки.

Обратные задачи для гиперболических уравнений являются по сути некорректными задачами математической физики, которые возникают практически во всех областях естествознания [1, 2]. Впервые одномерную обратную задачу определения плотности для системы уравнений изотропной упругости в полупространстве исследовал А.С. Алексеев [3, 4]. Различные постановки коэффициентных обратных задач теории упругости представлены в работах А.С. Благовещенского [5], В.Г. Романова, Е.А. Волковой [6, 7]. Развитие исследований данных авторов нашло отражение в работах В.Г. Яхно , Т.В. Бугуевой (Мельниковой) [8, 9], в частности, доказаны теоремы существования, единственности

Totieva, Zh.D., The multidimensional problem of determining the density function for the system of viscoelasticity.

Поступила 25 января 2016 г., опубликована 15 августа 2016 г.

и устойчивости многомерных задач определения функции плотности для системы уравнений изотропной и анизотропной упругости. Полученные результаты являются основой теории обратных задач с импульсными источниками возмущений на границе сред.

При математическом моделировании некоторых физических процессов встречаются так называемые среды с памятью, поведение которых не определяется целиком состоянием в настоящий момент, а зависит от всей предыстории процесса и поэтому описывается интегродифференциальным уравнением, содержащим соответствующий интеграл по временной переменной. Задачи восстановления памяти среды стали систематически изучаться в конце 80-х годов прошлого столетия. Целью данных исследований являлось определение ядра интегрального оператора типа свертки по некоторой информации об обобщенных решениях уравнений. Первые публикации в этой области, встречающиеся в литературе, связаны с именами Граселли М., Дурдиева Д. К., Кабанихина С. И., Лоренци А., Папарони Е., Синестрари Е. [10-15]. Дальнейшие исследования обратных задач с памятью для гиперболических уравнений отражены, например, в работах [16-26] (автор не приводит полный перечень работ по этому направлению, так как он включает в себя несколько десятков статей, и полный обзор темы окажется слишком громоздким). В частности, из наиболее близких (по цели исследования) к настоящей работе отметим [17], где для системы уравнений вязкоупругости с граничным условием Неймана решается обратная задача определения четырех неизвестных: плотности $\rho(x_3)$, коэффициентов Ламэ $\lambda(x_3)$, $\mu(x_3)$, ядра $K(t)$ при $x_3 > 0$, $t \geq 0$. Показывается, что исходная задача сводится сначала к решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода относительно $K(t)$, а затем к обратным задачам для скалярных гиперболических уравнений, содержащих $\rho(x_3)$, $\lambda(x_3)$, $\mu(x_3)$. Доказываются теоремы существования, единственности и устойчивости решения обратной задачи.

В настоящий момент исследования по данному направлению активно продолжаются. Из множества работ, опубликованных за последние пять лет, можно отметить [27-30]. В [27] для интегродифференциального уравнения, соответствующего двумерной проблеме вязкоупругости, изучается задача об определении плотности, модуля упругости и пространственной части ядра, входящего в интегральный член уравнения, причем искомые функции отличаются от заданных констант только внутри единичного круга $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}$. В качестве дополнительной информации рассматривается некоторое семейство решений прямой задачи, отвечающее импульсным источникам, локализованным на прямых линиях, и на границе области D задаются следы решений для конечного временного интервала. В работе [28] решена задача об определении коэффициентов Ламэ и двух ядер, входящих в интегральные члены системы уравнений вязкоупругости в трехмерном случае при заданной плотности среды. Основные результаты работ [27, 28] - теоремы об однозначности решения обратной задачи. Исследования [29, 30] посвящены определению ядра для представленной в статье модели вязкоупругой среды.

Целью представленной работы является решение обратной задачи определения плотности среды $\rho(x_2, x_3)$, $x_2 \in R$, $x_3 > 0$ для системы дифференциальных уравнений вязкоупругости (трехмерный случай) по некоторой информации о решении прямой задачи. В качестве источника распространения волн используется дельта-функция Дирака, задаваемая на границе рассматриваемой пространственной области. Данное исследование базируется на результатах монографий [6, 9] и является продолжением работ [31, 32]. Постановка задачи принадлежит В. Г. Яхно, под руководством которого автору посчастливилось работать в 90-х годах прошлого столетия. К сожалению, результат по объективным причинам остался тогда без публикации.

Основными результатами являются теоремы о необходимых и достаточных условиях для существования единственного решения обратной задачи и теорема об устойчивости ее решения в специальном классе функций. Предварительно решается прямая задача, которая исследуется в том объеме, который необходим для исследования обратной задачи.

2. Постановка задачи

В области $\Omega = \left\{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R^3},\ x_3 > 0,\ t \in \mathbf{R}\right\}$ рассматривается система интегро-дифференциальных уравнений:

$$\rho(x_2, x_3)\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j},\ i = 1, 2, 3, \tag{1}$$

при следующих начальных и граничных условиях

$$u_i\ |_{t<0} \equiv 0, \tag{2}$$

$$T_{3j}|_{x_3=+0} = -\delta_{1j}\delta(t)/2,\ j = 1, 2, 3, \tag{3}$$

где $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ — вектор смещений, $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака; δ_{ij} — символ Кронекера; T_{ij} — тензор напряжений:

$$T_{ij}(x,t) = \sigma_{ij}[u](x,t) + \int_0^t K(t-\tau)\sigma_{ij}[u](x,\tau)d\tau, \tag{4}$$

σ_{ij} - напряжения, для которых согласно закону Гука имеет место представление

$$\sigma_{ij}[u](x,t) = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \delta_{ij}\lambda \operatorname{div} u. \tag{5}$$

Система уравнений (1)-(5) возникает в теории вязкоупругих сред с переменными плотностью ρ и коэффициентами Ламе $\lambda,\ \mu$.

Прямая задача. Определить вектор-функцию $u(x,t)$ при заданных функциях $\rho(x_2, x_3)$, $\mu(x)$, $\lambda(x)$, $K(t)$. В монографии [9] описаны рассуждения, позволяющие ввести так называемые линеаризованные постановки задач. Речь идет о некоторых предположениях, в рамках которых задача будет упрощена, а именно, предположим, что

$$\rho(x_2, x_3) = \rho_0(x_3) + \rho_1(x_2, x_3),\ \mu(x) = \mu_0(x_3) + \mu_1(x),$$
$$\lambda(x) = \lambda_0(x_3) + \lambda_1(x), \tag{6}$$

где $\rho_1(x_2, x_3), \mu_1(x), \lambda_1(x)$ по абсолютной величине малы по сравнению со значениями $\rho_0(x_3), \mu_0(x_3), \lambda_0(x_3)$. Предполагается, что величины $\rho_0(x_3), \mu_0(x_3), \lambda_0(x_3), K(t)$ заданы и удовлетворяют следующим условиям

$$\rho_0(x_3), \mu_0(x_3), \lambda_0(x_3) \in C^2(\mathbf{R}_+),\ \rho_0(x_3) > 0, \mu_0(x_3) > 0, \lambda_0(x_3) > 0,$$

$$\frac{d\rho_0}{dx_3}(+0) = \frac{d\mu_0}{dx_3}(+0) = \frac{d\lambda_0}{dx_3}(+0) = 0, \tag{7}$$

$$K(t) \in C^2([0,T]), K(0) = 0, \frac{dK}{dt}(0) = 0, \tag{8}$$

где $T > 0$ фиксировано. Примем $\mu_1(x) \equiv 0, \lambda_1(x) \equiv 0$. Введем в рассмотрение параметр малости ν таким образом, что первое равенство (6) примет вид

$$\rho(x_2, x_3) = \rho_0(x_3) + \nu\tilde{\rho}_1(x_2, x_3),$$

где значения $\tilde{\rho}_1(x_2, x_3)$ сравнимы по порядку со значениями $\rho_0(x_3)$.

Решение прямой задачи представим в виде:

$$u(x,t) = u^0(x,t) + \nu\tilde{u}^1(x,t) + \nu^2\tilde{u}^2(x,t) + ... \tag{9}$$

Подставляя (6), (9) в (1)-(3) и считая, что вклад слагаемых с членами при $\nu^k, k = 2, 3, \dots$, пренебрежимо мал, приравниваем члены, стоящие при $\nu^k, k = 0, 1$. В результате получаем две задачи относительно $u^0(x,t)$ и $u^1(x,t)$. Задача определения $u^0(x,t)$ подробно исследована в работе [31]. В частности, показано, что $u_1^0(x,t) \equiv u_1^0(x_3,t) \neq 0,\ u_2^0 \equiv u_3^0 \equiv 0$.

Для функции $u^1(x,t)$ аналогично тому, как это было сделано в [9], получаем систему уравнений:

$$\rho_0(x_3)\frac{\partial^2 u_i^1}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial T_{ij}^1}{\partial x_j} - \rho_1(x_2, x_3)\frac{\partial^2 u_i^0}{\partial t^2},\ i = 1, 2, 3, \tag{10}$$

$$u_i^1 \mid_{t<0} \equiv 0, \tag{11}$$

$$T_{3j}^1|_{x_3=+0} = 0,\ j = 1, 2, 3, \tag{12}$$

где

$$T_{ij}^1(x,t) = \sigma_{ij}[u^1](x,t) + \int_0^t K(t-\tau)\sigma_{ij}[u^1](x,\tau)d\tau.$$

Обратная задача. Найти функцию $\rho_1(x_2, x_3)$, входящую в (10), если относительно решения задачи (10)-(12) известна информация

$$F_{x_2}[u_1^1](x_1, \nu, x_3, t)|_{x_1=0, x_3=+0} = h(\nu, t), \tag{13}$$

где F_{x_2} — оператор преобразования Фурье по переменной x_2 с параметром ν, а $h(\nu,t)$ — известная при $(\nu, t) \in \mathbf{R} \times [0,T]$ функция. Введем в рассмотрение новую переменную y по формуле

$$y = \phi(x_3) := \int_0^{x_3} \frac{d\xi}{v(\xi)},\ v(x_3) := \sqrt{\frac{\mu(x_3)}{\rho(x_3)}}.$$

Через $\phi^{-1}(y)$ обозначим функцию, обратную к $\phi(x_3)$, а через $\nabla(T)$ — область $\{(x_3,t)|\ \phi(x_3) \le t \le T\}$.

Пусть r, X — фиксированные положительные числа. Будем считать, что $\bar{\rho}_1(\nu, x_3) = F_{x_2}[\rho_1](\nu, x_3) \in \bar{\Lambda}(r, X)$ тогда и только тогда, когда $\bar{\rho}_1(\nu, x_3) \in C(\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+)$ и для любого фиксированного $x_3 \in [0, X]$ $supp\ \bar{\rho}_1(\nu, x_3) \subset [-r, r]$. Соответственно, $\rho_1(x_2, x_3) \in \Lambda(r, X)$ тогда и только тогда, когда $\bar{\rho}_1(\nu, x_3) = F_{x_2}[\rho_1](\nu, x_3) \in \bar{\Lambda}(r, X)$.

Для заданных положительных чисел $r, T, X = \phi^{-1}(T/2)$ введем класс функций $U(r,T)$ следующим образом:

$$U(r,T) = \Big\{ u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t)) \mid$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_1} \in C((0,T); W_2^1(R^2 \times R_+)), \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_1}\right) \in C((0,T); W_2^0(R^2 \times R_+)),$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_1} \mid_{t=+0} = 0, \ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_1}\right) \mid_{t=+0} = 0, \ k = 1,2,3 \Big\}$$

$$\cap \Big\{ u(x,t) = (u_1, u_2, u_3) \mid u_k \in C((0,T); W_2^1(R^2 \times R_+)),$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} \in C((0,T); W_2^0(R^2 \times R_+)), \ u_k \mid_{t=+0} = 0, \ \frac{\partial u_k}{\partial t} \mid_{t=+0} = 0, \ k = 2,3;$$

$$u_1 = u_1(x_2, x_3, t), u_1(x_2, -x_3, t) = u_1(x_2, x_3, t),$$

$$u_1(x_2, x_3, t) = \theta(t - |\phi(x_3)|) F_\nu^{-1}[\bar{u}_1(\nu, x_3, t)], \bar{u}_1(\nu, x_3, t) \in C(\mathbf{R} \times \nabla(T))$$

и при фиксированном $(x_3, t) \in \nabla(T)$ $supp\ \bar{u}_1(\nu, x_3, t) \subset [-r, r] \Big\}$,

где F_ν^{-1} — оператор, обратный к оператору преобразования Фурье F_{x_2}, $\theta(t)$ — функция Хевисайда.

3. Решение прямой задачи

Лемма 1. *Пусть r, T - фиксированные положительные числа, $X = \phi^{-1}(T/2)$. Функции $\rho_0(x_3), \mu_0(x_3), \lambda_0(x_3), K(t)$ заданы и удовлетворяют условиям (7)-(8). Пусть $\rho_1(x_2, x_3) \in \Lambda(r, X)$ - фиксированная функция. Тогда существует единственное решение $u^1(x,t) \in U(r,T)$ задачи (10)-(12).*

Доказательство. Продифференцируем левые и правые части равенств (10)-(12) по переменной x_1 и введем обозначение $w = \frac{\partial u^1}{\partial x_1}$. Тогда, учитывая независимость ρ_1, u^0 от x_1 получим задачу вида (10)-(12) для w с нулевыми данными. По доказанному в работе [31] утверждению в классе $U(r,T)$ она имеет только нулевое решение. Следовательно, $u^1 = u^1(x_2, x_3, t)$.

Далее для компактной записи определим билинейный интегральный оператор $\bar{L}$ по формуле

$$\bar{L}\left[K(t), u(x_2, x_3, t)\right] = u(x_2, x_3, t) + \int_0^t K(t-\tau) u(x_2, x_3, \tau) d\tau.$$

В дальнейшем для сокращения записи, иногда не будем в операторе $\bar{L}$ указывать зависимость функций от переменных, подразумевая зависимость первой функции от переменных t, а второй - от x_2, x_3, t.

Задачу определения u^1 можно переписать как задачу определения $u^1 = u^1(x_2, x_3, t)$, которая при $x_3 > 0, (x_2, t) \in \mathbf{R^2}$, удовлетворяет следующим равенствам:

$$\rho_0(x_3) \frac{\partial^2 u_1^1}{\partial t^2} = \bar{L}\left[K, \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\mu_0(x_3) \frac{\partial u_1^1}{\partial x_3}\right) + \mu_0(x_3) \frac{\partial^2 u_1^1}{\partial x_2^2}\right] - \rho_1(x_2, x_3) \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial t^2}, \quad (14)$$

$$\rho_0(x_3) \frac{\partial^2 u_2^1}{\partial t^2} = \bar{L}\Big[K, \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\mu_0(x_3) \frac{\partial u_2^1}{\partial x_3}\right) + (\lambda_0(x_3) + 2\mu_0(x_3)) \frac{\partial^2 u_2^1}{\partial x_2^2}$$

$$+\lambda_0(x_3)\frac{\partial^2 u_3^1}{\partial x_3 \partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\mu_0(x_3)\frac{\partial u_3^1}{\partial x_2}\right)\Big], \tag{15}$$

$$\rho_0(x_3)\frac{\partial^2 u_2^1}{\partial t^2}=\bar{L}\Big[K,\frac{\partial}{\partial x_3}\left((\lambda_0 a(x_3)+2\mu_0(x_3))\frac{\partial u_3^1}{\partial x_3}\right)$$

$$+(\lambda_0(x_3)+\mu_0(x_3))\frac{\partial^2 u_2^1}{\partial x_2 \partial x_2}\Big], \tag{16}$$

$$u_1^1 \mid_{t<0}\equiv 0, \tag{17}$$

$$u_i^1 \mid_{t=+0}=0,\ \frac{\partial u_i^1}{\partial t}\mid_{t=+0}=0,\ i=2,3, \tag{18}$$

$$\bar{L}\left[K,\mu_0(x_3)\frac{\partial u_1^1}{\partial x_3}\right]\mid_{x_3=+0}=0, \tag{19}$$

$$\bar{L}\left[K,\mu_0(x_3)\left(\frac{\partial u_2^1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3^1}{\partial x_2}\right)\right]\mid_{x_3=+0}=0, \tag{20}$$

$$\bar{L}\left[K,(\lambda_0(x_3)+2\mu_0(x_3))\frac{\partial u_3^1}{\partial x_3}+\lambda_0\frac{\partial u_2^1}{\partial x_2}\right]\mid_{x_3=+0}=0. \tag{21}$$

Решение распадается на две независимые решаемые задачи (14), (17), (19) и (15), (16), (18), (20), (21), связанные с определением функций $u_1^1=u_1^1(x_2,x_3,t)$, $u_2^1=u_2^1(x_2,x_3,t)$, $u_3^1=u_3^1(x_2,x_3,t)$ соответственно. При этом задача (15), (16), (18), (20), (21) представляет собой задачу для однородной системы уравнений с однородными граничными условиями и нулевыми начальными данными. Применяя результаты исследования [31], получаем, что $u_2^1\equiv u_3^1\equiv 0$ при $(x_2,x_3,t)\in \mathbf{R}\times\mathbf{R}_+\times[0,T]$.

Равенства (14), (17), (19) перепишем эквивалентным образом в терминах переменной y и функций

$$V(x,y,t):=\frac{F_{x_2}[u_1^1]\left(\nu,\phi^{-1}(y),t\right)}{s(y)},\ V^0:=\frac{u^0\left(\phi^{-1}(y),t\right)}{s(y)},$$

$$s(y):=\sqrt{\frac{v(+0)\rho_0(+0)}{v\left(\phi^{-1}(y)\right)\rho_0\left(\phi^{-1}(y)\right)}}.$$

Пусть

$$\bar{V}(\nu,y,t):=\bar{L}\left[K,V(\nu,y,t)\right],$$

тогда

$$V(\nu,y,t)=\bar{L}\left[R,\bar{V}(\nu,y,t)\right],$$

где $R(t)=\bar{L}[K,R(t)]$.

При $t\in R, y>0$ для $\bar{V}$ получим равенства:

$$\frac{\partial^2\bar{V}}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\bar{V}}{\partial y^2}+q(\nu,y)\bar{V}-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[R*\bar{V}\right]-\frac{\bar{\rho}_1(\nu,\phi^{-1}(y))}{\rho_0(\phi^{-1}(y))}\frac{\partial^2 V^0}{\partial t^2}, \tag{22}$$

$$\bar{V}\mid_{t<0}\equiv 0, \tag{23}$$

$$\frac{\partial\bar{V}}{\partial y}|_{y=+0}=0, \tag{24}$$

где

$$q(\nu,y):=\frac{s''(y)}{s(y)}-2\left[\frac{s'(y)}{s(y)}\right]^2-\nu^2\frac{\mu_0(\phi^{-1}(y))}{\rho_0(\phi^{-1}(y))},$$

Заметим, что в в силу (7) функция $q(\nu,y)$, определенная выше, будет непрерывна по переменным (ν,y).

Если продолжить $q(\nu, y), \tilde{\rho}_1(\nu, \phi^{-1}(y)), V^0$ четным образом в область $y < 0$, то задача определения функции $\bar{V}(\nu, y, t)$, удовлетворяющей при $y > 0, t \in \mathbf{R}$ равенствам (22)-(24), будет эквивалентна задаче определения четной по y функции $\bar{V}(\nu, y, t)$, удовлетворяющей при $y \in \mathbf{R}, t \in \mathbf{R}$ равенствам (22), (23).

В работе [32] показано, что существует единственное фундаментальное решение оператора $\tilde{L}$:

$$\tilde{L}G = \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} - q(\nu, y)G - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[R * G\right].$$

Используя свойства фундаментального решения $G(\nu, y, y_0, t, t_0)$ [32], решение задачи (22),(23) при $y \in \mathbf{R},\ t \in \mathbf{R}$ запишется формулой

$$\bar{V}(\nu, y, t) = -\iint\limits_{R^2} G(\nu, y, \xi, t, \tau)\frac{\bar{\rho}_1(\nu, \phi^{-1}(\xi))}{\rho_0(\phi^{-1}(\xi))}\frac{\partial^2 V^0}{\partial \tau^2}d\tau d\xi. \tag{25}$$

Из равенства (25) и вытекает справедливость утверждения леммы.

□

4. Решение обратной задачи

Введем в рассмотрение функцию

$$H(\nu, t) := \bar{L}[K, h(\nu, t)]. \tag{26}$$

Сформулируем следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть r, T — фиксированные положительные числа, $X = \phi^{-1}(T/2)$. Для существования единственного решения обратной задачи $\rho_1(x_2, x_3) \in \Lambda(r, X)$ необходимо и достаточно, чтобы $H(\nu, t) \in C(\mathbf{R} \times [\mathbf{0}, \mathbf{T}])$ и для любого фиксированного $t \in [0, T]$ supp $H(\nu, t) \subset [-r, r]$.*

Доказательство. Доказательство теоремы аналогично доказательству подобной теоремы из монографии [9]. Действительно, учитывая свойства и структуру функций G и V_0 [31,32], из (25) следует:

$$\bar{V}(\nu, 0, t) = -\theta(t)\left\{\frac{a}{4}\frac{\bar{\rho}_1(\nu, \phi^{-1}(t/2))}{\rho_0(\phi^{-1}(t/2))} + \int\limits_{-t/2}^{t/2} K_1(\nu, \xi, t)\frac{\bar{\rho}_1(\nu, \phi^{-1}(\xi))}{\rho_0(\phi^{-1}(\xi))}d\xi\right\}, \tag{27}$$

где $a := [\mu_0(+0)\rho_0(+0)]^{-\frac{1}{2}}$, а $K_1(\nu, \xi, t)$ — известная непрерывная при $\xi \in [-t/2, t/2],\ t \in [0, T],\ \nu \in \mathbf{R}$ и четная по переменной ξ функция.

Так как $\bar{V}(\nu, 0, t) = \bar{L}\left[K, F_{x_2}[u_1^1](\nu, x_3, t)|_{x_3=+0}\right]$, то из (26)-(27) в силу четности ядра $K_1(\nu, y, t)$ получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $\bar{\rho}_1$:

$$\frac{\bar{\rho}_1(\nu, \phi^{-1}(t/2))}{\rho_0(\phi^{-1}(t/2))} + \frac{8}{a}\int\limits_{-t/2}^{t/2} K_1(\nu, \xi, t)\frac{\bar{\rho}_1(\nu, \phi^{-1}(\xi))}{\rho_0(\phi^{-1}(\xi))}d\xi = -\frac{4}{a}H(\nu, t). \tag{28}$$

Из теории интегральных уравнений Вольтерра второго рода следует, что уравнение (28) имеет единственное непрерывное при $t \in [0, T],\ \nu \in \mathbf{R}$ решение $\bar{\rho}_1(\nu, \phi^{-1}(y)) = F_{x_2}[\rho_1](\nu, x_3)|_{x_3=\phi^{-1}(y)}$, откуда и вытекает справедливость теоремы 1.

□

Теорема 2. *Пусть r, T — фиксированные положительные числа, $X = \phi^{-1}(T/2)$; $\rho_1(x_2, x_3), \rho_1^*(x_2, x_3) \in \Lambda(r, X)$ — решения обратной задачи, отвечающие информациям $H(\nu, t)$ и $H^*(\nu, t)$ соответственно. Тогда имеет место оценка устойчивости:*

$$\max_{x_3 \in [0,X]} \int\limits_R |\rho_1(x_2, x_3) - \rho_1^*(x_2, x_3)|^2 dx_2 \leq \tilde{C} \max_{t \in [0,T]} \int\limits_{-r}^{r} |H(\nu, t) - H^*(\nu, t)|^2 d\nu,$$

где $\tilde{C}$ — некоторая константа, зависящая от величин r, T и значений функций $K_1(\nu, \phi(x_3), t), \mu_0(x_3), \lambda_0(x_3), \rho_0(x_3)$.

Доказательство. Справедливость утверждения теоремы 2 следует из оценок для уравнения (28) и свойства изометричности оператора преобразования Фурье. □

Теперь рассмотрим вопрос о сходимости последовательности решений некоторого семейства задач к искомому решению. Пусть существует решение

$$\rho_1(x_2, x_3) \in L(\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+),$$

отвечающее информации $H(\nu, t)$.

Определим множество функций $H_r(\nu, t)$ по правилу:

$$H_r(\nu, t) := \theta(r - |\nu|) H(\nu, t).$$

Выделим некоторое семейство обратных задач: определить функцию

$$\rho_1^r(x_2, x_3) = F_\nu^{-1}[\bar{\rho}^r(\nu, x_3)]$$

по информации $H_r(\nu, t)$.

Теорема 3. *Данное семейство является регуляризованным, то есть:*
1) для каждого r>0 обратная задача корректна;
2) если данные таковы, что решение исходной (некорректной) задачи существует, то при последовательность решений задач семейства с данными стремится к решению исходной (некорректной) задачи.

Доказательство. Теоремы 1, 2, доказанные ранее, утверждают о корректности обратной задачи (решение существует, оно единственно и устойчиво). Теперь покажем, что

$$\lim_{r \to \infty} \sup_{x_3 \in [0,X]} \int\limits_R |\rho_1^r(x_2, x_3) - \rho_1(x_2, x_3)|^2 dx_2 = 0.$$

Действительно,

$$\lim_{r\to\infty}\sup_{x_3\in[0,X]}\int_R|\rho_1^r(x_2,x_3)-\rho_1(x_2,x_3)|^2dx_2$$
$$=\lim_{r\to\infty}\sup_{x_3\in[0,X]}\Big(\int_{-r}^{r}|\rho_1^r(\nu,x_3)-\rho_1(\nu,x_3)|^2d\nu$$
$$+\int_{-\infty}^{-r}|\rho_1(\nu,x_3)|^2d\nu+\int_{r}^{+\infty}|\rho_1(\nu,x_3)|^2d\nu\Big)$$
$$=\lim_{r\to\infty}\sup_{x_3\in[0,X]}\left(\int_{-\infty}^{-r}|\rho_1(\nu,x_3)|^2d\nu+\int_{r}^{+\infty}|\rho_1(\nu,x_3)|^2d\nu\right)=0.$$

Тем самым, теорема доказана. $\square$

References

[1] S.I. Kabanikhin, *Inverse and Ill-posed problems*, Siberian science publishers, Novosibirsk, 2009. (in Russian)

[2] M. M. Lavrentiev, V.G. Romanov, S.P. Shishatskii, *Ill-posed problems of mathematical physics and analysis*, Nauka, Moscow, 1980. (in Russian)

[3] A. S. Alekseev, *Some inverse problems of the theory of wave propagation*, Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR, **11** (1962), 1514–1531.

[4] A. S. Alekseev, *The inverse dynamic seismic problem*, Some methods and algorithms of interpretation of geophysical data, Moscow, 1967, 9–84. (in Russian)

[5] A. S. Blagoveshchensky, *On the inverse problem of the theory of propagation of seismic waves*, Problems of mathematical physics, Leningrad, **1** (1966), 68–81. (in Russian)

[6] Romanov V. G., *Inverse problems of mathematical physics*, Nauka, Moscow, 1984. (in Russian) Zbl 0576.35001

[7] Romanov V. G., Volkova E. A., *Inverse dynamic problem for anisotropic elastic medium*, Sov. Math. Dokl., **267**:4 (1982), 780–783. (in Russian) Zbl 0532.73028

[8] T. V. Melnikova, V. G. Yakhno, *One-dimensional inverse dynamic problem of isotropic elasticity for a spherically symmetric Earth model*, Novosibirsk, 1985 (Preprint/USSR Academy of Sciences, Sib. otd.). (in Russian)

[9] V. G. Yakhno, *Inverse problem for differential equations of elasticity*, Nauka, Novosibirsk, 1988. (in Russian)

[10] A. Lorenzi and E. Sinestrari, *An inverse problem in the theory of materials with memory I*, Nonlinear Anal. TMA, **12** (1988), 1217–1335. Zbl 0673.45010

[11] A. Lorenzi, *An inverse problem in the theory of materials with memory II*, "Semigroup Theory and Applications", Series on Pure and Applied Mathematics, **116** (1989), 261–290. Zbl 0687.45009

[12] D. K. Durdiev, *Inverse problem for three-dimensional wave equation in a medium with memory*, Mathematical analysis analysis and discrete mathematics, Novosibirsk University, Novosibirsk, 1989, 19–27. (in Russian) Zbl 0791.35149

[13] M. Grasselli, S. Kabanikhin, A. Lorenzi *An inverse hyperbolic integro-differential problem arising in Geophysics II*, Nonlinear Anal. T.M.A. **15** (1990), 283–298. Zbl 0724.45014

[14] M. Grasselli, *An identification problem for an abstract linear hyperbolic integro-differential equation with applications*, J. Math. Anal. Appl., **171** (1992), 27–60. Zbl 0778.93058

[15] A. Lorenzi and E. Paparoni, *Direct and inverse problems in the theory of materials with memory*, Ren. Sem. Math. Univ., **87** (1992), 105–138. Zbl 0757.73018

[16] A. L. Bukhgeim, *Inverse problems of memory reconstruction*, J. of Inverse and Ill-Posed Problems, **1**:3 (1993), 193–206. Zbl 0818.45008

[17] A. Lorenzi, J. Sh. Ulekova, V. G. Yakhno, *An inverse problem in viscoelasticity*, J. Inv. Ill - posed Prob., **2** (1994), 131–165. Zbl 0822.35151
[18] D. K. Durdiev, *Multidimensional inverse problem for the equation with memory*, Siberian Mathematical Journal, **35**:3 (1994), 574–582. (in Russian) Zbl 0859.35134
[19] A. L. Bukhgeim, G. V. Dyatlov, *Uniqueness in one inverse problem of determining the memory*, Siberian Mathematical Journal, **37**:3 (1996), 526–533. (in Russian) Zbl 0887.45011
[20] A. Lorenzi, V. I. Priimenko, *Identification problems related to electro-magneto-elastic interactions*, J. Inverse Ill-Posed Probl., **4**:2 (1996), 115–143. Zbl 0856.35132
[21] A. L. Bukhgeim, G. V. Dyatlov *Inverse problems for equations with memory*, SIAM J. Math. Fool., **1**:2 (1998), 1–17.
[22] J. Janno and L. Von Wolfersdorf, *An inverse problem for identification of a time- and space-dependent memory kernel in viscoelasticity*, Inverse Problems, **17** (2001), 13–24. Zbl 0983.35146
[23] A. Lorenzi, F. Messina, V. G. Romanov, *Recovering a Lame kernel in a viscoelastic system*, Applicable Analysis, **86**:11 (2007), 1375–1395. Zbl 1148.45013
[24] D. K. Durdiev, *Some multidimensional inverse problems of memory determination in hyperbolic equations*, Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, **3**:4 (2007), 411–423. Zbl 1257.35191
[25] D. K. Durdiev, *Inverse problem for determining two coefficients in a single integro-differential wave equation*, Siberian Journal of Industrial Mathematics, **12**:3 (2009), 28–40. (in Russian) Zbl 1240.35575
[26] V. G. Romanov, M. Yamamoto, *Recovering a Lame kernel in a viscoelastic equation by a single boundary measurement*, Applicable Analysis, **89**:3 (2010), 377–390. Zbl 1198.45020
[27] V. G. Romanov, *Two-dimensional inverse problem for the equation of viscoelasticity*, Siberian Mathematical Journal, **53**:6 (2012), 1401–1412. (in Russian) Zbl 1308.35327
[28] V. G. Romanov, *On the determination of the coefficients in the equations of viscoelasticity*, Siberian Mathematical Journal, **55**:3 (2014), 6170–626. (in Russian) Zbl 1302.35361
[29] D. K. Durdiev , Zh. D. Toteva, *the Problem of determining a one-dimensional kernel of viscoelasticity equation*, Siberian Journal of Industrial Mathematics, **16**:2 (2013), 72–82. (in Russian) Zbl 06472803
[30] D. Q. Durdiev, Zh. D. Totieva, *The Problem of determining a multidimensional kernel of viscoelasticity equation*, Vladikavkaz Mathematical Journal, **17**:4 (2015), 18–43. (in Russian)
[31] Zh. D. Tuaeva, *The multidimensional mathematical model of seismic with memory*, Mathematical forum, **1**:2 (2008), "Studies of dif. equations and math. modeling", Vladikavkaz Scientific Center, Vladikavkaz, 297–306. (in Russian)
[32] Zh. D. Totieva, *On the fundamental solution of the Cauchy problem for a hyperbolic operator*, Vladikavkaz Mathematical Journal, **14**:2 (2012), 45–49. (in Russian) Zbl 1326.35186

Zhanna Dmitrievna Totieva
Geophysical Institute of Vladikavkaz Scientific Center
of the Russian Academy of Sciences,
ul. Markova, 93a,
362002, Vladikavkaz, Russia
North Ossetian State University,
ul. Vatutina, 46,
362025, Vladikavkaz, Russia
E-mail address: jannatuaeva@inbox.ru