S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 664–693 (2016) УДК 517.95
DOI 10.17377/semi.2015.12.053 MSC 35A05

РАЗРЕШИМОСТЬ СТАЦИОНАРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПОЛИТРОПНОГО ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ МНОГОЖИДКОСТНЫХ СРЕД

А.Е. МАМОНТОВ, Д.А. ПРОКУДИН

Abstract. We consider the steady boundary value problem which describes polytropic motion of a viscous compressible multifluid in a bounded domain of three-dimensional Euclidian space. We prove the existence of weak solutions to the problem.

Keywords: existence theorem, steady boundary value problem, viscous compressible multifluid, polytropic equation of state, effective viscous flux.

1. Постановка задачи, основной результат и априорные оценки гладких решений

Моделирование движения многожидкостных сред, или (жидких) смесей, или многокомпонентных жидкостей, является достаточно обширной областью механики и математики, и слабо изученной (во всяком случае, по сравнению с соответствующими одножидкостными моделями) как в плане формулировки моделей, так и в плане строгих математических результатов о существовании, единственности решений соответствующих задач, или свойствах этих решений. Прежде всего, следует отметить, что указанная область содержит несколько разделов, отличающихся друг от друга способами моделирования смеси. В настоящей работе речь пойдет об одном из вариантов модели — это гомогенная смесь вязких сжимаемых жидкостей, многоскоростная модель. Это означает, что в каждой точке пространства присутствуют все компоненты (составляющие) смеси, которые находятся в одной фазе, но имеют каждая свою локальную

Mamontov, A.E., Prokudin, D.A., Solubility of steady boundary value problem for the equations of polytropic motion of multicomponent viscous compressible fluids.

Работа частично поддержана РФФИ (проект 15–01–08275).

Поступила 17 июля 2016 г., опубликована 17 августа 2016 г.

скорость движения; взаимодействие между компонентами осуществляется через обмен импульсом и вязкое трение. С математических позиций как эта, так и многочисленные прочие модели смесей исследованы весьма мало, в том числе по сравнению с аналогичной теорией для однокомпонентных сред (некоторые подробности можно найти в обзоре из [12]).

В период расцвета одномерной теории вязкого газа моделям смесей также было уделено определенное внимание (см. например [7], [14]), но при этом не рассматривались недиагональные матрицы вязкостей, т. е. учитывающие вязкое трение между компонентами (тем самым взаимодействие компонент сводилось к обмену импульсом). После прорыва в многомерной теории вязкого газа, произошедшего в последние 20 лет, возник естественный стимул распространить полученные результаты однокомпонентной теории на случай смесей. Ключевой проблемой при этом оказалась работоспособность метода эффективных вязких потоков (являющегося сердцевиной современной теории Навье—Стокса сжимаемых жидкостей) на матричный случай. В полученных к настоящему времени результатах (см. например [8], [11], [12] — мы не упоминаем предшествующие результаты по приближенным моделям) рассмотрены треугольные матрицы вязкостей, т. е. упомянутая проблема решена лишь частично. В настоящей работе впервые (не считая уже опубликованного аналогичного результата [10] по нестационарной задаче) удалось рассмотреть полные матрицы вязкостей. Ключевой находкой при этом является предположение о совпадении фазовых давлений и их зависимости от суммарной плотности смеси, а также о том, что оператор материальной производной определяется средней скоростью движения. Однако в остальных слагаемых удержаны отдельные скорости компонент, в связи с чем сохраняется все богатство многоскоростной модели со всеми сопутствующими сложностями при работе с вязкими членами. В результате, с одной стороны, удалось впервые получить теорему о существовании решений задачи о движении смесей без каких-либо искусственных ограничений на коэффициенты вязкости, а с другой стороны этот результат не является прямым обобщением соответствующих результатов теории однокомпонентной жидкости. В завершение обзора отметим, что нестационарный аналог настоящей статьи можно найти в работе [10], а в модельном случае аналогичная задача была рассмотрена в [15].

Статья состоит из четырех разделов. В первых двух разделах приведена постановка задачи (которую мы назвали Задачей А), формулировка основного результата (Теорема 1.3), постановка приближенной (регуляризованной) Задачи $\mathrm{A}_{\varepsilon,\,\delta}$ и доказательство разрешимости последней (Теорема 2.3). В третьем и четвертом разделах совершается предельный переход по двум малым параметрам (ε и δ), отличающим приближенную Задачу $\mathrm{A}_{\varepsilon,\,\delta}$ от исходной Задачи А, и тем самым завершается доказательство основной Теоремы 1.3.

Сформулируем рассматриваемую в работе математическую задачу. Пусть смесь N вязких сжимаемых жидкостей занимает ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Искомыми являются следующие физические величины, описываемые $N+1$ (с учетом размерностей векторов — $3N+1$) функциями, определенными в Ω: скалярное поле $\rho \geqslant 0$ суммарной плотности смеси и векторные поля скоростей $\boldsymbol{u}_i$ для каждой компоненты смеси с номером $i = 1, \dots, N$. Для нахождения этих величин необходимо решить одно уравнение неразрывности

$$\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \tag{1}$$

и N векторных (состоящие из $3N$ скалярных) уравнений импульсов

$$\operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{v}\otimes \boldsymbol{u}_i) + \alpha_i \nabla p(\rho) = \operatorname{div}\mathbb{S}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i + \boldsymbol{g}_i \quad \text{в} \quad \Omega, \quad i=1,\ldots,N. \tag{2}$$

В этих уравнениях использованы следующие обозначения:

$$\rho_i = \alpha_i \rho, \qquad i=1,\ldots,N \tag{3}$$

— плотности компонент смеси, где концентрации составляющих α_i являются известными постоянными такими, что $0<\alpha_i<1$, $i=1,\ldots,N$, $\sum\limits_{i=1}^{N}\alpha_i = 1$;

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \boldsymbol{u}_i \tag{4}$$

— средневзвешанная скорость смеси; $\boldsymbol{f}_i$ и $\boldsymbol{g}_i$ — известные внешние силы; p — (суммарное) давление, для него предполагается выполнение определяющего соотношения (политропное уравнение состояния)

$$p = K\rho^{\gamma} \tag{5}$$

с некоторыми постоянными $K>0$ и $\gamma>3/2$; наконец, тензоры вязких напряжений $\mathbb{S}_i$ определяются равенствами

$$\mathbb{S}_i = \sum_{j=1}^{N} \widehat{\mathbb{S}}_{ij}, \quad \text{где} \quad \widehat{\mathbb{S}}_{ij} = 2\mu_{ij}\mathbb{D}(\boldsymbol{u}_j) + \lambda_{ij}(\operatorname{div}\boldsymbol{u}_j)\mathbb{I}, \quad i,j=1,\ldots,N, \tag{6}$$

здесь и далее $\mathbb{D}(\boldsymbol{w}) = ((\nabla\otimes\boldsymbol{w}) + (\nabla\otimes\boldsymbol{w})^*)/2$ — тензор скоростей деформаций векторного поля $\boldsymbol{w}$, $\mathbb{I}$ — единичный тензор, а заданные постоянные коэффициенты вязкостей образуют матрицы

$$\boldsymbol{\Lambda} = \{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^{N}, \quad \mathbf{M} = \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^{N} > 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{N} := \boldsymbol{\Lambda} + 2\mathbf{M} > 0. \tag{7}$$

С математических позиций смысл условий (7), в частности, следующий. Ввиду равенства (справедливого для любых достаточно гладких векторных полей $\boldsymbol{u}_i$, $i=1,\ldots,N$ в случае однородных краевых условий (10) на границе $\partial\Omega$ области течения Ω)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\mathbb{S}_i : (\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i)\,d\boldsymbol{x} &= \sum_{i,j=1}^{N}\int_{\Omega}\mu_{ij}(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}_i)\cdot(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}_j)\,d\boldsymbol{x} \\ &+ \sum_{i,j=1}^{N}\int_{\Omega}(\lambda_{ij}+2\mu_{ij})(\operatorname{div}\boldsymbol{u}_i)(\operatorname{div}\boldsymbol{u}_j)\,d\boldsymbol{x},\end{aligned} \tag{8}$$

условия (7) обеспечивают важное соотношение

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\mathbb{S}_i : (\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i)\,d\boldsymbol{x} \geqslant C_0 \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}|\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i|^2\,d\boldsymbol{x} \tag{9}$$

с некоторой положительной постоянной $C_0 = C_0(\mathbf{M},\boldsymbol{\Lambda})$.

Прокомментируем вывод равенства (8). Для всех $i,j=1,\ldots,N$ справедливы представления

$$\operatorname{div}\widehat{\mathbb{S}}_{ij} = \mu_{ij}\big(\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{u}_j + \Delta\boldsymbol{u}_j\big) + \lambda_{ij}\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{u}_j = \nu_{ij}\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{u}_j - \mu_{ij}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{u}_j,$$

с учетом которых выводим

$$\operatorname{div}\left(\widehat{\mathbb{S}}_{ij}\boldsymbol{u}_i\right) = \nu_{ij}(\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{u}_j)\cdot\boldsymbol{u}_i - \mu_{ij}(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{u}_j)\cdot\boldsymbol{u}_i + \widehat{\mathbb{S}}_{ij} : (\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i),$$

и привлекая элементарные равенства

$$\operatorname{div}\big((\operatorname{div}\boldsymbol{u}_j)\boldsymbol{u}_i\big) = (\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{u}_j)\cdot\boldsymbol{u}_i + (\operatorname{div}\boldsymbol{u}_i)(\operatorname{div}\boldsymbol{u}_j),$$

$$\operatorname{div}\big((\operatorname{rot}\boldsymbol{u}_j)\times\boldsymbol{u}_i\big) = \boldsymbol{u}_i\cdot\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{u}_j + (\operatorname{rot}\boldsymbol{u}_i)\cdot(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}_j),$$

получаем тождества

$$\operatorname{div}\left(\widehat{\mathbb{S}}_{ij}\boldsymbol{u}_i - \nu_{ij}(\operatorname{div}\boldsymbol{u}_j)\boldsymbol{u}_i + \mu_{ij}(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}_j)\times\boldsymbol{u}_i\right)$$

$$= \widehat{\mathbb{S}}_{ij} : (\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i) - \nu_{ij}(\operatorname{div}\boldsymbol{u}_i)(\operatorname{div}\boldsymbol{u}_j) - \mu_{ij}(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}_i)\cdot(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}_j),$$

которые после суммирования по i, j от 1 до N и интегрирования по Ω дают (8).

К уравнениям (1), (2) необходимо добавить краевые условия для скоростей, например:

$$\boldsymbol{u}_i|_{\partial\Omega} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \tag{10}$$

(т. е. здесь граница $\partial\Omega$ области Ω предполагается неподвижной твердой стенкой), а также дополнительное условие для суммарной плотности, которое стандартно примем в виде

$$\int\limits_{\Omega} \rho\, d\boldsymbol{x} = m, \tag{11}$$

где положительная постоянная m выражает полную массу смеси и предполагается известной.

Тем самым, предмет нашего исследования сформулирован — это краевая задача (1), (2), (10), (11) (см. (3)–(7)), которую далее будем называть Задачей A.

Введем следующие обозначения[1]:

$$\zeta_1(\gamma) = \begin{cases} \dfrac{6(\gamma-1)}{5\gamma-7}, & \text{если} \quad \dfrac{3}{2} < \gamma \leqslant \dfrac{5}{3}, \\[2ex] \dfrac{6}{3\gamma-5}, & \text{если} \quad \dfrac{5}{3} < \gamma \leqslant 3, \\[2ex] \dfrac{6\gamma}{5\gamma-3}, & \text{если} \quad \gamma > 3, \end{cases}$$

$$\zeta_2(\gamma) = \begin{cases} 3(\gamma-1), & \text{если} \quad \dfrac{3}{2} < \gamma < 3, \\[2ex] 2\gamma, & \text{если} \quad \gamma \geqslant 3. \end{cases} \tag{12}$$

Отметим, что $\zeta_1(\gamma) \in (1, +\infty)$, $\zeta_2(\gamma) \in (\gamma, +\infty)$.

На внешние силы наложим требования

$$\boldsymbol{f}_i \in L_{\sigma_1}(\Omega), \quad \boldsymbol{g}_i \in L_{\frac{6}{5}}(\Omega), \quad i = 1, \dots, N \tag{13}$$

---

[1]Первая строка в $(12)_1$ применяется только при выводе (27), а именно, в (28). Оценка (27) необходима для (34), но недостаточна, так что приходится налагать условие (14), после чего упомянутая первая строка теряет смысл.

с некоторым $\sigma_1 > \zeta_1(\gamma)$, причем

$$\boldsymbol{f}_i = 0, \quad \text{если} \quad \frac{3}{2} < \gamma \leqslant \frac{5}{3}, \quad i = 1, \dots, N. \tag{14}$$

Определение 1.1. Пусть в уравнениях (2) тензоры вязких напряжений заданы равенствами (6), коэффициенты вязкости удовлетворяют ограничениям (7), давление задано равенством (5), а входные данные Задачи A удовлетворяют условиям (13) и (14) (см. также обозначения (3) и (4)). Слабым решением Задачи A называется набор функций

$$\rho \in L_{\zeta_2(\gamma)}(\Omega), \quad \rho \geqslant 0, \quad \boldsymbol{u}_i \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \quad i = 1, \dots, N,$$

удовлетворяющих (11) и следующим условиям:

(1) Плотность ρ удовлетворяет уравнению неразрывности (1) в том смысле, что для любого $\psi \in W^1_{\frac{6\zeta_2(\gamma)}{5\zeta_2(\gamma)-6}}(\Omega)$ выполняется интегральное тождество
$$\int\limits_{\Omega} \rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla \psi \, d\boldsymbol{x} = 0;$$

(2) Скорости $\boldsymbol{u}_i$, $i = 1, \dots, N$ удовлетворяют уравнениям импульсов (2) (с определяющими уравнениями (6)) в том смысле, что для любых векторных полей $\boldsymbol{\varphi}_i \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\frac{\zeta_2(\gamma)}{\zeta_2(\gamma)-\gamma}}(\Omega)$ выполнены интегральные тождества
$$\int\limits_{\Omega} \Big((\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i) + \alpha_i p(\rho) \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_i - \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i)$$
$$+ \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i + \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i \Big) \, d\boldsymbol{x} = 0, \quad i = 1, \dots, N$$
(краевые условия (10) выполнены автоматически — в смысле функционального класса $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$).

Замечание 1.2. В литературе обычно (см., например, [13], Определение 4.1, стр. 192) в определение слабого решения включаются требования его ренормализации (см. Замечание 3.2) и конечности энергии. Эти требования в самом деле являются существенными как для дальнейшей работы с этим решением, так и для доказательства самого факта его существования. Однако в рамках решаемой в статье задачи (доказательство существования решения в виде Теоремы 1.3) в указанных дополнительных требованиях в Определении 1.1 нет необходимости.

Основным результатом работы является следующая

Теорема 1.3. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область класса C^2. Тогда для любых входных данных класса, описанного в Определении 1.1, и при оговоренных в нем условиях на параметры уравнений, существует по крайней мере одно слабое решение Задачи A.

Весь оставшийся текст статьи посвящен доказательству Теоремы 1.3. Несмотря на то, что логика и техника доказательства в значительной степени следуют своим аналогам в теории однокомпонентных жидкостей, мы вынуждены воспроизводить все детали с достаточной подробностью — во-первых, потому, что аналогия не означает совпадение (и следует явно проложить курс, даже если он местами параллельный), а во-вторых, потому, что статья рассчитана не только на узких специалистов, полностью владеющих всеми нюансами упомянутой теории. Там, где эта теория используется готовыми блоками, мы, естественно, ее не повторяем, а лишь даем ссылки на используемые утверждения.

В заключение данного раздела сформулируем априорные оценки классических решений Задачи A. Как обычно в теории слабых решений нелинейных дифференциальных уравнений, в дальнейшем на эти оценки нет прямых ссылок, но их формулировка и доказательство облегчают понимание и формулировку манипуляций, производимых в процессе доказательства существования обобщенного решения посредством построения решений регуляризованных задач.

Выведем сначала так называемое энергетическое соотношение. Умножая уравнение (1) на функцию $\dfrac{K\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1}$, приходим к равенству

$$p(\rho)\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \operatorname{div}\left(\frac{K}{\gamma-1}\rho^{\gamma}\boldsymbol{v}\right) = 0, \tag{15}$$

из которого следует, с учетом граничных условий (10), что

$$\int\limits_{\Omega} \nabla p(\rho)\cdot\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} = -\int\limits_{\Omega} p(\rho)\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} = 0. \tag{16}$$

Далее, используя уравнение (1) и граничные условия (10), выводим тождества

$$\int\limits_{\Omega} \operatorname{div}(\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_i)\cdot\boldsymbol{u}_i\,d\boldsymbol{x} = 0, \quad i = 1,\dots,N, \tag{17}$$

отражающие такое полезное свойство Задачи A, как интегральную ортогональность конвективных членов скоростям. Умножим (2) на $\boldsymbol{u}_i$, $i = 1,\dots,N$ и сложим. После интегрирования по Ω, с учетом равенств (16) и (17), получим энергетическое соотношение

$$\sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega}\mathbb{S}_i : (\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i)\,d\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega}\rho_i\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{u}_i\,d\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{N}\int\limits_{\Omega}\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{u}_i\,d\boldsymbol{x}. \tag{18}$$

Используя (9), (13) и (14), отсюда получаем

$$\begin{aligned} C_0\sum_{i=1}^{N}\|\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant{}& \sum_{i=1}^{N}\alpha_i\|\boldsymbol{f}_i\|_{L_{\sigma_1}(\Omega)}\|\rho\|_{L_{\frac{6\sigma_1}{5\sigma_1-6}}(\Omega)}\|\boldsymbol{u}_i\|_{L_6(\Omega)}I_\gamma \\ &+\sum_{i=1}^{N}\|\boldsymbol{g}_i\|_{L_{\frac{6}{5}}(\Omega)}\|\boldsymbol{u}_i\|_{L_6(\Omega)}, \end{aligned} \tag{19}$$

где $I_\gamma = \chi_{\{\gamma>\frac{5}{3}\}}$, откуда

$$\sum_{i=1}^{N}\|\boldsymbol{u}_i\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C_1\left(\|\rho\|_{L_{\frac{6\sigma_1}{5\sigma_1-6}}(\Omega)}I_\gamma + 1\right), \tag{20}$$

где $C_1 = C_1\Big(C_0, \{\|\boldsymbol{f}_i\|_{L_{\sigma_1}(\Omega)}\}, \{\|\boldsymbol{g}_i\|_{L_{\frac{6}{5}}(\Omega)}\}, \Omega\Big) = \mathrm{const} > 0.$

Условимся и в дальнейшем через $C_k(\cdot)$, $k \in \mathbb{N}$, обозначать величины, принимающие конечные положительные значения и зависящие от объектов, указанных в скобках или перечисленных в комментариях; здесь и далее зависимость оценок от геометрии области не конкретизируется.

Далее воспользуемся оператором Боговского $\mathcal{B}$, который любой скалярной функции f, заданной в Ω, сопоставляет векторное поле $\boldsymbol{\xi}$, определяемое из следующей задачи [3]:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\xi} = f - \overline{f}_\Omega, \quad \boldsymbol{\xi}|_{\partial\Omega} = 0, \tag{21}$$

где

$$\overline{f}_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int\limits_\Omega f \, d\boldsymbol{x} \tag{22}$$

(здесь и далее $|\Omega|$ — лебегова мера области Ω). Существуют такие способы однозначного выбора решения задачи (21), чтобы оператор $\mathcal{B}$ обладал следующими свойствами (см. [5], стр. 315–323): $\|\mathcal{B}f\|_{W^{\sigma_2+1}_{\sigma_3}(\Omega)} \leqslant C_2(\sigma_3, \Omega)\|f\|_{W^{\sigma_2}_{\sigma_3}(\Omega)}$ при всех $\sigma_3 \in (1, +\infty)$ и $\sigma_2 = -1, 0, 1, 2, \ldots$, а значит, оператор $\mathcal{B}\circ\operatorname{div}$ ограничен в $L_{\sigma_3}(\Omega)$ при всех $\sigma_3 \in (1, +\infty)$. Обозначим

$$\sigma_4 = \min\{2\gamma - 3, \gamma\} = \zeta_2(\gamma) - \gamma. \tag{23}$$

Умножим уравнения (2) скалярно на $\boldsymbol{\varphi}_i = \mathcal{B}\left(\rho^{\sigma_4}\right)$, $i = 1, \ldots, N$ и проинтегрируем по Ω, это даст для всех $i = 1, \ldots, N$ тождества

$$\alpha_i \int\limits_\Omega p(\rho)\rho^{\sigma_4} \, d\boldsymbol{x} = \alpha_i \overline{(\rho^{\sigma_4})}_\Omega \int\limits_\Omega p(\rho) \, d\boldsymbol{x} + \int\limits_\Omega \mathbb{S}_i : \left(\nabla \otimes \mathcal{B}\left(\rho^{\sigma_4}\right)\right) \, d\boldsymbol{x}$$
$$- \int\limits_\Omega (\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) : \left(\nabla \otimes \mathcal{B}\left(\rho^{\sigma_4}\right)\right) \, d\boldsymbol{x} - \int\limits_\Omega \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \mathcal{B}\left(\rho^{\sigma_4}\right) \, d\boldsymbol{x} - \int\limits_\Omega \boldsymbol{g}_i \cdot \mathcal{B}\left(\rho^{\sigma_4}\right) \, d\boldsymbol{x}. \tag{24}$$

Получим оценки интегралов в правой части (24). Сначала отметим, что из свойств $\mathcal{B}$ следует соотношение

$$\|\mathcal{B}\left(\rho^{\sigma_4}\right)\|_{W^1_{\sigma_3}(\Omega)} \leqslant C_2 \|\rho\|^{\sigma_4}_{L_{\sigma_3\sigma_4}(\Omega)} \tag{25}$$

при всех $\sigma_3 > 1$ таких, что $\sigma_3\sigma_4 \geqslant 1$. Теперь, используя условие (11) и интерполяционное неравенство $\|\rho\|_{L_\gamma(\Omega)} \leqslant \|\rho\|^{1-\sigma_5}_{L_1(\Omega)} \|\rho\|^{\sigma_5}_{L_{\sigma_4+\gamma}(\Omega)}$, в котором

$\sigma_5 = \dfrac{(\sigma_4 + \gamma)(\gamma - 1)}{(\sigma_4 + \gamma)\gamma - \gamma} \in (0, 1)$, получаем оценки

$$\alpha_i \overline{(\rho^{\sigma_4})}_\Omega \int\limits_\Omega p(\rho) \, d\boldsymbol{x} \leqslant C_3 \|\rho\|^{\sigma_4+\gamma\sigma_5}_{L_{\sigma_4+\gamma}(\Omega)}, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{26}$$

где $C_3 = C_3(K, m, \gamma, \sigma_4, \sigma_5, |\Omega|)$. В силу (20) и интерполяционного неравенства

$$\|\rho\|_{L_{\frac{6\sigma_1}{5\sigma_1-6}}(\Omega)} \leqslant \|\rho\|^{1-\sigma_6}_{L_1(\Omega)} \|\rho\|^{\sigma_6}_{L_{\sigma_4+\gamma}(\Omega)}, \tag{27}$$

где $\sigma_6 = \dfrac{(\sigma_4+\gamma)(\sigma_1+6)}{6\sigma_1(\sigma_4+\gamma)-6\sigma_1} \in (0,1)$, справедливого при любых[2]

$$\sigma_1 > \frac{6(\sigma_4+\gamma)}{5(\sigma_4+\gamma)-6}, \tag{28}$$

верны соотношения

$$\int\limits_{\Omega} \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \mathcal{B}(\rho^{\sigma_4}))\, d\boldsymbol{x} \leqslant C_4(\|\rho\|^{\sigma_6}_{L_{\sigma_4+\gamma}(\Omega)} I_\gamma + 1)\|\rho\|^{\sigma_4}_{L_{\sigma_4+\gamma}(\Omega)}, \quad i=1,\dots,N, \tag{29}$$

где $C_4 = C_4(C_1, C_2, N, m, \boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{M}, \gamma, \sigma_4, \sigma_6, |\Omega|)$. Благодаря (20), (25) $\left(\text{с } \sigma_3 = \dfrac{3(\sigma_4+\gamma)}{2(\sigma_4+\gamma)-3}\right)$ и (27), справедливы для всех $i=1,\dots,N$ оценки

$$-\int\limits_{\Omega} (\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) : (\nabla \otimes \mathcal{B}(\rho^{\sigma_4}))\, d\boldsymbol{x} \leqslant C_5(\|\rho\|^{2\sigma_6}_{L_{\sigma_4+\gamma}(\Omega)} I_\gamma + 1)\|\rho\|^{\sigma_4+1}_{L_{\sigma_4+\gamma}(\Omega)}, \tag{30}$$

где $C_5 = C_5(C_1, C_2, m, \gamma, \sigma_4, \sigma_6, \Omega)$. Наконец, в силу (25) с $\sigma_3 = 2$ и (27) имеют место оценки

$$\begin{aligned} &-\int\limits_{\Omega} \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \mathcal{B}(\rho^{\sigma_4})\, d\boldsymbol{x} - \int\limits_{\Omega} \boldsymbol{g}_i \cdot \mathcal{B}(\rho^{\sigma_4})\, d\boldsymbol{x} \\ &\leqslant C_6(\|\rho\|^{\sigma_6}_{L_{\sigma_4+\gamma}(\Omega)} I_\gamma + 1)\|\rho\|^{\sigma_4}_{L_{\sigma_4+\gamma}(\Omega)}, \qquad i=1,\dots,N, \end{aligned} \tag{31}$$

где $C_6 = C_6(C_2, \{\|\boldsymbol{f}_i\|_{L_{\sigma_1}(\Omega)}\}, \{\|\boldsymbol{g}_i\|_{L_{\frac{6}{5}}(\Omega)}\}, m, \gamma, \sigma_4, \sigma_6, \Omega)$.

Таким образом, из (24), с учетом (26), (29)–(31) (при условии (28)), следует соотношение

$$\|\rho\|^{\sigma_4+\gamma}_{L_{\sigma_4+\gamma}(\Omega)} \leqslant C_7 \left(\|\rho\|^{\sigma_4+\gamma\sigma_5}_{L_{\sigma_4+\gamma}(\Omega)} + \|\rho\|^{\sigma_4+1}_{L_{\sigma_4+\gamma}(\Omega)} + \|\rho\|^{\sigma_4+2\sigma_6+1}_{L_{\sigma_4+\gamma}(\Omega)} I_\gamma + 1 \right), \tag{32}$$

где $C_7 = C_7(C_{3-6}, \{\alpha_i\}, K, \sigma_4, \sigma_6)$. Из этого соотношения при

$$\begin{aligned} &\sigma_1 \text{ любое}, \quad \frac{3}{2} < \gamma \leqslant \frac{5}{3}; \qquad \sigma_1 > \frac{6}{3\gamma-5}, \quad \frac{5}{3} < \gamma \leqslant 3; \\ &\sigma_1 > \frac{12\gamma}{(2\gamma-3)(3\gamma-1)}, \quad 3 \leqslant \gamma < +\infty \end{aligned} \tag{33}$$

(отметим что при $\gamma \geqslant 3$ это условие автоматически следует из (28), и во всех случаях это условие следует из $\sigma_1 > \zeta_1(\gamma)$) непосредственно следует, что

$$\|\rho\|_{L_{\zeta_2(\gamma)}(\Omega)} \leqslant C_8(C_7, \gamma, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6). \tag{34}$$

Значит из (20) и (27) получаем оценки

$$\|\boldsymbol{u}_i\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C_9(C_1, C_8, m, \sigma_6), \quad i=1,\dots,N. \tag{35}$$

Оценки (34) и (35) содержат всю существенную информацию, на которой основано дальнейшее построение слабого решения Задачи А.

Замечание 1.4. Для замыкания (32) при $\gamma \leqslant 3$ на внешние силы можно было наложить альтернативные требования: $\boldsymbol{f}_i \in L_{\sigma_1}(\Omega)$ $\forall \sigma_1 > \dfrac{6(\sigma_4+\gamma)}{5(\sigma_4+\gamma)-6}$,

[2] В частности, можно взять $\sigma_1 = 6\gamma/(5\gamma-6)$, при этом σ_6 совпадает с σ_5.

причем $\boldsymbol{f}_i = 0$, если $\dfrac{3}{2} < \gamma \leqslant \dfrac{5}{3} + \dfrac{2}{\sigma_1}$, $i = 1, \ldots, N$. При $\gamma > 3$ оценка (32) замыкается без каких-либо ограничений.

Замечание 1.5. Оценку (34) можно получить, предположив, что в правой части (2) вместо $\rho_i \boldsymbol{f}_i$ стоит $\rho \boldsymbol{f}$ при всех $i = 1, \ldots, N$, где либо $\boldsymbol{f} \in L_{\sigma_1}(\Omega)$ $\forall \sigma_1 > \zeta_1(\gamma)$, причем $\boldsymbol{f} = \nabla \Phi$, $\Phi \in W^1_{\sigma_1}(\Omega)$, если $\dfrac{3}{2} < \gamma \leqslant \dfrac{5}{3}$, либо $\boldsymbol{f} \in L_{\sigma_1}(\Omega)$ $\forall \sigma_1 > \dfrac{6(\sigma_4 + \gamma)}{5(\sigma_4 + \gamma) - 6}$, причем $\boldsymbol{f} = \nabla \Phi$, $\Phi \in W^1_{\sigma_1}(\Omega)$, если $\dfrac{3}{2} < \gamma \leqslant \dfrac{5}{3} + \dfrac{2}{\sigma_1}$.

2. Конструкция приближенных решений

Будем искать приближенное решение Задачи A как решение следующей краевой задачи (индексы ε и δ у величин, от них зависящих, мы пока опускаем):

$$-\varepsilon \Delta \rho + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) + \varepsilon \rho = \varepsilon \frac{m}{|\Omega|}, \tag{36}$$

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{N} L_{ij} \boldsymbol{u}_j + \frac{\varepsilon}{2} \rho_i \boldsymbol{u}_i + \frac{\varepsilon}{2} \frac{m}{|\Omega|} \alpha_i \boldsymbol{u}_i + \frac{1}{2} \rho_i (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{u}_i + \frac{1}{2} \operatorname{div}(\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) \\ + \alpha_i \nabla \widetilde{p}(\rho) = \rho_i \widetilde{\boldsymbol{f}}_i + \widetilde{\boldsymbol{g}}_i, \quad i = 1, \ldots, N, \end{gathered} \tag{37}$$

$$\boldsymbol{u}_i|_{\partial\Omega} = 0, \quad i = 1, \ldots, N, \quad \nabla \rho \cdot \boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0, \tag{38}$$

которую условимся называть Задачей $\mathrm{A}_{\varepsilon,\delta}$. Здесь приняты следующие обозначения: $L_{ij} = -(\lambda_{ij} + \mu_{ij}) \nabla \operatorname{div} - \mu_{ij} \Delta$, $i, j = 1, \ldots, N$ (отметим, что $\operatorname{div} \mathbb{S}_i = -\sum\limits_{j=1}^{N} L_{ij} \boldsymbol{u}_j$, $i = 1, \ldots, N$); $\widetilde{p}(s) = p(s) + \delta(s^\beta + s^2)$; $\varepsilon, \delta \in (0, 1]$ — малые параметры (которые впоследствии будут устремлены к нулю), а показатель

$$\beta > \max\{\gamma, 3\} \tag{39}$$

выбран произвольно и останется фиксированным; наконец, регулярные векторные поля $\widetilde{\boldsymbol{f}}_i$, $\widetilde{\boldsymbol{g}}_i \in C(\overline{\Omega})$, $i = 1, \ldots, N$, подобраны так, чтобы

$$\|\widetilde{\boldsymbol{f}}_i\|_{L_{\sigma_1}(\Omega)} \leqslant 2 \|\boldsymbol{f}_i\|_{L_{\sigma_1}(\Omega)}, \quad \|\widetilde{\boldsymbol{g}}_i\|_{L_{\frac{6}{5}}(\Omega)} \leqslant 2 \|\boldsymbol{g}_i\|_{L_{\frac{6}{5}}(\Omega)}, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{40}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{f}}_i \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \boldsymbol{f}_i \quad \text{в} \quad L_{\sigma_1}(\Omega), \quad \widetilde{\boldsymbol{g}}_i \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \boldsymbol{g}_i \quad \text{в} \quad L_{\frac{6}{5}}(\Omega), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{41}$$

Замечание 2.1. В литературе (см, например, [9], Раздел 6.5, стр. 84 или [13], Раздел 4.3.3, стр. 203) нередко рассматривается более общий вариант регуляризации (с двумя малыми параметрами): $-\varepsilon \Delta \rho + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) + \alpha \rho = \alpha h$, в котором предельный переход по $\varepsilon \to 0$ может осуществляться независимо от параметра α. Такой путь может быть полезен, например, в случае использования стационарной задачи как этапа для анализа соответствующей нестационарной, но в данной работе в этом нет необходимости, и мы для экономии места полагаем $\alpha = \varepsilon$.

Как видно, Задача $\mathrm{A}_{\varepsilon,\delta}$ представляет собой не что иное как равномерно эллиптическую регуляризацию Задачи A плюс дополнительные слагаемые и граничные условия, призванные сохранить полезные свойства исходной задачи, играющие важную роль в теории вязкого газа, например, интегральную ортогональность конвективных членов скоростям.

Решение Задачи $\mathrm{A}_{\varepsilon,\delta}$ будем строить сильное, понимая под этим следующее.

Определение 2.2. Сильным решением Задачи $\mathrm{A}_{\varepsilon,\delta}$ называется совокупность, состоящая из неотрицательной функция $\rho \in W^2_{\sigma_7}(\Omega)$ (где $\sigma_7 > 3$) и векторных полей $\boldsymbol{u}_i \in W^2_{\sigma_7}(\Omega)$, $i = 1,\dots,N$ таких, что уравнения (36), (37) выполнены п. в. в Ω, и п. в. на $\partial\Omega$ верны краевые условия (38).

Основным результатом в данном разделе является следующая

Теорема 2.3. В условиях Теоремы 1.3 при любых $\varepsilon,\delta \in (0,1]$ и β, удовлетворяющих (39), и при любых $\widetilde{\boldsymbol{f}}_i$, $\widetilde{\boldsymbol{g}}_i \in C(\overline{\Omega})$, $i = 1,\dots,N$, краевая Задача $\mathrm{A}_{\varepsilon,\delta}$ имеет по крайней мере одно сильное решение.

Доказательство Теоремы 2.3. Доказывать существование сильного решения Задачи $\mathrm{A}_{\varepsilon,\delta}$ будем, используя принцип неподвижной точки Лерэ—Шаудера (см. [6], Теорема 11.3, стр. 280), который примéним к оператору $\boldsymbol{\Psi}$, сформированному ниже. Сначала определим несколько «промежуточных» операторов, суперпозицией которых будет оператор $\boldsymbol{\Psi}$.

Первым определим оператор $\mathcal{R}$, действующий по закону $\mathcal{R} : \boldsymbol{w} \mapsto r$, где для любых $\boldsymbol{w} \in B_{\sigma_7}(\Omega) := \{\, \boldsymbol{w} \in W^2_{\sigma_7}(\Omega) : \ \boldsymbol{w}|_{\partial\Omega} = 0 \,\}$ функция r строится как решение задачи

$$-\varepsilon\Delta r + \operatorname{div}(r\boldsymbol{w}) + \varepsilon r = \varepsilon\frac{m}{|\Omega|}, \quad \nabla r \cdot \boldsymbol{n}|_{\partial\Omega} = 0;$$

тогда $r = \mathcal{R}(\boldsymbol{w}) \geqslant 0$ (см. [13], Предложение 4.29, стр. 213), и $\displaystyle\int_\Omega r\, d\boldsymbol{x} = m$. Ввиду стандартных свойств эллиптических краевых задач (см., например, [1] и [2]) оператор $\mathcal{R} : \ B_{\sigma_7}(\Omega) \to W^2_{\sigma_7}(\Omega)$, причем непрерывен, поскольку при всех $\boldsymbol{w}^k \in W^2_{\sigma_7}(\Omega)$, $k = 1,2$, верно

$$\|\mathcal{R}(\boldsymbol{w}^1)-\mathcal{R}(\boldsymbol{w}^2)\|_{W^2_{\sigma_7}(\Omega)} \leqslant C_{10}(\|\boldsymbol{w}^1\|_{C^1(\overline{\Omega})}, \|\boldsymbol{w}^2\|_{C^1(\overline{\Omega})}, m, \varepsilon, \sigma_7, \Omega)\|\boldsymbol{w}^1-\boldsymbol{w}^2\|_{W^2_{\sigma_7}(\Omega)}$$

(отметим, что в C_{10} зависимость от первого и второго аргумента является локально ограниченной[3]).

Следующим вспомогательным оператором является $\mathcal{U} : \ \mathbf{g} \mapsto \mathbf{h}$, где по заданному вектору $\mathbf{g} = (\boldsymbol{g}_1,\dots,\boldsymbol{g}_N)$ с «компонентами» $\boldsymbol{g}_i \in L_{\sigma_7}(\Omega)$, $i = 1,\dots,N$, строится $\mathbf{h} = (\boldsymbol{h}_1,\dots,\boldsymbol{h}_N)$ как решение задачи

$$\sum_{j=1}^N L_{ij}\boldsymbol{h}_j = \boldsymbol{g}_i, \quad \boldsymbol{h}_i|_{\partial\Omega} = 0, \qquad i = 1,\dots,N,$$

которая является равномерно эллиптической в силу (7). Очевидно, что $\mathcal{U} : \ L_{\sigma_7}(\Omega) \to B_{\sigma_7}(\Omega)$ непрерывным образом, т. к. при любых $\mathbf{g}^k \in W^2_{\sigma_7}(\Omega)$, $k = 1,2$, верно

$$\|\mathcal{U}(\mathbf{g}^1) - \mathcal{U}(\mathbf{g}^2)\|_{W^2_{\sigma_7}(\Omega)} \leqslant C_{11}(\sigma_7, \boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{M}, \Omega)\left\|\mathbf{g}^1 - \mathbf{g}^2\right\|_{L_{\sigma_7}(\Omega)}.$$

[3]Т. е. конечен $\sup C_{10}$ по любому множеству вида $\|\boldsymbol{w}^1\|_{C^1(\overline{\Omega})} + \|\boldsymbol{w}^2\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leqslant \mathrm{const}$.

Наконец, третий набор операторов $\mathcal{G}_1,\ldots, \mathcal{G}_N$ определим так:

$$\mathcal{G}_i(\mathbf{w}) = -\frac{\varepsilon}{2}\alpha_i r\boldsymbol{w}_i - \frac{\varepsilon}{2}\frac{m}{|\Omega|}\alpha_i\boldsymbol{w}_i - \frac{1}{2}\alpha_i r\left(\left(\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\boldsymbol{w}_j\right)\cdot\nabla\right)\boldsymbol{w}_i$$

$$-\frac{1}{2}\mathrm{div}\left(\left(\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\boldsymbol{w}_j\right)\otimes(\alpha_i r\boldsymbol{w}_i)\right) - \alpha_i\nabla\widetilde{p}(r) + \alpha_i r\widetilde{\boldsymbol{f}}_i + \widetilde{\boldsymbol{g}}_i, \quad i = 1,\ldots,N,$$

где по заданному $\mathbf{w} = (\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_N) \in B_{\sigma_7}(\Omega)$ строится

$$r = \mathcal{R}\left(\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\boldsymbol{w}_j\right) \in W^2_{\sigma_7}(\Omega).$$

Легко видеть, что $\mathcal{G}_i : B_{\sigma_7}(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$, $i = 1,\ldots,N$. Более того, $\mathcal{G}_i$, $i = 1,\ldots,N$ определены, ограничены и непрерывны как операторы из $C^1(\overline{\Omega})$ в $C(\overline{\Omega})$, а потому компактны (вполне непрерывны) как операторы из $B_{\sigma_7}(\Omega)$ в $L_{\sigma_7}(\Omega)$, при этом соответствующие оценки зависят только от C_{10}, $\{\|\widetilde{\boldsymbol{f}}_i\|_{C(\overline{\Omega})}\}$, $\{\|\widetilde{\boldsymbol{g}}_i\|_{C(\overline{\Omega})}\}$, $\|\mathbf{w}\|_{C^1(\overline{\Omega})}$, K, N, m, β, γ, σ_7 и Ω (причем зависимость от $\|\mathbf{w}\|_{C^1(\overline{\Omega})}$, $\|\widetilde{\boldsymbol{f}}_i\|_{C(\overline{\Omega})}$, $\|\widetilde{\boldsymbol{g}}_i\|_{C(\overline{\Omega})}$, $i = 1,\ldots,N$, является локально ограниченной).

В итоге положим $\boldsymbol{\Psi} = \mathcal{U}\circ(\mathcal{G}_1,\ldots,\mathcal{G}_N)$, т. е. для любых $\mathbf{u} = (\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_N) \in B_{\sigma_7}(\Omega)$ полагаем

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{u}) = \mathcal{U}(\mathcal{G}_1(\mathbf{u}),\ldots,\mathcal{G}_N(\mathbf{u})).$$

По построению, оператор $\boldsymbol{\Psi} : B_{\sigma_7}(\Omega) \to B_{\sigma_7}(\Omega)$ корректно определен, вполне непрерывен, и искомое сильное решение задачи (36)–(38) имеет вид $(\mathcal{R}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_N)$, где $\boldsymbol{v} = \sum\limits_{j=1}^{N}\alpha_j\boldsymbol{u}_j$ (см. (4)), а $\mathbf{u}$ — неподвижная точка $\boldsymbol{\Psi}$.

Для применения принципа Лерэ—Шаудера остается получить равномерную по параметру $\lambda \in (0,1]$ априорную оценку решений операторного уравнения $\lambda\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ в пространстве $W^2_{\sigma_7}(\Omega)$, т. е. оценить в этом пространстве предполагаемое решение $(\rho, \boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_N)$ краевой Задачи $A^{(\lambda)}_{\varepsilon,\delta}$ равномерно по $\lambda \in (0,1]$, где Задача $A^{(\lambda)}_{\varepsilon,\delta}$ состоит из соотношений (индекс λ у величин, зависящих от λ, опускаем)

(42)
$$\sum_{j=1}^{N}L_{ij}\boldsymbol{u}_j + \frac{\lambda\varepsilon}{2}\rho_i\boldsymbol{u}_i + \frac{\lambda\varepsilon}{2}\frac{m}{|\Omega|}\alpha_i\boldsymbol{u}_i + \frac{\lambda}{2}\rho_i(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_i + \frac{\lambda}{2}\mathrm{div}(\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_i)$$
$$+\lambda\alpha_i\nabla\widetilde{p}(\rho) = \lambda\rho_i\widetilde{\boldsymbol{f}}_i + \lambda\widetilde{\boldsymbol{g}}_i, \quad i = 1,\ldots,N,$$

в совокупности с (36) и (38), где $\rho_i = \alpha_i\rho$, $i = 1,\ldots,N$.

Умножим (42) скалярно на $\boldsymbol{u}_i$, проинтегрируем по Ω (пользуясь граничными условиями (38)) и просуммируем по $i = 1, \dots, N$, получим

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\mathbb{S}_i : (\nabla\otimes\boldsymbol{u}_i)\,d\boldsymbol{x} + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\rho_i|\boldsymbol{u}_i|^2\,d\boldsymbol{x} + \frac{\varepsilon m}{2|\Omega|}\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\int_{\Omega}|\boldsymbol{u}_i|^2\,d\boldsymbol{x}\\ -\int_{\Omega}\widetilde{p}(\rho)\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}(\rho_i\widetilde{\boldsymbol{f}}_i + \widetilde{\boldsymbol{g}}_i)\cdot\boldsymbol{u}_i\,d\boldsymbol{x}.\end{aligned}\tag{43}$$

Интегрируя уравнение (36) по области Ω и учитывая (38), получаем равенство

$$\int_{\Omega}\rho\,d\boldsymbol{x} = m.\tag{44}$$

Умножая теперь уравнение (36) на функцию $G'(\rho)$ (где $G : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция), приходим к равенству

$$\begin{aligned}\varepsilon G''(\rho)|\nabla\rho|^2 - \varepsilon\mathrm{div}(G'(\rho)\nabla\rho) + (\rho G'(\rho) - G(\rho))\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\\ +\mathrm{div}\,(G(\rho)\boldsymbol{v}) + \varepsilon\rho G'(\rho) = \varepsilon\frac{m}{|\Omega|}G'(\rho).\end{aligned}\tag{45}$$

Полагая в (45) $G(s) = \dfrac{K}{\gamma-1}\rho^{\gamma} + \dfrac{\delta}{\beta-1}\rho^{\beta} + \delta\rho^2$, получим с учетом (38) и (44) равенство

$$\begin{aligned}-\int_{\Omega}\widetilde{p}(\rho)\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} = \frac{\varepsilon K\gamma}{\gamma-1}\int_{\Omega}\rho^{\gamma}\,d\boldsymbol{x} + \frac{\varepsilon\delta\beta}{\beta-1}\int_{\Omega}\rho^{\beta}\,d\boldsymbol{x} + 2\varepsilon\delta\int_{\Omega}\rho^2\,d\boldsymbol{x}\\ -\frac{\varepsilon Km}{|\Omega|}\frac{\gamma}{\gamma-1}\int_{\Omega}\rho^{\gamma-1}\,d\boldsymbol{x} - \frac{\varepsilon\delta m}{|\Omega|}\frac{\beta}{\beta-1}\int_{\Omega}\rho^{\beta-1}\,d\boldsymbol{x} - \frac{2\varepsilon\delta m^2}{|\Omega|}+\\ +\varepsilon K\gamma\int_{\Omega}\rho^{\gamma-2}|\nabla\rho|^2\,d\boldsymbol{x} + \varepsilon\delta\beta\int_{\Omega}\rho^{\beta-2}|\nabla\rho|^2\,d\boldsymbol{x} + 2\varepsilon\delta\int_{\Omega}|\nabla\rho|^2\,d\boldsymbol{x},\end{aligned}$$

из которого следует неравенство

$$\begin{aligned}-\int_{\Omega}\widetilde{p}(\rho)\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x} \geqslant \frac{\varepsilon K\gamma}{2(\gamma-1)}\int_{\Omega}\rho^{\gamma}\,d\boldsymbol{x} + \frac{\varepsilon\delta\beta}{2(\beta-1)}\int_{\Omega}\rho^{\beta}\,d\boldsymbol{x}\\ +2\varepsilon\delta\int_{\Omega}\rho^2\,d\boldsymbol{x} + \varepsilon K\gamma\int_{\Omega}\rho^{\gamma-2}|\nabla\rho|^2\,d\boldsymbol{x} + \varepsilon\delta\beta\int_{\Omega}\rho^{\beta-2}|\nabla\rho|^2\,d\boldsymbol{x}\\ +2\varepsilon\delta\int_{\Omega}|\nabla\rho|^2\,d\boldsymbol{x} - C_{12}(m,\beta,\gamma,|\Omega|,K).\end{aligned}\tag{46}$$

Из соотношения (43), в силу (9), (46) и того факта, что $\dfrac{1}{\lambda} \geqslant 1$, следует неравенство[4]

$$\begin{gathered} C_0 \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} |\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i|^2 \, d\boldsymbol{x} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} \rho_i |\boldsymbol{u}_i|^2 \, d\boldsymbol{x} + \frac{\varepsilon m}{2|\Omega|} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \int\limits_{\Omega} |\boldsymbol{u}_i|^2 \, d\boldsymbol{x} \\ + \frac{\varepsilon K \gamma}{2(\gamma-1)} \int\limits_{\Omega} \rho^{\gamma} \, d\boldsymbol{x} + \frac{\varepsilon \delta \beta}{2(\beta-1)} \int\limits_{\Omega} \rho^{\beta} \, d\boldsymbol{x} + 2\varepsilon\delta \int\limits_{\Omega} \rho^2 \, d\boldsymbol{x} \\ + \varepsilon K \gamma \int\limits_{\Omega} \rho^{\gamma-2} |\nabla \rho|^2 \, d\boldsymbol{x} + \varepsilon\delta\beta \int\limits_{\Omega} \rho^{\beta-2} |\nabla \rho|^2 \, d\boldsymbol{x} + 2\varepsilon\delta \int\limits_{\Omega} |\nabla \rho|^2 \, d\boldsymbol{x} \\ \leqslant \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} (\rho_i \widetilde{\boldsymbol{f}}_i + \widetilde{\boldsymbol{g}}_i) \cdot \boldsymbol{u}_i \, d\boldsymbol{x} + C_{12}, \end{gathered} \tag{47}$$

откуда ввиду

$$C_0 \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} |\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i|^2 \, d\boldsymbol{x} \geqslant C_{13}(C_0, \Omega) \sum_{i=1}^{N} \|\boldsymbol{u}_i\|^2_{W_2^1(\Omega)},$$

$$\sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} (\rho_i \widetilde{\boldsymbol{f}}_i + \widetilde{\boldsymbol{g}}_i) \cdot \boldsymbol{u}_i \, dx \leqslant \frac{C_{13}}{2} \sum_{i=1}^{N} \|\boldsymbol{u}_i\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \frac{\varepsilon\delta\beta}{4(\beta-1)} \|\rho\|^{\beta}_{L_\beta(\Omega)} + C_{14},$$

где $C_{14} = C_{14}\Big(C_{13}, \{\|\widetilde{\boldsymbol{f}}_i\|_{C(\overline{\Omega})}\}, \{\|\widetilde{\boldsymbol{g}}_i\|_{C(\overline{\Omega})}\}, \beta, \delta, \varepsilon, \Omega\Big)$, получаем равномерную по λ оценку

$$\sum_{i=1}^{N} \|\boldsymbol{u}_i\|_{W_2^1(\Omega)} + \|\rho\|_{L_\beta(\Omega)} + \Big\|\nabla\Big(\rho^{\frac{\beta}{2}}\Big)\Big\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_{15}\left(C_{12-14}, \beta, \delta, \varepsilon\right).$$

Отсюда, в частности, следует

$$\|\rho\|_{L_{3\beta}(\Omega)} \leqslant C_{16}\left(C_{15}, \beta, \Omega\right), \qquad \sum_{i=1}^{N} \|\boldsymbol{u}_i\|_{L_6(\Omega)} \leqslant C_{17}\left(C_{15}, \Omega\right). \tag{48}$$

Из (36) и (38) в силу последних двух неравенств и априорных оценок решений эллиптических задач (см. [13], Лемма 4.27, стр. 211 и Лемма 3.17, стр. 169), получаем

$$\|\nabla\rho\|_{L_{\frac{6\beta}{\beta+2}}(\Omega)} \leqslant C_{18}\left(C_{16}, C_{17}, m, \beta, \varepsilon, \Omega\right),$$

а в силу ограниченности вложения $W^1_{\frac{6\beta}{\beta+2}}(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$ $\Big($отметим, что благодаря (48), функция ρ равномерно по λ оценена в пространстве $L_{\frac{6\beta}{\beta+2}}(\Omega)\Big)$, приходим к оценке

$$\|\rho\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant C_{19}\left(C_{16}, C_{18}, \beta, \Omega\right).$$

Таким образом, $\|\rho\boldsymbol{u}_i\|_{L_6(\Omega)} \leqslant C_{20}\left(C_{17}, C_{19}\right)$, $i = 1, \ldots, N$.

[4]Отметим, что во-первых в этом неравенстве константа C_{12} не зависит от ε, а во-вторых оно относится и к случаю $\lambda = 1$, т. е. рассмотрена и исходная Задача $\mathrm{A}_{\varepsilon,\,\delta}$.

Введем обозначения

$$\boldsymbol{\eta}_i = \frac{1}{2|\Omega|}\int\limits_{\Omega}\rho_i(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_i\,d\boldsymbol{x}, \quad i=1,\ldots,N,$$

$$\boldsymbol{H}_i = \lambda\left(-\frac{\varepsilon}{2}\rho_i\boldsymbol{u}_i - \frac{\varepsilon m}{2|\Omega|}\alpha_i\boldsymbol{u}_i + \rho_i\widetilde{\boldsymbol{f}}_i + \widetilde{\boldsymbol{g}}_i - \boldsymbol{\eta}_i\right), \quad i=1,\ldots,N.$$

Обозначим через $\mathbb{V}_i$, $i=1,\ldots,N$, решения краевых задач

$$\operatorname{div}\mathbb{V}_i = \frac{1}{2}\rho_i(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_i - \boldsymbol{\eta}_i, \quad \mathbb{V}_i|_{\partial\Omega}=0, \quad i=1,\ldots,N, \tag{49}$$

и положим $\mathbb{G}_i = \lambda\left(-\alpha_i\widetilde{p}(\rho)\mathbb{I} - \frac{1}{2}\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_i - \mathbb{V}_i\right)$, $i=1,\ldots,N$. В этих обозначениях уравнения (42) принимают вид

$$\sum_{j=1}^{N} L_{ij}\boldsymbol{u}_j = \boldsymbol{H}_i + \operatorname{div}\mathbb{G}_i, \quad i=1,\ldots,N. \tag{50}$$

Так как правые части уравнений (49) равномерно ограничены по λ в пространстве $L_{\frac{3}{2}}(\Omega)$, то для $\mathbb{V}_i$, $i=1,\ldots,N$, справедливы неравенства (см. [13], Лемма 3.17, стр. 169) $\|\mathbb{V}_i\|_{W^1_{\frac{3}{2}}(\Omega)} \leqslant C_{21}\,(C_{15},C_{20},\Omega)$, $i=1,\ldots,N$. В результате заключаем, что при всех $i=1,\ldots,N$ имеют место оценки

$$\|\boldsymbol{H}_i\|_{L_6(\Omega)} + \|\mathbb{G}_i\|_{L_3(\Omega)} \leqslant C_{22},$$

где $C_{22} = C_{22}\left(C_{15},C_{17},C_{19-21},\{\|\widetilde{\boldsymbol{f}}_i\|_{C(\overline{\Omega})}\},\{\|\widetilde{\boldsymbol{g}}_i\|_{C(\overline{\Omega})}\},K,m,\beta,\gamma,\Omega\right)$. Следовательно, из уравнений (50) и граничных условий (38), в силу оценок для решений эллиптических задач (см., например, [1], [2]) вытекает, что

$$\|\boldsymbol{u}_i\|_{W^1_3(\Omega)} \leqslant C_{23}\left(C_{22},\boldsymbol{\Lambda},\mathbf{M},\Omega\right), \quad i=1,\ldots,N,$$

и, в силу ограниченности вложения $W^1_3(\Omega)$ в $L_{2\sigma_7}(\Omega)$, приходим к соотношениям $\|\boldsymbol{u}_i\|_{L_{2\sigma_7}(\Omega)} \leqslant C_{24}\,(C_{23},\sigma_7,\Omega)$, $i=1,\ldots,N$. Из (36), (38), благодаря результатам о регулярности решений эллиптических задач (см. [13], Лемма 4.27, стр. 211) получаем, что

$$\|\rho\|_{W^2_3(\Omega)} \leqslant C_{25}\left(C_{18},C_{19},C_{23},C_{24},m,\beta,\varepsilon,\sigma_7,\Omega\right).$$

Отсюда, в силу ограниченности вложения $W^2_3(\Omega)$ в $W^1_{2\sigma_7}(\Omega)$, следует неравенство $\|\rho\|_{W^1_{2\sigma_7}(\Omega)} \leqslant C_{26}\,(C_{25},\sigma_7,\Omega)$. Таким образом, для функций $\boldsymbol{H}_i$ и $\mathbb{G}_i$ получаем при всех $i=1,\ldots,N$ оценки

$$\|\boldsymbol{H}_i\|_{L_{2\sigma_7}(\Omega)} + \|\mathbb{G}_i\|_{L_{\sigma_7}(\Omega)} \leqslant C_{27}, \tag{51}$$

где $C_{27} = C_{27}\left(C_{15},C_{19},C_{23},C_{24},\{\|\widetilde{\boldsymbol{f}}_i\|_{C(\overline{\Omega})}\},\{\|\widetilde{\boldsymbol{g}}_i\|_{C(\overline{\Omega})}\},K,m,\beta,\gamma,\sigma_7,\Omega\right)$, благодаря которым приходим к соотношениям $\|\boldsymbol{u}_i\|_{W^1_{\sigma_7}(\Omega)} \leqslant C_{28}\,(C_{27},\boldsymbol{\Lambda},\mathbf{M},\sigma_7,\Omega)$, $i=1,\ldots,N$, и (т. к. $\sigma_7>3$) $\|\boldsymbol{u}_i\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant C_{29}\,(C_{28},\sigma_7,\Omega)$, $i=1,\ldots,N$. С помощью этих неравенств и стандартных оценок решений эллиптических задач из (36) и (38) выводим, что

$$\|\rho\|_{W^2_{\sigma_7}(\Omega)} \leqslant C_{30}\left(C_{19},C_{26},C_{28},C_{29},m,\varepsilon,\sigma_7,\Omega\right),$$

откуда (ввиду $\sigma_7 > 3$) $\|\nabla\rho\|_{C(\overline{\Omega})} \leqslant C_{31}(C_{30}, \sigma_7, \Omega)$. Для функций $\mathbb{G}_i$ теперь справедливы при $i = 1, \ldots, N$ следующие неравенства

$$\|\operatorname{div} \mathbb{G}_i\|_{L_{\sigma_7}(\Omega)} \leqslant C_{32}(C_{19}, C_{28}, C_{29}, C_{31}, K, \beta, \gamma, \sigma_7, \Omega).$$

Отсюда, из (51) и оценок для решений эллиптических задач следует, наконец, что

$$\|\boldsymbol{u}_i\|_{W^2_{\sigma_7}(\Omega)} \leqslant C_{33}(C_{27}, C_{32}, \boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{M}, \sigma_7, \Omega), \quad i = 1, \ldots, N.$$

Итак, в силу принципа Лерэ–Шаудера можно утверждать, что Задача $\mathrm{A}_{\varepsilon,\delta}$ имеет по крайней мере одно сильное решение. Теорема 2.3 доказана.

3. Предельный переход по $\varepsilon \to 0$

Получим сначала оценки решений Задачи $\mathrm{A}_{\varepsilon,\delta}$, равномерные по малому параметру ε. Умножим (37) скалярно на $\boldsymbol{u}_i$, проинтегрируем по Ω (пользуясь граничными условиями (38)) и просуммируем по $i = 1, \ldots, N$. В результате получим неравенство (47), из которого следуют оценки (отныне у величин, зависящих от ε, будем писать индекс ε)

$$\sum_{i=1}^{N} \Big(\|\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}\|^2_{W^1_2(\Omega)} + \varepsilon \|\sqrt{\rho_\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}\|^2_{L_2(\Omega)} \Big) \leqslant C_{34} \Big(1 + \|\rho_\varepsilon\|^2_{L_{2\beta}(\Omega)} \Big), \tag{52}$$

$$\varepsilon \|\nabla\rho_\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant C_{35} \Big(1 + \|\rho_\varepsilon\|^2_{L_{2\beta}(\Omega)} \Big), \tag{53}$$

где $C_{34} = C_{34}\Big(C_{12}, C_{13}, \{\|\boldsymbol{f}_i\|_{L_{\sigma_1}(\Omega)}\}, \{\|\boldsymbol{g}_i\|_{L_{6/5}(\Omega)}\}, \{\alpha_i\}, \beta, \sigma_1, \Omega\Big)$,
$C_{35} = C_{35}\Big(C_{12}, C_{13}, \{\|\boldsymbol{f}_i\|_{L_{\sigma_1}(\Omega)}\}, \{\|\boldsymbol{g}_i\|_{L_{6/5}(\Omega)}\}, \beta, \delta, \sigma_1, \Omega\Big)$.

Умножим уравнения (37) скалярно на $\boldsymbol{\varphi}_i = \mathcal{B}\left(\rho_\varepsilon^\beta\right)$, $i = 1, \ldots, N$, и проинтегрируем по Ω, это даст тождества

$$\begin{aligned}
\alpha_i \int_\Omega \widetilde{p}(\rho_\varepsilon)\rho_\varepsilon^\beta \, d\boldsymbol{x} &= \alpha_i \int_\Omega \widetilde{p}(\rho_\varepsilon)\big(\overline{\rho_\varepsilon^\beta}\big)_\Omega \, d\boldsymbol{x} \\
&+ \int_\Omega \left(\mathbb{S}_{i\varepsilon} - \frac{1}{2}\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{v}_\varepsilon \otimes \boldsymbol{u}_{i\varepsilon} \right) : \left(\nabla \otimes \mathcal{B}\left(\rho_\varepsilon^\beta\right) \right) d\boldsymbol{x} \\
&+ \frac{1}{2}\int_\Omega [\rho_{i\varepsilon}(\boldsymbol{v}_\varepsilon \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}] \cdot \mathcal{B}\left(\rho_\varepsilon^\beta\right) d\boldsymbol{x} - \int_\Omega (\rho_{i\varepsilon}\widetilde{\boldsymbol{f}}_{i\varepsilon} + \widetilde{\boldsymbol{g}}_{i\varepsilon}) \cdot \mathcal{B}\left(\rho_\varepsilon^\beta\right) d\boldsymbol{x} \\
&+ \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega \rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon} \cdot \mathcal{B}\left(\rho_\varepsilon^\beta\right) d\boldsymbol{x} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{m}{|\Omega|}\alpha_i \int_\Omega \boldsymbol{u}_{i\varepsilon} \cdot \mathcal{B}\left(\rho_\varepsilon^\beta\right) d\boldsymbol{x}, \qquad i = 1, \ldots, N.
\end{aligned} \tag{54}$$

Заметим, что из свойств $\mathcal{B}$ следует оценка

$$\left\|\mathcal{B}\left(\rho_\varepsilon^\beta\right)\right\|_{L_6(\Omega)} + \left\|\nabla \otimes \mathcal{B}\left(\rho_\varepsilon^\beta\right)\right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_{36}(C_2, \Omega)\|\rho_\varepsilon\|^\beta_{L_{2\beta}(\Omega)}. \tag{55}$$

Отметим также следующие равномерные по ε оценки (справедливые для всех $i = 1, \ldots, N$):

$$\|\mathbb{S}_{i\varepsilon}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_{37}(C_{34}, \boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{M}, N)\left(1 + \|\rho_\varepsilon\|_{L_{2\beta}(\Omega)}\right), \tag{56}$$

$$(57)\quad \|\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{v}_\varepsilon\otimes\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}\|_{L_2(\Omega)}+\|\rho_{i\varepsilon}(\boldsymbol{v}_\varepsilon\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}\|_{L_{\frac{6}{5}}(\Omega)}\leqslant C_{38}\|\rho_\varepsilon\|_{L_{2\beta}(\Omega)}\Big(1+\|\rho_\varepsilon\|^2_{L_{2\beta}(\Omega)}\Big),$$

$$(58)\qquad \|\rho_{i\varepsilon}\widetilde{\boldsymbol{f}}_{i\varepsilon}+\widetilde{\boldsymbol{g}}_{i\varepsilon}\|_{L_{6/5}(\Omega)}\leqslant C_{39}\left(1+\|\rho_\varepsilon\|_{L_{2\beta}(\Omega)}\right),$$

где $C_{38}=C_{38}(C_{34},\beta,\Omega)$, $C_{39}=C_{39}\Big(\{\|\boldsymbol{f}_i\|_{L_{\sigma_1}(\Omega)}\},\{\|\boldsymbol{g}_i\|_{L_{6/5}(\Omega)}\},\beta,\sigma_1,|\Omega|\Big)$.

Таким образом, из (54), благодаря соотношениям (39), (44), (52), (55)–(58) и элементарным неравенствам (Гельдера и Юнга), следует, что

$$\|\rho_\varepsilon\|^{2\beta}_{L_{2\beta}(\Omega)}\leqslant C_{40}\left(\|\rho_\varepsilon\|^{\beta+3}_{L_{2\beta}(\Omega)}+1\right),$$

где C_{40} зависит от C_{34}, C_{36}–C_{39}, $\{\alpha_i\}$, m, K, β, γ, δ и Ω, откуда получаем требуемую оценку для суммарной плотности

$$(59)\qquad \|\rho_\varepsilon\|_{L_{2\beta}(\Omega)}\leqslant C_{41}(C_{40},\beta),$$

а ввиду (52) и (53), также при всех $i=1,\dots,N$ оценки

$$(60)\qquad \|\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}\|_{W^1_2(\Omega)}+\sqrt{\varepsilon}\,\|\sqrt{\rho_\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}\|_{L_2(\Omega)}+\sqrt{\varepsilon}\,\|\nabla\rho_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}\leqslant C_{42}(C_{34-35},C_{41}).$$

В силу (59) и (60) из семейства ρ_ε, $\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}$, $i=1,\dots,N$, $\varepsilon\in(0,1]$, может быть выделена последовательность (которую мы обозначим так же), для которой при $\varepsilon\to0$ имеют место сходимости

$$(61)\qquad \rho_\varepsilon\to\rho\ \text{ слабо в }\ L_{2\beta}(\Omega),$$

$$(62)\qquad \boldsymbol{u}_{i\varepsilon}\to\boldsymbol{u}_i\ \text{ слабо в }\ \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega),\quad i=1,\dots,N,$$

$$(63)\qquad \varepsilon\nabla\rho_\varepsilon\to0\ \text{ сильно в }\ L_2(\Omega),$$

$$(64)\qquad \rho^\beta_\varepsilon\to\overline{\rho^\beta},\ \ \widetilde{p}(\rho_\varepsilon)\to\overline{\widetilde{p}(\rho)}\ \text{ слабо в }\ L_2(\Omega),\ \ \overline{\rho^\beta}\geqslant0\ \text{ п. в. в }\ \Omega,$$

$$\rho^\gamma_\varepsilon\to\overline{\rho^\gamma}\ \text{ слабо в }\ L_{\frac{2\beta}{\gamma}}(\Omega),\ \ \overline{\rho^\gamma}\geqslant0\ \text{ п. в. в }\ \Omega,$$

где $\overline{\rho^\beta}$, $\overline{\rho^\gamma}$ и $\overline{\widetilde{p}(\rho)}$ обозначают слабые пределы последовательностей ρ^β_ε, ρ^γ_ε и $\widetilde{p}(\rho_\varepsilon)$ в соответствующих пространствах. В дальнейшем будут возникать слабые пределы и некоторых других нелинейных функций от приближенных решений, которые мы будем подразумевать существующими (что гарантируется соответствующими оценками и, при необходимости, выбором подпоследовательности, который будет подразумеваться) и обозначать чертой сверху. Заметим, что из (62) сразу следует, что $\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}\to\boldsymbol{u}_i$ сильно в $L_{\sigma_8}(\Omega)$ при всех $\sigma_8\in[1,6)$, $i=1,\dots,N$.

Таким образом, получаем, что предельные функции ρ, $\boldsymbol{u}_i$, $i=1,\dots,N$, удовлетворяют уравнению

$$(65)\qquad \int\limits_\Omega\rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla\psi\,d\boldsymbol{x}=0\qquad\forall\psi\in W^1_{\frac{6\beta}{5\beta-3}}(\Omega)$$

(слабая форма (1)), где $\boldsymbol{v} = \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i \boldsymbol{u}_i$, уравнениям (см. (41))

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega \Big((\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i) + \alpha_i \overline{\widetilde{p}(\rho)} \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i + \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i \Big)\, d\boldsymbol{x} \\ = \int\limits_\Omega \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i)\, d\boldsymbol{x} \qquad \forall \boldsymbol{\varphi}_i \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \quad i = 1, \ldots, N\end{aligned} \tag{66}$$

(слабая форма аналога (2), в котором вместо $p(\rho)$ стоит $\overline{\widetilde{p}(\rho)}$), где $\rho_i = \alpha_i \rho$, $i = 1, \ldots, N$, а также интегральному условию для суммарной плотности

$$\int\limits_\Omega \rho\, d\boldsymbol{x} = m. \tag{67}$$

Замечание 3.1. При выводе формул (65) и (66) сначала берутся бесконечно гладкие пробные функции, а затем стандартным образом доказывается справедливость этих формул для всех пробных функций указанных классов.

При переходе к пределу по $\varepsilon \to 0$ в уравнениях (37) использовались следующие тождества (первое из которых опирается на (36)):

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{2} \rho_{i\varepsilon} \boldsymbol{u}_{i\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{m}{|\Omega|} \alpha_i \boldsymbol{u}_{i\varepsilon} + \frac{1}{2} \rho_{i\varepsilon} (\boldsymbol{v}_\varepsilon \cdot \nabla) \boldsymbol{u}_{i\varepsilon} + \frac{1}{2} \operatorname{div}(\rho_{i\varepsilon} \boldsymbol{v}_\varepsilon \otimes \boldsymbol{u}_{i\varepsilon}) \\ = \varepsilon \rho_{i\varepsilon} \boldsymbol{u}_{i\varepsilon} + \operatorname{div}(\rho_{i\varepsilon} \boldsymbol{v}_\varepsilon \otimes \boldsymbol{u}_{i\varepsilon}) - \frac{\varepsilon}{2} (\Delta \rho_{i\varepsilon}) \boldsymbol{u}_{i\varepsilon}, \qquad i = 1, \ldots, N,\end{aligned} \tag{68}$$

$$(\Delta \rho_{i\varepsilon}) \boldsymbol{u}_{i\varepsilon} = \operatorname{div}\left((\nabla \rho_{i\varepsilon}) \otimes \boldsymbol{u}_{i\varepsilon} \right) - (\nabla \rho_{i\varepsilon} \cdot \nabla) \boldsymbol{u}_{i\varepsilon}, \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{69}$$

Замечание 3.2. Как известно из теории уравнений переноса и Навье–Стокса (см., например, [13], Раздел 3.1.3, стр. 159–163), все решения уравнения неразрывности (65) (т. е. (1)) рассматриваемого класса автоматически являются так называемыми ренормализованными решениями, т. е. удовлетворяют ренормализованным уравнениям (1), формально получающимся из (1) умножением на $\widetilde{G}'(\rho)$ для всех функций $\widetilde{G}$ определенного класса (а именно, обладающих достаточной гладкостью и свойствами роста в нуле и на бесконечности).

Для завершения предельного перехода по $\varepsilon \to 0$ осталось доказать, что

$$\overline{\widetilde{p}(\rho)} = \widetilde{p}(\rho) \ \text{ п. в. в } \ \Omega. \tag{70}$$

Для этого рассмотрим для всех $i = 1, \ldots, N$ так называемые эффективные вязкие потоки компонент смеси $\alpha_i \widetilde{p}(\rho) - \sum\limits_{j=1}^{N} \nu_{ij} \operatorname{div} \boldsymbol{u}_j$, соответствующие величины для регуляризованной задачи $\alpha_i \widetilde{p}(\rho_\varepsilon) - \sum\limits_{j=1}^{N} \nu_{ij} \operatorname{div} \boldsymbol{u}_{j\varepsilon}$, и их слабые пределы в $L_2(\Omega)$: $\alpha_i \overline{\widetilde{p}(\rho)} - \sum\limits_{j=1}^{N} \nu_{ij} \operatorname{div} \boldsymbol{u}_j$. Будем использовать оператор Δ^{-1}, действующий по формуле

$$(\Delta^{-1}v)(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{v(\boldsymbol{y})\,d\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|},$$

применяя его к функциям $v \in L_{\sigma_9}(\Omega)$, $\sigma_9 > \dfrac{3}{2}$, продолженным нулем за пределы Ω. При этом $\Delta^{-1} : L_{\sigma_9}(\Omega) \to W^2_{\sigma_9}(\Omega)$, и $\Delta \circ \Delta^{-1} = I$.

Умножим уравнения (37) (для функций $\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}$, $\rho_{i\varepsilon}$, $i = 1, \ldots, N$) скалярно на функцию $\tau \boldsymbol{r}_\varepsilon$, где $\boldsymbol{r}_\varepsilon = \nabla\Delta^{-1}\rho_\varepsilon$, а

$$\tau \in C_0^\infty(\Omega), \tag{71}$$

и проинтегрируем по Ω. Тогда, учитывая (68) и (69), придем к равенствам (справедливым для всех $i = 1, \ldots, N$)

$$\begin{aligned}
&\int\limits_\Omega \Big(\tau\alpha_i\widetilde{p}(\rho_\varepsilon)\rho_\varepsilon - \mathbb{S}_{i\varepsilon} : [\nabla \otimes (\tau\boldsymbol{r}_\varepsilon)]\Big)\,d\boldsymbol{x} = -\alpha_i\int\limits_\Omega \widetilde{p}(\rho_\varepsilon)\nabla\tau\cdot\boldsymbol{r}_\varepsilon\,d\boldsymbol{x}\\
&-\int\limits_\Omega \tau(\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{v}_\varepsilon \otimes \boldsymbol{u}_{i\varepsilon}) : (\nabla\otimes\boldsymbol{r}_\varepsilon)\,d\boldsymbol{x} - \int\limits_\Omega (\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{v}_\varepsilon\otimes\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}) : ((\nabla\tau)\otimes\boldsymbol{r}_\varepsilon)\,d\boldsymbol{x}\\
&-\int\limits_\Omega \tau\rho_{i\varepsilon}\widetilde{\boldsymbol{f}}_{i\varepsilon}\cdot\boldsymbol{r}_\varepsilon\,d\boldsymbol{x} - \int\limits_\Omega \tau\widetilde{\boldsymbol{g}}_{i\varepsilon}\cdot\boldsymbol{r}_\varepsilon\,d\boldsymbol{x} + \varepsilon\int\limits_\Omega \tau\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}\cdot\boldsymbol{r}_\varepsilon\,d\boldsymbol{x}\\
&+\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_\Omega ((\nabla\rho_{i\varepsilon})\otimes\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}) : (\nabla\otimes(\tau\boldsymbol{r}_\varepsilon))\,d\boldsymbol{x} + \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_\Omega \tau[(\nabla\rho_{i\varepsilon}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}]\cdot\boldsymbol{r}_\varepsilon\,d\boldsymbol{x}.
\end{aligned} \tag{72}$$

С другой стороны, приняв в (66) в качестве тестовых функций векторные поля $\boldsymbol{\varphi}_i = \tau\boldsymbol{r}$, $i = 1, \ldots, N$ (см. (71)), где $\boldsymbol{r} = \nabla\Delta^{-1}\rho$, выводим тождества

$$\begin{aligned}
&\int\limits_\Omega \Big(\tau\alpha_i\overline{\widetilde{p}(\rho)}\rho - \mathbb{S}_i : [\nabla\otimes(\tau\boldsymbol{r})]\Big)\,d\boldsymbol{x} = -\alpha_i\int\limits_\Omega \overline{\widetilde{p}(\rho)}\nabla\tau\cdot\boldsymbol{r}\,d\boldsymbol{x}\\
&-\int\limits_\Omega \tau(\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_i) : (\nabla\otimes\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{x} - \int\limits_\Omega (\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_i) : ((\nabla\tau)\otimes\boldsymbol{r})\,d\boldsymbol{x}\\
&-\int\limits_\Omega \tau\rho_i\boldsymbol{f}_i\cdot\boldsymbol{r}\,d\boldsymbol{x} - \int\limits_\Omega \tau\boldsymbol{g}_i\cdot\boldsymbol{r}\,d\boldsymbol{x}, \qquad i = 1, \ldots, N.
\end{aligned} \tag{73}$$

Из (61) и компактности вложения $W^1_{2\beta}(\Omega)$ в $C(\overline{\Omega})$ следует, что при $\varepsilon \to 0$

$$\boldsymbol{r}_\varepsilon \to \boldsymbol{r} \quad \text{в } C(\overline{\Omega}). \tag{74}$$

Вычитая из (72) равенства (73), и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим, благодаря (41), (61)–(64) и (74), соотношения (для всех $i = 1, \dots, N$)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega \Big(\tau\alpha_i \widetilde{p}(\rho_\varepsilon)\rho_\varepsilon - \mathbb{S}_{i\varepsilon} : [\nabla \otimes (\tau \boldsymbol{r}_\varepsilon)]\Big)\, d\boldsymbol{x}$$

$$- \int\limits_\Omega \Big(\tau\alpha_i \overline{\widetilde{p}(\rho)}\rho - \mathbb{S}_i : [\nabla \otimes (\tau \boldsymbol{r})]\Big)\, d\boldsymbol{x} \tag{75}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega \tau\Big((\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) : (\nabla \otimes \boldsymbol{r}) - (\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{v}_\varepsilon \otimes \boldsymbol{u}_{i\varepsilon}) : (\nabla \otimes \boldsymbol{r}_\varepsilon)\Big)\, d\boldsymbol{x}.$$

Проведем анализ правой части (75) (докажем, что она равна нулю). Введем в рассмотрение оператор Comm, действующий по формуле[5]

$$\mathrm{Comm}(z, \tau) = (\nabla \otimes \nabla\Delta^{-1} z)\tau - z(\nabla \otimes \nabla \Delta^{-1}\tau),$$

о котором известно (см. [4], [16], [9], [13]) следующее: если $z_k \to z$ слабо в $L_{\sigma_{10}}(\Omega)$, $\tau_k \to \tau$ слабо в $L_{\sigma_{11}}(\Omega)$, где $\sigma_{10}^{-1} + \sigma_{11}^{-1} < 1$, то $\mathrm{Comm}(z_k, \tau_k) \to \mathrm{Comm}(z, \tau)$ слабо в $L_{\sigma_{12}}(\Omega)$, где $\sigma_{12}^{-1} = \sigma_{10}^{-1} + \sigma_{11}^{-1}$. Преобразуем правую часть (75) (учитывая (65)):

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega \tau\Big((\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) : (\nabla \otimes \boldsymbol{r}) - (\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{v}_\varepsilon \otimes \boldsymbol{u}_{i\varepsilon}) : (\nabla \otimes \boldsymbol{r}_\varepsilon)\Big)\, d\boldsymbol{x}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega \boldsymbol{v}_\varepsilon \cdot \mathrm{Comm}(\tau\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}, \rho_\varepsilon)\, d\boldsymbol{x} - \int\limits_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{Comm}(\tau\rho_i \boldsymbol{u}_i, \rho)\, d\boldsymbol{x} \tag{76}$$

$$- \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega \tau\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon} \cdot \nabla\Delta^{-1}\mathrm{div}(\rho_\varepsilon \boldsymbol{v}_\varepsilon)\, d\boldsymbol{x}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Из (61) и (62) следует, что $\rho_\varepsilon \boldsymbol{u}_{i\varepsilon} \to \rho \boldsymbol{u}_i$ слабо в $L_{\sigma_{13}}(\Omega)$ при $i = 1, \dots, N$ и всех $\sigma_{13} < \dfrac{6\beta}{\beta+3}$, а следовательно при всех $\sigma_{13} \in \left(\dfrac{2\beta}{2\beta-1}, \dfrac{6\beta}{\beta+3}\right)$ и при $i = 1, \dots, N$ имеем

$$\mathrm{Comm}(\tau\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}, \rho_\varepsilon) \to \mathrm{Comm}(\tau\rho_i\boldsymbol{u}_i, \rho) \ \text{ слабо в } \ L_{\sigma_{14}}(\Omega), \quad \sigma_{14} = \frac{2\sigma_{13}\beta}{2\beta + \sigma_{13}}.$$

Поскольку вложение $L_{\sigma_{14}}(\Omega)$ в $W_2^{-1}(\Omega)$ компактно (при дополнительном условии $\sigma_{13} > 6\beta/(5\beta - 3)$, заведомо совместном с наложенными выше), то

$$\mathrm{Comm}(\tau\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}, \rho_\varepsilon) \to \mathrm{Comm}(\tau\rho_i\boldsymbol{u}_i, \rho) \quad \text{сильно в} \quad W_2^{-1}(\Omega), \quad i = 1, \dots, N.$$

Эти соотношения вместе с (62) влекут равенства

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_\Omega \boldsymbol{v}_\varepsilon \cdot \mathrm{Comm}(\tau\rho_{i\varepsilon}\boldsymbol{u}_{i\varepsilon}, \rho_\varepsilon)\, d\boldsymbol{x} = \int\limits_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{Comm}(\tau\rho_i\boldsymbol{u}_i, \rho)\, d\boldsymbol{x}, \quad i = 1, \dots, N.$$

[5]Оператор Comm сопоставляет скалярным функциям симметричные тензоры 2 ранга, при этом действие оператора на нескалярные аргументы подразумевает свертку по некоторым индексам, причем в силу симметрии не требуется оговаривать по каким именно индексам идет свертка.

Из уравнения (36) получим тождество

$$\nabla\Delta^{-1}\mathrm{div}(\rho_\varepsilon \boldsymbol{v}_\varepsilon) = \varepsilon\nabla\rho_\varepsilon + \varepsilon\nabla\Delta^{-1}\left(\frac{m}{|\Omega|} - \rho_\varepsilon\right),$$

из которого, ввиду (59), (60) и (63), ясно, что последнее слагаемое в правой части (76) обращается в нуль.

Таким образом, из (75) и (76) следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\Omega \Big(\tau\alpha_i\widetilde{p}(\rho_\varepsilon)\rho_\varepsilon - \mathbb{S}_{i\varepsilon} : [\nabla\otimes(\tau\boldsymbol{r}_\varepsilon)]\Big)\,d\boldsymbol{x}$$

$$= \int\limits_\Omega \Big(\tau\alpha_i\overline{\widetilde{p}(\rho)}\rho - \mathbb{S}_i : [\nabla\otimes(\tau\boldsymbol{r})]\Big)\,d\boldsymbol{x}, \qquad i = 1,\dots,N. \tag{77}$$

Наконец, поскольку[6] при всех $i = 1,\dots,N$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\Omega \mathbb{S}_{i\varepsilon} : [\nabla\otimes(\tau\boldsymbol{r}_\varepsilon)]\,d\boldsymbol{x} - \int\limits_\Omega \mathbb{S}_i : [\nabla\otimes(\tau\boldsymbol{r})]\,d\boldsymbol{x}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=1}^N \nu_{ik}\int\limits_\Omega \tau\rho_\varepsilon \mathrm{div}\,\boldsymbol{u}_{k\varepsilon}\,d\boldsymbol{x} - \sum_{k=1}^N \nu_{ik}\int\limits_\Omega \tau\rho\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}_k\,d\boldsymbol{x}$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=1}^N \nu_{ik}\int\limits_\Omega (\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}_{k\varepsilon})\Big(2\boldsymbol{r}_\varepsilon\cdot\nabla\tau + (\Delta\tau)\Delta^{-1}\rho_\varepsilon\Big)\,d\boldsymbol{x} \tag{78}$$

$$- \sum_{k=1}^N \nu_{ik}\int\limits_\Omega (\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}_k)\Big(2\boldsymbol{r}\cdot\nabla\tau + (\Delta\tau)\Delta^{-1}\rho\Big)\,d\boldsymbol{x}$$

$$- \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\Omega \mathbb{S}_{i\varepsilon} : \Big(\nabla\otimes[(\nabla\tau)\Delta^{-1}\rho_\varepsilon]\Big)\,d\boldsymbol{x} + \int\limits_\Omega \mathbb{S}_i : \Big(\nabla\otimes[(\nabla\tau)\Delta^{-1}\rho]\Big)\,d\boldsymbol{x},$$

то (благодаря (61), (62) и (74) последние четыре интеграла в (78) взаимно уничтожаются) равенства (77) превращаются в следующие соотношения для эффективных вязких потоков компонент смеси

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\Omega \tau\rho_\varepsilon\left(\alpha_i\widetilde{p}(\rho_\varepsilon) - \sum_{k=1}^N \nu_{ik}\mathrm{div}\boldsymbol{u}_{k\varepsilon}\right)d\boldsymbol{x}$$

$$= \int\limits_\Omega \tau\rho\left(\alpha_i\overline{\widetilde{p}(\rho)} - \sum_{k=1}^N \nu_{ik}\mathrm{div}\boldsymbol{u}_k\right)d\boldsymbol{x}, \qquad i = 1,\dots,N. \tag{79}$$

[6] Ввиду $\mathrm{div}\left(\mathbb{S}_{i\varepsilon}(\Delta^{-1}\rho_\varepsilon)\nabla\tau + \mathbb{S}_{i\varepsilon}\tau\boldsymbol{r}_\varepsilon - \mathrm{div}\mathbb{S}_{i\varepsilon}\cdot\tau\Delta^{-1}\rho_\varepsilon\right)$
$= \mathbb{S}_{i\varepsilon} : (\nabla\otimes[(\Delta^{-1}\rho_\varepsilon)\nabla\tau]) + \mathbb{S}_{i\varepsilon} : (\nabla\otimes[\tau\boldsymbol{r}_\varepsilon]) - (\mathrm{div}\mathrm{div}\mathbb{S}_{i\varepsilon})\tau\Delta^{-1}\rho_\varepsilon.$

Из (79) следует ключевое соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\Omega \tau\rho_\varepsilon\big(\nu_0\widetilde{p}(\rho_\varepsilon)-\mathrm{div}\boldsymbol{v}_\varepsilon\big)\,d\boldsymbol{x}=\int\limits_\Omega \tau\rho\left(\nu_0\overline{\widetilde{p}(\rho)}-\mathrm{div}\boldsymbol{v}\right)\,d\boldsymbol{x}, \tag{80}$$

где $\nu_0=(\mathbf{N}^{-1}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})>0$ (см. (7)), а $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_N)^*$. Ввиду произвольности τ (см. (71)), равенство (80) выражает соотношение

$$\nu_0\overline{\rho\widetilde{p}(\rho)}-\overline{\rho\mathrm{div}\boldsymbol{v}}=\nu_0\rho\overline{\widetilde{p}(\rho)}-\rho\mathrm{div}\boldsymbol{v}\quad \text{п. в. в }\ \Omega. \tag{81}$$

Согласно Замечанию 3.2, выполнены ренормализованные уравнения (1). В частности, для функций $\widetilde{G}\in C[0,\infty)\bigcap C^1(0,\infty)$ таких, что

$$\left|\widetilde{G}'(s)\right|\leqslant C_{43}s^{-\sigma_{15}}\quad \forall\, s\in(0,1],\quad \sigma_{15}<1,$$

$$\left|\widetilde{G}'(s)\right|\leqslant C_{44}s^{\sigma_{16}}\quad \forall\, s\geqslant 1,\quad -1<\sigma_{16}\leqslant\frac{\beta}{2}-1,$$

выполнены в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ уравнения $\mathrm{div}(\widetilde{G}(\rho)\boldsymbol{v})+(\rho\widetilde{G}'(\rho)-\widetilde{G}(\rho))\mathrm{div}\boldsymbol{v}=0$, откуда при $\widetilde{G}(s)=s\ln s$ следует равенство

$$\int\limits_\Omega \rho\,\mathrm{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}=0. \tag{82}$$

С другой стороны, умножая (36) на $\ln(\rho_\varepsilon+l)+\dfrac{\rho_\varepsilon}{\rho_\varepsilon+l}$, $l\in(0,1]$, интегрируя результат по Ω, затем проводя элементарные оценки, и наконец переходя к пределу (сначала по $l\to 0$, а затем по $\varepsilon\to 0$), получаем неравенство

$$\int\limits_\Omega \overline{\rho\,\mathrm{div}\boldsymbol{v}}\,d\boldsymbol{x}\leqslant 0. \tag{83}$$

Комбинируя (82) и (83), приходим к неравенству

$$\int\limits_\Omega \left(\overline{\rho\,\mathrm{div}\boldsymbol{v}}-\rho\,\mathrm{div}\boldsymbol{v}\right)d\boldsymbol{x}\leqslant 0. \tag{84}$$

Ввиду монотонности[7] функции $\widetilde{p}(\cdot)$ верно поточечное неравенство $(\rho_\varepsilon-\rho)(\widetilde{p}(\rho_\varepsilon)-\widetilde{p}(\rho))\geqslant 0$, благодаря которому и формулам (61), (64) выводим

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\int\limits_B (\widetilde{p}(\rho_\varepsilon)\rho_\varepsilon-\widetilde{p}(\rho_\varepsilon)\rho)\,d\boldsymbol{x}$$

$$=\liminf_{\varepsilon\to 0}\int\limits_B (\widetilde{p}(\rho_\varepsilon)-\widetilde{p}(\rho))(\rho_\varepsilon-\rho)\,d\boldsymbol{x}+\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_B \widetilde{p}(\rho)(\rho_\varepsilon-\rho)\,d\boldsymbol{x}\geqslant 0,$$

где B — произвольный шар в Ω, поэтому $\overline{\widetilde{p}(\rho)\rho}\geqslant\overline{\widetilde{p}(\rho)}\rho$ п. в. в Ω. Из (81) тогда следует, что $\overline{\rho\mathrm{div}\boldsymbol{v}}-\rho\mathrm{div}\boldsymbol{v}\geqslant 0$ п. в. в Ω, а ввиду (84) это означает что $\overline{\rho\mathrm{div}\boldsymbol{v}}-\rho\mathrm{div}\boldsymbol{v}=0$ п. в. в Ω, но тогда из (81) получаем $\overline{\widetilde{p}(\rho)\rho}=\overline{\widetilde{p}(\rho)}\rho$ п. в. в Ω. Отсюда, временно продолжая нечетным образом функцию $\widetilde{p}$ на промежуток $(-\infty,0]$ (сохраняя за ней прежнее обозначение), т. е. принимая, что $\widetilde{p}(s):=\widetilde{p}(|s|)\mathrm{sign}(s)$, с целью применения Леммы 3.39 из [13], стр. 188, выводим (70): $\overline{\widetilde{p}(\rho)}=\widetilde{p}(\rho)$ п. в. в Ω.

---

[7]Напомним, что $\widetilde{p}'(s)=K\gamma s^{\gamma-1}+\delta\beta s^{\beta-1}+2\delta s$.

Итак, функции ρ, $\boldsymbol{u}_i$, $i=1,\dots,N$, являются решением Задачи A, в которой p в уравнениях (2) пока что заменено на $\widetilde{p}$ (данную задачу будем называть Задачей A_δ); другими словами, выполнены интегральные соотношения (65), (66) (в которых $\overline{\widetilde{p}(\rho)}$ уже заменено на $\widetilde{p}(\rho)$) и (67).

В завершение данного раздела приведем энергетическое неравенство для предельных функций. А именно, из неравенства (47) после перехода к пределу по $\varepsilon \to 0$ получим

$$C_0 \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\nabla \otimes \boldsymbol{u}_i|^2 \, d\boldsymbol{x} \leqslant \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega (\rho_i \boldsymbol{f}_i + \boldsymbol{g}_i) \cdot \boldsymbol{u}_i \, d\boldsymbol{x} + C_{12}. \tag{85}$$

4. Предельный переход по $\delta \to 0$

Получим оценки решений Задачи A_δ, равномерные по малому параметру δ. Из условий (14) и неравенства (85) следует, что

$$\sum_{i=1}^{N} \|\boldsymbol{u}_{i\delta}\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C_{45} \left(\|\rho_\delta\|_{L_{\frac{6\sigma_1}{5\sigma_1-6}}(\Omega)} I_\gamma + 1 \right) \tag{86}$$

(начиная с этой формулы у величин, зависящих от δ, будем писать индекс δ), где $\rho_\delta = \sum\limits_{i=1}^{N} \rho_{i\delta}$, а положительная постоянная C_{45} зависит только от C_0, C_{12}, $\{\|\boldsymbol{f}_i\|_{L_{\sigma_1}(\Omega)}\}$, $\{\|\boldsymbol{g}_i\|_{L_{6/5}(\Omega)}\}$ и Ω. Из (67) имеем: $\|\rho_\delta\|_{L_1(\Omega)} = m$.

Возьмем в уравнениях импульса (т. е. (66), в которых $\overline{\widetilde{p}(\rho_\delta)}$ заменено на $\widetilde{p}(\rho_\delta)$) в качестве тестовых функций векторные поля $\boldsymbol{\varphi}_i = \mathcal{B}([\widetilde{p}(\rho_\delta)]^{\sigma_{17}})$, $i=1,\dots,N$, где (напомним обозначение (12))

$$\sigma_{17} = \frac{\zeta_2(\gamma)}{\gamma} - 1 = \min\left\{ \frac{2\gamma-3}{\gamma}, 1 \right\} \in (0,1] \tag{87}$$

(отметим, что согласно (23) $\sigma_{17} = \sigma_4/\gamma$). Тогда для всех $i=1,\dots,N$ получим тождества (напомним обозначение (22))

$$\begin{aligned} \alpha_i \int_\Omega [\widetilde{p}(\rho_\delta)]^{\sigma_{17}+1} \, d\boldsymbol{x} &= \alpha_i \overline{([\widetilde{p}(\rho_\delta)]^{\sigma_{17}})}_\Omega \int_\Omega \widetilde{p}(\rho_\delta) \, d\boldsymbol{x} + \int_\Omega \mathbb{S}_{i\delta} : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i) \, d\boldsymbol{x} \\ &- \int_\Omega (\rho_{i\delta} \boldsymbol{f}_i + \boldsymbol{g}_i) \cdot \boldsymbol{\varphi}_i \, d\boldsymbol{x} - \int_\Omega (\rho_{i\delta} \boldsymbol{v}_\delta \otimes \boldsymbol{u}_{i\delta}) : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i) \, d\boldsymbol{x} =: \sum_{s=1}^{4} J_{si}. \end{aligned} \tag{88}$$

Получим оценки интегралов в правой части (88), равномерные по параметру δ. Сначала отметим, что из свойств $\mathcal{B}$ следуют соотношения

$$\|\boldsymbol{\varphi}_i\|_{W^1_{\sigma_{18}}(\Omega)} \leqslant C_{46}(\sigma_{18}, \Omega) \Big\| \widetilde{p}(\rho_\delta) \Big\|^{\sigma_{17}}_{L_{\sigma_{17}\sigma_{18}}(\Omega)}, \ 1 < \sigma_{17}\sigma_{18} \leqslant 2, \ i=1,\dots,N. \tag{89}$$

Теперь, используя интерполяционные неравенства $\|\rho\|_{L_p(\Omega)} \leqslant \|\rho\|^{1-q}_{L_1(\Omega)} \|\rho\|^q_{L_{(\sigma_{17}+1)p}(\Omega)}$ с $q = \dfrac{(\sigma_{17}+1)(p-1)}{(\sigma_{17}+1)p-1} \in (0,1)$ и $p = \beta, \gamma$, получаем при всех $i=1,\dots,N$ оценки

$$|J_{1i}| \leqslant C_{47} \left(\|\rho_\delta\|^{\gamma\sigma_{19}}_{L_{(\sigma_{17}+1)\gamma}(\Omega)} + \delta \|\rho_\delta\|^{\beta\sigma_{20}}_{L_{(\sigma_{17}+1)\beta}(\Omega)} + 1 \right) \|\widetilde{p}(\rho_\delta)\|^{\sigma_{17}}_{L_{\sigma_{17}+1}(\Omega)}, \tag{90}$$

где $\sigma_{19}=\dfrac{(\sigma_{17}+1)(\gamma-1)}{(\sigma_{17}+1)\gamma-1}\in(0,1)$, $\sigma_{20}=\dfrac{(\sigma_{17}+1)(\beta-1)}{(\sigma_{17}+1)\beta-1}\in(0,1)$,
$C_{47}=C_{47}(K,m,\beta,\gamma,\sigma_{17},\sigma_{19},\sigma_{20},|\Omega|)$; в силу (86), (89) (с $\sigma_{18}=2$) и интерполяционного неравенства

(91) $$\|\rho_\delta\|_{L_{\frac{6\sigma_1}{5\sigma_1-6}}(\Omega)}\leqslant\|\rho_\delta\|^{1-\sigma_{21}}_{L_1(\Omega)}\|\rho_\delta\|^{\sigma_{21}}_{L_{(\sigma_{17}+1)\gamma}(\Omega)},$$

справедливого при любых

(92) $$\sigma_1>\frac{6(\sigma_{17}+1)\gamma}{5(\sigma_{17}+1)\gamma-6}=\frac{6(\sigma_4+\gamma)}{5(\sigma_4+\gamma)-6}\quad(\text{см. }(28)),$$

верны соотношения

(93) $$|J_{2i}|\leqslant C_{48}\left(\|\rho_\delta\|^{\sigma_{21}}_{L_{(\sigma_{17}+1)\gamma}(\Omega)}I_\gamma+1\right)\|\widetilde{p}(\rho_\delta)\|^{\sigma_{17}}_{L_{\sigma_{17}+1}(\Omega)},\quad i=1,\ldots,N,$$

где $\sigma_{21}=\dfrac{(\sigma_{17}+1)(\sigma_1+6)\gamma}{6\sigma_1(\sigma_{17}+1)\gamma-6\sigma_1}\in(0,1)$,
$C_{48}=C_{48}(C_{45},C_{46},N,m,\boldsymbol{\Lambda},\mathbf{M},\sigma_{17},\sigma_{21},|\Omega|)$; благодаря (89) с $\sigma_{18}=2$ и (91) справедливы оценки

(94) $$|J_{3i}|\leqslant C_{49}(\|\rho_\delta\|^{\sigma_{21}}_{L_{(\sigma_{17}+1)\gamma}(\Omega)}I_\gamma+1)\|\widetilde{p}(\rho_\delta)\|^{\sigma_{17}}_{L_{\sigma_{17}+1}(\Omega)},\quad i=1,\ldots,N,$$

где $C_{49}=C_{49}(C_{46},m,\{\|\boldsymbol{f}_i\|_{L_{\sigma_1}(\Omega)}\},\{\|\boldsymbol{g}_i\|_{L_{6/5}(\Omega)}\},\sigma_{17},\sigma_{21},\Omega)$; наконец, в силу (86), (89) с $\sigma_{18}=\dfrac{3(\sigma_{17}+1)\gamma}{2(\sigma_{17}+1)\gamma-3}$ и (91), имеют место для всех $i=1,\ldots,N$ оценки

(95) $$|J_{4i}|\leqslant C_{50}\|\rho_\delta\|_{L_{(\sigma_{17}+1)\gamma}(\Omega)}\left(\|\rho_\delta\|^{2\sigma_{21}}_{L_{(\sigma_{17}+1)\gamma}(\Omega)}I_\gamma+1\right)\|\widetilde{p}(\rho_\delta)\|^{\sigma_{17}}_{L_{\sigma_{17}+1}(\Omega)},$$

где $C_{50}=C_{50}(C_{45},C_{46},m,\gamma,\sigma_{17},\sigma_{21},\Omega)$.

Таким образом, из (88), с учетом (90), (93)–(95) (при условии (92), которое совпадает с условием (28)), следуют соотношения

$$\|\rho_\delta\|^\gamma_{L_{(\sigma_{17}+1)\gamma}(\Omega)}+\delta\|\rho_\delta\|^\beta_{L_{(\sigma_{17}+1)\beta}(\Omega)}\leqslant C_{51}\|\widetilde{p}(\rho_\delta)\|_{L_{\sigma_{17}+1}(\Omega)}$$

$$\leqslant C_{52}\Big(\|\rho_\delta\|^{\gamma\sigma_{19}}_{L_{(\sigma_{17}+1)\gamma}(\Omega)}+\|\rho_\delta\|_{L_{(\sigma_{17}+1)\gamma}(\Omega)}+\|\rho_\delta\|^{2\sigma_{21}+1}_{L_{(\sigma_{17}+1)\gamma}(\Omega)}I_\gamma+\delta\|\rho_\delta\|^{\beta\sigma_{20}}_{L_{(\sigma_{17}+1)\beta}(\Omega)}+1\Big),$$

где $C_{51}=C_{51}(K,N,\{\alpha_i\},\sigma_{17})$, $C_{52}=C_{52}(C_{47}\text{–}C_{51},\sigma_{21})$. Из этих соотношений при выполнении условий (33) (см. также Замечания 1.4 и 1.5) непосредственно следует, что

(96) $$\|\rho_\delta\|_{L_{\zeta_2(\gamma)}(\Omega)}+\delta^{\frac{1}{\beta}}\|\rho_\delta\|_{L_{\frac{\zeta_2(\gamma)\beta}{\gamma}}(\Omega)}\leqslant C_{53}(C_{52},\beta,\gamma,\sigma_{19},\sigma_{20},\sigma_{21}),$$

а значит из (86) получаем оценки

(97) $$\|\boldsymbol{u}_{i\delta}\|_{W^1_2(\Omega)}\leqslant C_{54}\left(C_{45},C_{53},m,\sigma_{21}\right),\quad i=1,\ldots,N.$$

Ввиду оценок (96), (97) из семейства ρ_δ, $\boldsymbol{u}_{i\delta}$, $i=1,\ldots,N$, $\delta\in(0,1]$, может быть выделена последовательность (которую мы обозначим так же), для которой при $\delta\to0$ для всех $i=1,\ldots,N$ имеют место сходимости

(98) $$\boldsymbol{u}_{i\delta}\to\boldsymbol{u}_i\ \text{ слабо в }\ \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega),$$
$$\text{а значит}\quad\boldsymbol{u}_{i\delta}\to\boldsymbol{u}_i\quad\text{сильно в}\quad L_{\sigma_{22}}(\Omega)\quad\forall\sigma_{22}\in[1,6),$$

(99) $$\rho_\delta\to\rho\ \text{ слабо в }\ L_{\zeta_2(\gamma)}(\Omega),\ \ \rho\geqslant0\ \text{ п. в. в }\ \Omega,$$

$$\rho_\delta^\gamma \to \overline{\rho^\gamma},\ \ \widetilde{p}(\rho_\delta) \to \overline{p(\rho)}\ \text{ слабо в }\ L_{\frac{\zeta_2(\gamma)}{\gamma}}(\Omega),\ \ \overline{\rho^\gamma} \geqslant 0\ \text{ п. в. в }\ \Omega, \tag{100}$$

$$\delta\rho_\delta^\beta \to 0,\quad \delta\rho_\delta^2 \to 0\quad \text{сильно в}\quad L_{\sigma_{23}}(\Omega)\quad \forall\sigma_{23} \in \left[1, \frac{\zeta_2(\gamma)}{\gamma}\right), \tag{101}$$

где $\overline{\rho^\gamma}$ и $\overline{p(\rho)}$ обозначают слабые пределы последовательностей ρ_δ^γ и $\widetilde{p}(\rho_\delta)$ в соответствующих пространствах. Вывод соотношений (101) становится очевидным в силу следующего неравенства (здесь мы вновь пользуемся интерполяционным неравенством):

$$\|\rho_\delta\|_{L_{\sigma_{23}\beta}(\Omega)} \leqslant m^{1-\sigma_{24}} \|\rho_\delta\|^{\sigma_{24}}_{L_{\frac{\zeta_2(\gamma)\beta}{\gamma}}(\Omega)},\quad \sigma_{23} \in \left(\frac{1}{\beta}, \frac{\zeta_2(\gamma)}{\gamma}\right),$$

$$\sigma_{24} = \frac{\zeta_2(\gamma)(\sigma_{23}\beta - 1)}{\sigma_{23}(\zeta_2(\gamma)\beta - \gamma)} \in (0,1).$$

Отметим также, что из (98) и (99) следуют при $i, j = 1, \ldots, N$ сходимости

$$\rho_\delta \boldsymbol{u}_{i\delta} \to \rho\boldsymbol{u}_i\ \text{ слабо в }\ L_{\sigma_{25}}(\Omega),\qquad \frac{\sigma_{25}}{\zeta_2(\gamma)} + \frac{\sigma_{25}}{6} < 1, \tag{102}$$

$$\rho_\delta \boldsymbol{u}_{i\delta} \otimes \boldsymbol{u}_{j\delta} \to \rho\boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_j\ \text{ слабо в }\ L_{\sigma_{26}}(\Omega),\qquad \frac{\sigma_{26}}{\zeta_2(\gamma)} + \frac{\sigma_{26}}{3} < 1. \tag{103}$$

В результате предельного перехода по $\delta \to 0$ в (65), (66) (в которых $\overline{\widetilde{p}(\rho)}$ заменено на $\widetilde{p}(\rho_\delta)$) и (67) получаем (см. Замечание 3.1), что предельные функции ρ, $\boldsymbol{u}_i$, $i = 1, \ldots, N$, удовлетворяют уравнению $\int\limits_\Omega \rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla\psi\, d\boldsymbol{x} = 0$ при всех $\psi \in W^1_{\frac{6\zeta_2(\gamma)}{5\zeta_2(\gamma)-6}}(\Omega)$, где $\boldsymbol{v} = \sum\limits_{j=1}^N \alpha_j \boldsymbol{u}_j$, уравнениям

$$\begin{aligned} &\int\limits_\Omega \Big((\rho_i \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{u}_i) : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i) + \alpha_i \overline{p(\rho)} \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_i + \rho_i \boldsymbol{f}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i + \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{\varphi}_i \Big)\, d\boldsymbol{x} = \\ &= \int\limits_\Omega \mathbb{S}_i : (\nabla \otimes \boldsymbol{\varphi}_i)\, d\boldsymbol{x} \qquad \forall \boldsymbol{\varphi}_i \in \overset{\circ}{W}{}^1_{\frac{\zeta_2(\gamma)}{\zeta_2(\gamma)-\gamma}}(\Omega),\quad i = 1, \ldots, N, \end{aligned} \tag{104}$$

интегральному условию для суммарной плотности $\int\limits_\Omega \rho\, d\boldsymbol{x} = m$, а также энергетическому неравенству (85). Таким образом, для завершения предельного перехода по $\delta \to 0$ (см. Определение 1.2) осталось доказать, что

$$\overline{p(\rho)} = p(\rho)\ \text{ п. в. в }\ \Omega. \tag{105}$$

Примем в качестве тестовых функций в (66) $\big($в которых $\overline{\widetilde{p}(\rho_\delta)}$ заменено на $\widetilde{p}(\rho_\delta)\big)$ векторные поля $\boldsymbol{\varphi}_i = \tau \boldsymbol{r}_{\delta k}$ (см. (71)), $i = 1, \ldots, N$, где $\boldsymbol{r}_{\delta k} = \nabla\Delta^{-1} T_k(\rho_\delta)$, а

$$T_k(s) = \begin{cases} s, & s \in [0, k], \\ k, & s \in [k, +\infty) \end{cases}$$

— срезающая функция с параметром $k > 0$. Тогда получим тождества

$$\int\limits_\Omega \big(\tau\alpha_i\widetilde{p}(\rho_\delta)T_k(\rho_\delta) - \mathbb{S}_{i\delta} : [\nabla\otimes(\tau\boldsymbol{r}_{\delta k})]\big)\,d\boldsymbol{x} = -\alpha_i\int\limits_\Omega \widetilde{p}(\rho_\delta)\boldsymbol{r}_{\delta k}\cdot\nabla\tau\,d\boldsymbol{x}$$

$$(106)\qquad -\int\limits_\Omega \tau(\rho_{i\delta}\boldsymbol{v}_\delta\otimes\boldsymbol{u}_{i\delta}) : (\nabla\otimes\boldsymbol{r}_{\delta k})\,d\boldsymbol{x} - \int\limits_\Omega (\rho_{i\delta}\boldsymbol{v}_\delta\otimes\boldsymbol{u}_{i\delta}) : ((\nabla\tau)\otimes\boldsymbol{r}_{\delta k})\,d\boldsymbol{x} -$$

$$-\int\limits_\Omega \tau(\rho_{i\delta}\boldsymbol{f}_i + \boldsymbol{g}_i)\cdot\boldsymbol{r}_{\delta k}\,d\boldsymbol{x}, \qquad i = 1,\dots,N.$$

Подставляя в уравнениях (104) в качестве пробных функций $\boldsymbol{\varphi}_i = \tau\overline{\boldsymbol{r}}_k$, $i = 1,\dots,N$, где $\overline{\boldsymbol{r}}_k = \nabla\Delta^{-1}\overline{T_k(\rho)}$ (эта величина является пределом величин $\boldsymbol{r}_{\delta k}$ при $\delta\to 0$, причем сходимость имеет место слабо в $W^1_{\sigma_{27}}(\Omega)$ при всех $\sigma_{27}\in(1,+\infty)$), выведем равенства

$$\int\limits_\Omega \Big(\tau\alpha_i\overline{p(\rho)}\;\overline{T_k(\rho)} - \mathbb{S}_i : [\nabla\otimes(\tau\overline{\boldsymbol{r}}_k)]\Big)\,d\boldsymbol{x} = -\alpha_i\int\limits_\Omega \overline{p(\rho)}\,\overline{\boldsymbol{r}}_k\cdot\nabla\tau\,d\boldsymbol{x} -$$

$$(107)\qquad -\int\limits_\Omega \tau(\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_i) : (\nabla\otimes\overline{\boldsymbol{r}}_k)\,d\boldsymbol{x} - \int\limits_\Omega (\rho_i\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{u}_i) : ((\nabla\tau)\otimes\overline{\boldsymbol{r}}_k)\,d\boldsymbol{x}$$

$$-\int\limits_\Omega \tau(\rho_i\boldsymbol{f}_i + \boldsymbol{g}_i)\cdot\overline{\boldsymbol{r}}_k\,d\boldsymbol{x}, \qquad i = 1,\dots,N.$$

Перейдем к пределу в (106) и вычтем из полученных соотношений уравнения (107). При этом ввиду (98), (100), (101) и (103) взаимно уничтожатся первый, третий и четвертый интегралы в правых частях. В результате приходим к соотношениям

$$\lim_{\delta\to 0}\int\limits_\Omega \big(\tau\alpha_i\widetilde{p}(\rho_\delta)T_k(\rho_\delta) - \mathbb{S}_{i\delta} : [\nabla\otimes(\tau\boldsymbol{r}_{\delta k})]\big)\,d\boldsymbol{x}$$

$$-\int\limits_\Omega \Big(\tau\alpha_i\overline{p(\rho)}\;\overline{T_k(\rho)} - \mathbb{S}_i : [\nabla\otimes(\tau\overline{\boldsymbol{r}}_k)]\Big)\,d\boldsymbol{x}$$

$$(108)\qquad = \lim_{\delta\to 0}\int\limits_\Omega \boldsymbol{v}_\delta\cdot\mathrm{Comm}(\tau\rho_{i\delta}\boldsymbol{u}_{i\delta}, T_k(\rho_\delta))\,d\boldsymbol{x} - \int\limits_\Omega \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{Comm}(\tau\rho_i\boldsymbol{u}_i, \overline{T_k(\rho)})\,d\boldsymbol{x}$$

$$-\lim_{\delta\to 0}\int\limits_\Omega \tau\rho_{i\delta}\boldsymbol{u}_{i\delta}\cdot\nabla\Delta^{-1}\mathrm{div}(T_k(\rho_\delta)\boldsymbol{v}_\delta)\,d\boldsymbol{x}$$

$$+\int\limits_\Omega \tau\rho_i\boldsymbol{u}_i\cdot\nabla\Delta^{-1}\mathrm{div}(\overline{T_k(\rho)}\boldsymbol{v})\,d\boldsymbol{x}, \qquad i = 1,\dots,N.$$

Первое и второе слагаемые в правой части (108) взаимно уничтожаются в силу (98), (102) и свойств оператора Comm. Рассмотрим подробнее третье и четвертое слагаемые в правой части (108). Используя процедуру ренормализации уравнения (1) с негладкой функцией T_k (см. [13], Лемма 3.5, стр. 162), получаем соотношение

$$\operatorname{div}(T_k(\rho_\delta)\boldsymbol{v}_\delta) - k\chi_{\{\rho_\delta>k\}}\operatorname{div}\boldsymbol{v}_\delta = 0. \tag{109}$$

Эта процедура законна благодаря тому, что $\rho_\delta \in L_{2\beta}(\Omega)$, $\beta > 3$ (см. (61)). Применяя к этому соотношению оператор $\nabla\Delta^{-1}$, умножая на $\tau\rho_{i\delta}\boldsymbol{u}_{i\delta}$ и интегрируя по области Ω, находим

$$\int\limits_\Omega \tau\rho_{i\delta}\boldsymbol{u}_{i\delta}\cdot\nabla\Delta^{-1}\operatorname{div}\left(T_k(\rho_\delta)\boldsymbol{v}_\delta\right)d\boldsymbol{x}$$
$$= k\int\limits_\Omega \tau\rho_{i\delta}\boldsymbol{u}_{i\delta}\cdot\nabla\Delta^{-1}(\chi_{\{\rho_\delta>k\}}\operatorname{div}\boldsymbol{v}_\delta)\,d\boldsymbol{x}, \qquad i=1,\dots,N.$$

С другой стороны, переходя в (109) к пределу при $\delta\to 0$ (после выделения подпоследовательности и использования стандартных обозначений для слабых пределов), приходим к равенству $\operatorname{div}(\overline{T_k(\rho)}\boldsymbol{v}) - k\overline{\chi_{\{\rho>k\}}\operatorname{div}\boldsymbol{v}} = 0$. Применяя к этому соотношению оператор $\nabla\Delta^{-1}$, умножая на $\rho_i\boldsymbol{u}_i$ и интегрируя по Ω, получаем

$$\int\limits_\Omega \tau\rho_i\boldsymbol{u}_i\cdot\nabla\Delta^{-1}\operatorname{div}\left(\overline{T_k(\rho)}\boldsymbol{v}\right)d\boldsymbol{x} =$$
$$= k\int\limits_\Omega \tau\rho_i\boldsymbol{u}_i\cdot\nabla\Delta^{-1}\overline{\chi_{\{\rho>k\}}\operatorname{div}\boldsymbol{v}}\,d\boldsymbol{x}, \qquad i=1,\dots,N.$$

Ввиду (102) и сходимости $\chi_{\{\rho_\delta>k\}}\operatorname{div}\boldsymbol{v}_\delta \to \overline{\chi_{\{\rho>k\}}\operatorname{div}\boldsymbol{v}}$ слабо в $L_2(\Omega)$, выводим

$$k\int\limits_\Omega \tau\rho_{i\delta}\boldsymbol{u}_{i\delta}\cdot\nabla\Delta^{-1}(\chi_{\{\rho_\delta>k\}}\operatorname{div}\boldsymbol{v}_\delta)\,d\boldsymbol{x} \to k\int\limits_\Omega \tau\rho_i\boldsymbol{u}_i\cdot\nabla\Delta^{-1}\overline{\chi_{\{\rho>k\}}\operatorname{div}\boldsymbol{v}}\,d\boldsymbol{x}$$

при $\delta\to 0$ для всех $i=1,\dots,N$. Это означает, что последние два слагаемых в правой части (108) также взаимно уничтожаются. Таким образом, правая, а значит и левая часть (108) обращается в нуль. Но левая часть представима[8] в виде

$$\lim_{\delta\to 0}\int\limits_\Omega \tau T_k(\rho_\delta)\left(\alpha_i\widetilde{p}(\rho_\delta)\sum_{m=1}^N \nu_{im}\operatorname{div}\boldsymbol{u}_{m\delta}\right)d\boldsymbol{x}$$
$$-\int\limits_\Omega \tau\overline{T_k(\rho)}\left(\alpha_i\overline{p(\rho)} - \sum_{m=1}^N \nu_{im}\operatorname{div}\boldsymbol{u}_m\right)d\boldsymbol{x}$$
$$-\lim_{\delta\to 0}\sum_{m=1}^N \nu_{im}\int\limits_\Omega (\operatorname{div}\boldsymbol{u}_{m\delta})\Big(2\boldsymbol{r}_{\delta k}\cdot\nabla\tau + (\Delta\tau)\Delta^{-1}T_k(\rho_\delta)\Big)\,d\boldsymbol{x}$$
$$+\sum_{m=1}^N \nu_{im}\int\limits_\Omega (\operatorname{div}\boldsymbol{u}_m)\Big(2\overline{\boldsymbol{r}}_k\cdot\nabla\tau + (\Delta\tau)\Delta^{-1}\overline{T_k(\rho)}\Big)\,d\boldsymbol{x}$$

[8] См. сноску к формуле (78).

$$+\lim_{\delta\to 0}\int_\Omega \mathbb{S}_{i\delta} : \Big(\nabla\otimes[(\nabla\tau)\Delta^{-1}T_k(\rho_\delta)]\Big)\,d\boldsymbol{x} - \int_\Omega \mathbb{S}_i : \Big(\nabla\otimes[(\nabla\tau)\Delta^{-1}\overline{T_k(\rho)}]\Big)\,d\boldsymbol{x},$$

причем здесь, благодаря (98) и (99), последние четыре интеграла взаимно уничтожаются. Следовательно, (108) превращаются в соотношения для эффективных вязких потоков компонент смеси

$$\lim_{\delta\to 0}\int_\Omega \tau T_k(\rho_\delta)\left(\alpha_i\widetilde{p}(\rho_\delta) - \sum_{m=1}^N \nu_{im}\mathrm{div}\boldsymbol{u}_{m\delta}\right)d\boldsymbol{x}$$

$$= \int_\Omega \tau\overline{T_k(\rho)}\left(\alpha_i\overline{p(\rho)} - \sum_{m=1}^N \nu_{im}\mathrm{div}\boldsymbol{u}_m\right)d\boldsymbol{x}, \qquad i=1,\ldots,N.$$

Отсюда аналогично выводу формулы (81) (но с привлечением (101)) получаем ключевое соотношение

$$\nu_0\Big(\overline{T_k(\rho)p(\rho)} - \overline{T_k(\rho)}\ \overline{p(\rho)}\Big) = \overline{T_k(\rho)\mathrm{div}\boldsymbol{v}} - \overline{T_k(\rho)}\mathrm{div}\boldsymbol{v} \quad \text{п. в. в } \Omega. \tag{110}$$

В силу липшицевости функции $T_k(\cdot)$, тождества $(T_k(z))^\gamma = T_{k^\gamma}(z^\gamma)$ и элементарного неравенства $|s_1-s_2|^{\gamma+1} \leqslant (s_1^\gamma - s_2^\gamma)(s_1-s_2)$ при всех $s_{1,2}\geqslant 0$, справедливы соотношения

$$\limsup_{\delta\to 0}\int_\Omega K|T_k(\rho)-T_k(\rho_\delta)|^{\gamma+1}\,d\boldsymbol{x} \leqslant \limsup_{\delta\to 0}\int_\Omega K(\rho^\gamma-\rho_\delta^\gamma)(T_k(\rho)-T_k(\rho_\delta))\,d\boldsymbol{x}$$

$$= \int_\Omega K\left(\overline{\rho^\gamma T_k(\rho)} - \overline{\rho^\gamma}\,\overline{T_k(\rho)}\right)\,d\boldsymbol{x} + \int_\Omega K\left(\rho^\gamma - \overline{\rho^\gamma}\right)\left(T_k(\rho)-\overline{T_k(\rho)}\right)d\boldsymbol{x}.$$

Теперь, используя выпуклость функции $s\mapsto s^\gamma$, вогнутость функции T_k, и в конце привлекая (110), приходим к соотношениям:

$$\begin{aligned}\limsup_{\delta\to 0}\int_\Omega K|T_k(\rho_\delta)-T_k(\rho)|^{\gamma+1}\,d\boldsymbol{x} &\leqslant \int_\Omega\Big(\overline{T_k(\rho)p(\rho)} - \overline{T_k(\rho)}\ \overline{p(\rho)}\Big)\,d\boldsymbol{x}\\ &= \frac{1}{\nu_0}\int_\Omega\Big(\overline{T_k(\rho)\mathrm{div}\boldsymbol{v}} - \overline{T_k(\rho)}\mathrm{div}\boldsymbol{v}\Big)\,d\boldsymbol{x}.\end{aligned} \tag{111}$$

Ввиду (97), правая часть (111) допускает оценку[9]

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\Big(\overline{T_k(\rho)\mathrm{div}\boldsymbol{v}} - \overline{T_k(\rho)}\mathrm{div}\boldsymbol{v}\Big)\,d\boldsymbol{x}\\ &\leqslant \sup_{\delta>0}\|\mathrm{div}\boldsymbol{v}_\delta\|_{L_2(\Omega)}\ \limsup_{\delta\to 0}\Big\|T_k(\rho_\delta)-T_k(\rho)+T_k(\rho)-\overline{T_k(\rho)}\Big\|_{L_2(\Omega)}\\ &\leqslant C_{55}(C_{54})\limsup_{\delta\to 0}\|T_k(\rho_\delta)-T_k(\rho)\|_{L_2(\Omega)}\\ &\leqslant C_{56}(C_{55},|\Omega|)\limsup_{\delta\to 0}\|T_k(\rho_\delta)-T_k(\rho)\|_{L_{\gamma+1}(\Omega)}.\end{aligned} \tag{112}$$

[9]Ввиду того что $\overline{T_k(\rho)\mathrm{div}\boldsymbol{v}} - \overline{T_k(\rho)}\mathrm{div}\boldsymbol{v} = \mathrm{wk}\lim\limits_{\delta\to 0}\Big(T_k(\rho_\delta)-\overline{T_k(\rho)}\Big)\,\mathrm{div}\boldsymbol{v}_\delta$.

Из (111) и (112) очевидно получаем

$$\sup_{k>1}\limsup_{\delta\to 0}\int\limits_{\Omega}|T_k(\rho_\delta)-T_k(\rho)|^{\gamma+1}\,d\boldsymbol{x}\leqslant C_{57}(C_{56},\nu_0,\gamma). \tag{113}$$

Обозначим для произвольного $k>1$

$$L_k(s)=\begin{cases} s\ln s - s, & \text{если } s\in(0,k],\\ s\ln k - k, & \text{если } s\in(k,+\infty).\end{cases}$$

Заметим, что $sL_k'(s)-L_k(s)=T_k(s)$ при всех $s\in(0,+\infty)$, причем $L_k(s)=s\ln k+l_k(s)$, где l_k удовлетворяет условиям Леммы 3.5 из [13], стр. 162, т. е. мы можем применить процедуру ренормализации (с функцией l_k) к уравнению неразрывности для ρ_δ и в результате получить

$$\operatorname{div}(L_k(\rho_\delta)\boldsymbol{v}_\delta)+T_k(\rho_\delta)\operatorname{div}\boldsymbol{v}_\delta=0 \quad \text{п. в. в } \Omega.$$

Интегрируя это соотношение по области Ω и переходя к пределу при $\delta\to 0$, получаем

$$\int\limits_{\Omega}\overline{T_k(\rho)\operatorname{div}\boldsymbol{v}}\,d\boldsymbol{x}=0. \tag{114}$$

С другой стороны, ренормализуя уравнение неразрывности для предельной плотности (см. [5], Лемма 3.8, стр. 118), выводим

$$\int\limits_{\Omega}T_k(\rho)\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}=0. \tag{115}$$

Для любой функции $h\in L_{\sigma_{28}}(\Omega)$ и показателей $\sigma_{28}>1$, $\sigma_{29}\in[1,\sigma_{28})$ верны оценки

$$\begin{aligned}\|h-T_k(h)\|_{L_{\sigma_{29}}(\Omega)}&\leqslant\|h\|_{L_{\sigma_{28}}(\Omega)}\,(\operatorname{meas}\{|h|>k\})^{\frac{1}{\sigma_{29}}-\frac{1}{\sigma_{28}}}\\ &\leqslant\|h\|_{L_{\sigma_{28}}(\Omega)}\|h\|_{L_1(\Omega)}^{\frac{1}{\sigma_{29}}-\frac{1}{\sigma_{28}}}k^{\frac{1}{\sigma_{28}}-\frac{1}{\sigma_{29}}}.\end{aligned} \tag{116}$$

Полагая $h=\rho_\delta$, $\sigma_{28}=\zeta_2(\gamma)$ и $\sigma_{29}=1$, получаем ввиду (96):

$$\limsup_{\delta\to 0}\|T_k(\rho_\delta)-\rho_\delta\|_{L_1(\Omega)}\leqslant C_{57}(C_{53},N,m,\gamma)k^{\frac{1}{\zeta_2(\gamma)}-1},$$

и следовательно

$$\lim_{k\to+\infty}\limsup_{\delta\to 0}\|T_k(\rho_\delta)-\rho_\delta\|_{L_1(\Omega)}=0. \tag{117}$$

Полагая $h=\rho$ в (116) и действуя аналогично, получаем

$$\lim_{k\to+\infty}\|T_k(\rho)-\rho\|_{L_1(\Omega)}=0. \tag{118}$$

С другой стороны, заметим, что $\left\|\overline{T_k(\rho)}-\rho\right\|_{L_1(\Omega)}\leqslant\liminf_{\delta\to 0}\|T_k(\rho_\delta)-\rho_\delta\|_{L_1(\Omega)}$, а значит благодаря (117) можно заключить $\lim\limits_{k\to+\infty}\left\|\overline{T_k(\rho)}-\rho\right\|_{L_1(\Omega)}=0$. Привлекая (118), получаем $\lim\limits_{k\to+\infty}\left\|\overline{T_k(\rho)}-T_k(\rho)\right\|_{L_1(\Omega)}=0$, причем благодаря (113) это свойство можно усилить, в частности, до

$$\lim_{k\to+\infty}\left\|\overline{T_k(\rho)}-T_k(\rho)\right\|_{L_2(\Omega)}=0. \tag{119}$$

Ввиду (114) и (115) мы можем переписать (111) в виде

$$\limsup_{\delta\to 0}\int\limits_{\Omega}|T_k(\rho_\delta)-T_k(\rho)|^{\gamma+1}\,d\boldsymbol{x}\leqslant\frac{1}{K\nu_0}\int\limits_{\Omega}\Big(T_k(\rho)-\overline{T_k(\rho)}\Big)\,\mathrm{div}\boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{x}.$$

В силу (119) правая, а значит и левая часть последнего неравенства стремится к нулю при $k\to\infty$. Привлекая (117) и (118), окончательно получаем

$$\limsup_{\delta\to 0}\|\rho_\delta-\rho\|_{L_1(\Omega)}\leqslant\limsup_{\delta\to 0}\|\rho_\delta-T_k(\rho_\delta)\|_{L_1(\Omega)}$$

$$+\limsup_{\delta\to 0}\|T_k(\rho_\delta)-T_k(\rho)\|_{L_1(\Omega)}+\|T_k(\rho)-\rho\|_{L_1(\Omega)}\to 0$$

при $k\to+\infty$, что влечет (105), а значит завершает доказательство всей Теоремы 1.3.

References

[1] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I*, Comm. Pure Appl. Math., **12**:4 (1959), 623–727. Zbl 0093.10401

[2] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II*, Comm. Pure Appl. Math., **17**:1 (1964), 35–92. Zbl 0123.28706

[3] M. E. Bogovski, *On solutions of certain problems of vector analysis involving the operators* div *and* grad, Tr. Semin. im. S. L. Soboleva, **1**, Institute of Mathematics, Siberian Branch of USSR Acad. Sci., Novosibirsk, 1980, 5–40. (in Russian).

[4] R. Coifman, Y. Meyer, *On commutators of singular integrals and bilinear singular integrals*, Transactions of the American Mathematical Society, **212** (1975), 315–331. Zbl 0324.44005

[5] E. Feireisl, A. Novotný, *Singular limits in thermodynamics of viscous fluids*, Advances in Mathematical Fluid Mechanics, Birkhäuser, Basel, 2009. Zbl 1176.35126

[6] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer–Verlag, Berlin, 1983. Zbl 0562.35001

[7] A. V. Kazhikov, A. N. Petrov, *Well-posedness of the initial-boundary value problem for a model system of equations of a multicomponent mixture*, Din. Splosh. Sredy **35** (1978), 61–73. (in Russian).

[8] N. A. Kucher, A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Stationary Solutions to the Equations of Dynamics of Mixtures of Heat-Conductive Compressible Viscous Fluids*, Siberian Math. J., **53**:6 (2012), 1075–1088. Zbl 1261.20038

[9] P.-L. Lions, *Mathematical topics in fluid mechanics, v. 2: Compressible Models*, Oxford University Press, New York, 1998. Zbl 0908.76004

[10] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Solubility of initial boundary value problem for the equations of polytropic motion of multicomponent viscous compressible fluids*, Siberian Electr. Math. Reports, **13** (2016), 541–583. (in Russian). Zbl 06607053

[11] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Solubility of a stationary boundary-value problem for the equations of motion of a one-temperature mixture of viscous compressible heat–conducting fluids*, Izvestiya: Mathematics, **78**:3 (2014), 554–579. Zbl 06323424

[12] A. E. Mamontov, D. A. Prokudin, *Viscous compressible multi-fluids: modeling and multi-D existence*, Methods and Applications of Analysis, **20**:2 (2013), 179–195. Zbl 1290.35203

[13] A. Novotný, I. Straškraba, *Introduction to the mathematical theory of compressible flow*, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, **27**, Oxford University Press, Oxford, 2004. Zbl 1088.35051

[14] A. N. Petrov, *Well-posedness of initial-boundary value problems for one-dimensional equations of mutually penetrating flows of ideal gases*, Din. Splosh. Sredy, **56** (1982), 105–121. (in Russian).

[15] D. A. Prokudin, M. V. Krayushkina, *Solvability of steady boundary value problem for a model system of equations of barotropic motion of a mixture of viscous compressible fluids*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **19**:3 (2016), 55–67. (in Russian).

[16] L. Tartar, *Compensated compactness and applications to partial differential equations*, in Nonlinear Analysis and Mechanics, Heriot–Watt Symposium IV, R. Knops, ed., Pitman Research Notes in Mathematics, **39**, Pitman, Boston, 1979, 136–212. Zbl 0437.35004

Alexander Evgenyevich Mamontov, Dmitriy Alexeyevich Prokudin
Lavrentyev Institute of Hydrodynamics,
pr. Lavrent'eva, 15,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: aemamont@hydro.nsc.ru