

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 13, стр. 694–703 (2016)

УДК 517.958

DOI 10.17377/semi.2016.13.054

MSC 35Q60, 35R30

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ РАЗРЫВА
ПЛОТНОСТИ ИСТОЧНИКОВ АКТИВНОСТИ В
ПОЗИТРОННО-ЭМИССИОННОЙ ТОМОГРАФИИ

И.П. ЯРОВЕНКО

ABSTRACT. This paper deals with the inverse problem of a positron emission tomography. It is assumed that the outgoing radiation density is only given, and the task is to find the surface of an activity source. The uniqueness of the solution is proved, and the corresponding solution algorithm is outlined. Some numerical results are presented in graphical form for reconstructing the boundaries of unknown activity sources.

Keywords: positron emission tomography, radiation transfer theory.

1. ВВЕДЕНИЕ

В основе принципа позитронно-эмиссионной томографии лежит идея регистрации двух противоположно направленных гамма-лучей, возникающих в результате аннигиляции позитронов, излучаемых специальным препаратом. Регистрация пары фотонов, родившихся в результате аннигиляции, помогает выделять именно те траектории фотонов, которые несут необходимую информацию о распределении источника активности в веществе.

Идеализированная интегральная модель традиционной позитронной эмиссионной томографии (ПЭТ) хорошо известна [1]. Для заданного распределения источника активности (изотопа) $f(r)$ внутри среды $G \subset R^3$ с коэффициентом ослабления $\mu(r)$ и детекторов малых размеров A и B на поверхности ∂G

YAROVENKO, I.P., THE METHOD FOR FINDING ACTIVITY DISCONTINUES IN POSITRON EMISSION TOMOGRAPHY.

© 2016 Яровенко И.П.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-11-00079).

Поступила 6 мая 2016 г., опубликована 24 августа 2016 г.

просвечиваемого тела, модель формирования данных имеет вид:

$$(1) \quad g(A, B) = \exp \left\{ - \int_A^B \mu(r) dl \right\} \int_A^B f(r) dl.$$

Здесь $r = (r_1, r_2, r_3)$ — точка области G , а интегрирование ведется вдоль отрезка, соединяющего детекторы, находящиеся в точках A и B . Данный отрезок называется линией отклика детекторов A и B . В классической постановке задача заключается в определении функции f , функции μ и g считаются известными. Решение данной задачи сводится к обращению преобразования Радона от функции f .

В работе рассматривается задача позитронно-эмиссионной томографии, заключающаяся в определении границы распределенных в среде источников активности. Известной считается только функция g , описывающая сигнал, регистрируемый томографом. В результате решения данной задачи определяется гораздо меньше информации о строении неизвестной среды, чем при решении классической задачи позитронно-эмиссионной томографии. Однако, данная информация может быть весьма полезна, так как позволяет локализовать нахождение источников активности. В тоже время, данный подход требует меньше априорной информации. В частности, коэффициент ослабления μ считается не известным.

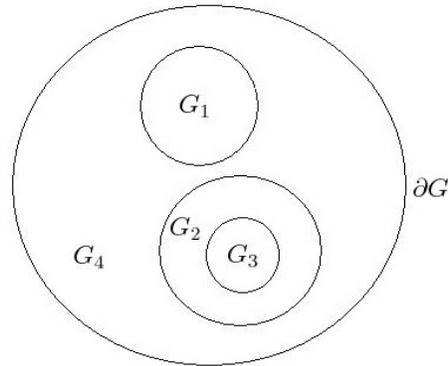
Математическим эффектом, на основе которого построен предлагаемый метод решения задачи, является наличие особенностей у градиента функции g . Формула для градиента получена в работе [2]. Было показано, что градиент имеет особенности при приближении линий отклика к касательным для поверхности разрыва коэффициента поглощения либо источника активности. Ранее наличие особенностей было отмечено в численных экспериментах [3].

Предлагаемый в работе алгоритм тестируется на ряде численных экспериментов. Для моделирования проекционных данных, описываемых функцией $g(A, B)$ применяется метод Монте-Карло [3]. Такой подход позволяет оценить, как алгоритм, обоснование которого проведено в рамках простейшей модели (1), будет реагировать на ошибки во входных данных, вносимые случайностью моделируемого физического процесса.

К числу ограничений снижающих прикладную ценность данной работы следует отнести предположение о наличии всего одного включения в среде и требование его выпуклости. Также среди недостатков рассматриваемой в работе модели стоит указать предположение об отсутствии в среде рассеяния. Несмотря на указанные недостатки, численные эксперименты, проведенные в работе, показали, что большинство ограничений можно ослабить. В дальнейшем планируется обобщить полученные результаты и тем самым расширить класс решаемых задач.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ТОМОГРАФИИ

Будем считать, что область G — ограниченная и выпуклая. Для характеристики неоднородности среды, заполняющей область G введем в рассмотрение некоторое подмножество G_0 области G . Будем полагать, что множество G_0 — открытое и плотное в \bar{G} , т.е. $\bar{G}_0 = \bar{G}$. Также будем считать, что множество G_0 представимо в виде конечного объединения непересекающихся подобластей,

Рис. 1. Схематичное изображение строения области G .

таких что

$$G_0 = \bigcup_{i=1}^p G_i, \quad G_i \cap G_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Схематично геометрия области G показана на Рис. 1. Подобласти G_i , $i = 1, \dots, p$ можно интерпретировать, как некоторые части неоднородной среды G , заполненные i -м веществом. В такой трактовке структура разбения G_1, G_2, \dots, G_p определяется внутренним строением среды G .

Символами ∂G_i , $i = 1, \dots, p$ будем обозначать границы под областей G_i , которые будем считать липшицевыми и кусочно дважды дифференцируемыми. И пусть $\partial G_0 = \bigcup_{i=1}^p \partial G_i$ — множество содержащее все граничные точки под областей G_i . Символом $\partial G = \partial \bar{G}$ будем обозначать внешнюю границу области G , относительно которой будем полагать, что она липшицева и кусочно дважды непрерывно дифференцируема. Очевидно, что $\partial G \subset \partial G_0$.

Относительно функций μ и f будем полагать, что они неотрицательны и ограничены на \bar{G} , имеют непрерывные частные производные первого порядка в каждой из под областей G_i , $i = 1, \dots, p$ и терпят разрывы первого рода на поверхности ∂G_0 .

Рассмотрим следующую задачу:

Задача. Из уравнения (1) определить множество ∂G_0 , если известна функция $g(A, B)$, $A, B \in \partial G$.

Таким образом задача состоит в определении поверхностей разрыва функций μ и f , либо части этих границ.

Подобные задачи исследовались в рамках трансмиссионной томографии и оптической томографии. Библиография работ в данном направлении весьма обширна [4]-[9]. В основе предлагаемого метода решения задачи лежит изучение поведения градиента продолжения функции $g(A, B)$ внутрь области и построение формулы, позволяющей получить информацию о внутреннем строении среды G .

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Пусть $\Omega = \{\omega \in R^3 : |\omega| = 1\}$ – единичная сфера в трехмерном пространстве и $\omega \in \Omega$ – некоторое направление. Для точки $r \in G$ и направления $\omega \in \Omega$ рассмотрим луч $L_{r,\omega} = \{z : z = r + \omega t, t > 0\}$ и определим величину $d(r, \omega) = mes_1(L_{r,\omega} \cap G)$, где символом mes_1 обозначена мера Лебега на прямой. Данная величина выражает расстояние от точки r до внешней границы в направлении ω .

Положим, что для любых $r \in G_0, \omega \in \Omega$ луч $L_{r,\omega}$ пересекает границы областей G_i в конечном числе точек $y_j = r + t_j(r, \omega)\omega$. Условимся считать, что

$$0 < t_1(r, \omega) < t_2(r, \omega) < \dots < t_{l(r,\omega)}(r, \omega) = d(r, \omega), t_0(r, \omega) = 0,$$

$$(2) \quad \sup_{r \in G_0, \omega \in \Omega} l(r, \omega) < \infty.$$

Используя введенные обозначения перепишем формулу (1) в следующем виде

$$(3) \quad \begin{aligned} \tilde{g}(r, \omega) &= g(r - d(r, -\omega)\omega, r + d(r, \omega)\omega) \\ &= \exp \left\{ - \int_{-d(r, -\omega)}^{d(r, \omega)} \mu(r + \omega t) dt \right\} \int_{-d(r, -\omega)}^{d(r, \omega)} f(r + \omega t) dt. \end{aligned}$$

Как видно, функция \tilde{g} представляет собой продолжение функции g , заданной на границе внутрь области.

Определим множество $\{L\}$ лучей $L_{r,\omega}$ таких, что любой из них не будет касательным к поверхностям $\partial G_i, i = 1, \dots, p$, в тех точках, которые являются пересечением $L_{r,\omega}$ и ∂G_i , и поверхности ∂G_i в любой из точек пересечения являются гладкими.

Обозначим

$$\langle \mu(y_j) \rangle = \mu^+(y_j) - \mu^-(y_j), \quad \langle f(y_j) \rangle = f^+(y_j) - f^-(y_j),$$

$$\mu^+(y_j) = \lim_{t \rightarrow t_j(r, \pm\omega) - 0} \mu(r \pm t\omega), \quad f^+(y_j) = \lim_{t \rightarrow t_j(r, \pm\omega) - 0} f(r \pm t\omega),$$

$$\mu^-(y_j) = \lim_{t \rightarrow t_j(r, \pm\omega) + 0} \mu(r \pm t\omega), \quad f^-(y_j) = \lim_{t \rightarrow t_j(r, \pm\omega) + 0} f(r \pm t\omega).$$

Пусть $r_0 \in G_0$ и $\omega \in \Omega$ – некоторое фиксированное направление такое, что $L_{r_0,\omega}, L_{r_0,-\omega} \in \{L\}$. При сделанных предположениях существует окрестность $U(r_0)$ точки r_0 , такая, что $l(r, \omega) = l(r_0, \omega) = l_0^+$ и $l(r, -\omega) = l(r_0, -\omega) = l_0^-$ и пересечение лучей $L_{r_0,\omega}, L_{r_0,-\omega} \in \{L\}$ с множеством G_0 состоит из отрезков $\{r_0 + \omega t, t_{j-1}(r_0, \omega) < t < t_j(r_0, \omega)\}, j = 1, \dots, l(r_0, \omega)$ и $\{r_0 - \omega t, t_{j-1}(r_0, -\omega) < t < t_j(r_0, -\omega)\}, j = 1, \dots, l(r_0, -\omega)$, где функции $t_j(r, \omega), t_k(r, -\omega), j = 1, \dots, l_0^+, k = 1, \dots, l_0^-$ имеют непрерывные частные производные первого порядка по r_1, r_2, r_3 [10]. В этих обозначениях справедлива следующая теорема [2].

Теорема 1. Для всех $r \in U(r_0)$, $\omega \in \Omega$ существует градиент функции \tilde{g} и для него верна формула

$$(4) \quad \nabla_r \tilde{g}(r, \omega) = - \sum_{j=-l_0^-}^{l_0^+} \left[\langle f(y_j) \rangle - \int_{-d(r, -\omega)}^{d(r, \omega)} f(r + \omega t) dt \langle \mu(y_j) \rangle \right] \\ \times \frac{n(y_j)}{n(y_j) \cdot \omega} \exp \left\{ - \int_{-d(r, -\omega)}^{d(r, \omega)} \mu(r + \omega t) dt \right\} + O(1),$$

где $y_j = r + t_j(r, \omega)\omega$, $t_{-j}(r, \omega) = t_j(r, -\omega)$, $O(1)$ — некоторая ограниченная величина.

Заметим, что если луч $L_{r, \omega}$ либо $L_{r, -\omega}$ стремится к касательной к поверхности ∂G_i в некоторой точке $y_j \in \partial G_i$, то $n(y_j) \cdot \omega \rightarrow 0$. Поэтому член суммы в (4) с индексом j , будет стремиться к бесконечности, при условии, что соответствующая величина в квадратных скобках будет отлична от нуля. Рассмотрим более подробно выражение в квадратных скобках. По аналогии с [5] назовем его «мерой видимости» граничной точки y_i в направлении ω . Выделим три основных случая:

1. $\langle \mu(y_i) \rangle = 0$, $\langle f(y_i) \rangle \neq 0$. При выполнении этих условий мера видимости отлична от нуля и соответствующий член в сумме (4) будет неограничен при приближении луча $L_{r, \omega}$ к касательной к поверхности ∂G_0 в точке y_i .

2. $\langle \mu(y_i) \rangle \neq 0$, $\langle f(y_i) \rangle = 0$. В данном случае все зависит от выполнения условия

$$(5) \quad \int_{-d(y_i, -\omega)}^{d(y_i, \omega)} f(y_i + t\omega) dt \neq 0.$$

Когда данный интеграл отличен от нуля соответствующий член в сумме (4) будет неограничен. Физически условие (5) соответствует условию освещенности точки y_i . Если же условие (5) не выполняется, то соответствующий член в формуле для градиента будет ограничен при всех $y \in \partial G_0$.

3. $\langle f(y_i) \rangle \neq 0$, $\langle \mu(y_i) \rangle \neq 0$. В данном случае возможно два варианта. Если условие (5) нарушено, то, хоть точка y_i и не «освещена», градиент выходящего излучения будет иметь особенность за счет разрыва функции, описывающей источники активности. Когда условие (5) справедливо, наличие особенностей у градиента выходящего излучения будет зависеть, как от соотношения скачков $\langle f \rangle$ и $\langle \mu \rangle$, так и от геометрии области G . Приведем пример, такого случая.

Пример 1. Пусть среда, представляющая собой шар расположенный в начале координат радиуса $R_1 = 5$ см и содержит в себе одну неоднородность в виде шара с центром в начале координат, радиуса $R_2 = 3$ см. При этом функции f и μ таковы, что выполняется соотношение

$$(6) \quad \langle f(y) \rangle = 8 \langle \mu(y) \rangle, \quad |y| = R_2.$$

В данном случае градиент решения будет ограничен везде в области G при любых значениях функций f и μ , удовлетворяющих условию (6). В то же время при нарушении условия (6) градиент будет неограничен при приближении направления ω к касательному к границе шара радиуса R_2 .

Отметим, что из условия неограниченности какого-либо слагаемого в (4) нельзя делать вывод о неограниченности градиента, так как и другие слагаемые в правой части (4) могут быть неограниченны. Приведем пример, когда соотношения коэффициентов будут такими, что каждое из слагаемых в (4) будет неограниченным, а их сумма будет конечна.

Пример 2. Пусть область G представляет собой шар радиуса 5 см с центром в начале координат и содержит в себе два включения $G_1 = \{r : (r_1 - 2)^2 + r_2^2 + r_3^2 \leq 1\}$, $G_2 = \{r : (r_1 + 2)^2 + r_2^2 + r_3^2 \leq 1\}$, и пусть $G_3 = G / (G_1 \cup G_2)$. Будем считать, что функции f и μ постоянны в каждой из областей G_i и равны соответственно μ_i, f_i $i = 1, 2, 3$. Положим $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$ и $f_3 = 2, f_1 = 1, f_2 = 3$. В силу непрерывности функции μ соответствующие скачки в формуле (6) будут нулевыми и выражение для градиента примет вид:

$$(7) \quad \nabla_r \tilde{g}(r, \omega) = - \sum_{j=-l_0^-}^{l_0^+} \langle f(y_j) \rangle \frac{n(y_j)}{n(y_j) \cdot \omega} \exp \{-|d(r, \omega) + d(r, -\omega)|\} + O(1),$$

Рассмотрим направление $\omega_0 = (1, 0, 0)$. При приближении ω к ω_0 в точках $y_1 = (-2, 1, 0)$ и $y_2 = (2, 1, 0)$ величины $n(y_j) / (n(y_j) \cdot \omega)$ будут неограниченно возрастать, однако в силу выполнения соотношения $\langle \mu(y_1) \rangle + \langle \mu(y_2) \rangle = 0$ особенности будут компенсировать друг друга и сумма их будет конечна.

Таким образом, неограниченность градиента выходящего сигнала зависит не только от соотношения коэффициентов в смежных подобластях, но и от их взаимного расположения и геометрических размеров. Несмотря на это стоит отметить, что ситуации приведенные в рассмотренных примерах достаточно экзотичны и вряд ли могут встретиться на практике.

В тоже время из формулы (4) видно, что модуль градинта величины \tilde{g} может быть неограничен в точках прямы $\{r + t\omega, t \in R^1\}$, если эти прямые являются касательными к поверхности ∂G_0 . Для всех остальных точек области градиент ограничен. Пользуясь этим, можно выделять прямые, касательные ∂G_0 , и определять местоположение искомой поверхности. Алгоритм нахождения поверхностей в таком случае аналогичен предложенному в работе [7] для трансмиссионной томографии. Зададим сетку, покрывающую область G . В точках этой сетки будем вычислять значения величины $\nabla_r \tilde{g}$ для некоторого набора направлений ω . Отмечая точки прямых, соответствующих аномально большим значениям указанной выше величины, мы можем найти искомую поверхность ∂G_0 , как огибающую поверхность для выделенных линий.

В наших дальнейших рассуждениях ограничимся следующим простым случаем. Будем считать, что $G = G_1 \cup G_2$ где G_1 и $int\{G\} \equiv \overline{G} \setminus \partial G$ — строго выпуклые области с гладкими границами класса C^2 , и $G_1 \subset int\{G\}$.

В данном случае, очевидно, что выполнение условия

$$(8) \quad \left[\langle f(y_1) \rangle - \int_{-d(r, -\omega)}^{d(r, \omega)} f(r + \omega t) dt \langle \mu(y_1) \rangle \right] \neq 0, \quad y_1 \in \partial G_1,$$

достаточно для того чтобы градиент функции был неограничен при приближении луча $L_{r, \omega}$ к касательным для поверхности ∂G_1 .

Неограниченность градиента позволяет сравнительно просто получить теорему единственности решения задачи томографии в данном случае. Рассмотрим два набора коэффициентов μ_1, f_1 и μ_2, f_2 . Соответствующие им поверхности разрыва обозначим через ∂G_1^1 и ∂G_1^2 . Решение прямых задач для каждого набора коэффициентов, соответственно обозначим g_1 и g_2 . Продолжение решений по формуле (3) обозначим через \tilde{g}_1, \tilde{g}_2 . Очевидно, что совпадение функций g_1 и g_2 гарантирует и совпадение их продолжений. В данных обозначениях справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если для любой точки $r \in \partial G_1^i$ выполняется условие (8), и справедливо равенство $g_1 = g_2$, то $\partial G_1^1 = \partial G_1^2$.*

Доказательство. Предположим противное, что $\partial G_1^1 \neq \partial G_1^2$. Тогда существует такая точка $r_0 \in \partial G_1^1 \setminus \partial G_1^2$, что в некоторой ее окрестности для направлений близких к касательному к ∂G_1^1 в точке r_0 прямые $\{r + \omega t\}, r \in V(r_0)$ не имеют пересечений с областью G_1^2 . Рассмотрим точки $(r, \omega) \in V(r_0) \times \Omega$ такие, что $r \in G_1^1, r \rightarrow r_0$, а вектор $\omega \rightarrow \omega_0$ к касательному вектору поверхности ∂G_1^1 в точке r_0 . Для таких точек $|\nabla \tilde{g}_1| \rightarrow \infty$. С другой стороны, для тех же точек $\nabla \tilde{g}_2$ ограничена в силу выбора окрестности $V(r_0)$. Таким образом величины \tilde{g}_1 и \tilde{g}_2 не могут совпадать, что противоречит условиям теоремы. Полученное противоречие доказывает, что $\partial G_1^1 = \partial G_1^2$. \square

4. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Предложенный алгоритм был протестирован на ряде численных экспериментов. В качестве восстанавливаемого фантома был взят цилиндр G с центром в начале координат, радиуса 10 сантиметров и высотой 20 сантиметров, заполненный водой. Внутри цилиндра помещались один или несколько источников с единичной активностью. Все численные эксперименты проводились в два этапа. На первом этапе моделировался сигнал, регистрируемый позитронно-эмиссионным томографом. Для этого применялся метод Монте-Карло, описанный в работе [3]. В отличие от простейшей модели формирования проекционных данных (1), метод Монте-Карло позволяет учитывать физические эффекты, характерные для реального процесса измерения сигнала в позитронно-эмиссионной томографии. В частности, указанный алгоритм учитывает рассеяния по законам Релея и Комптона, а также неколлинеарность фотонов, родившихся в процессе аннигиляции. Применение такого подхода вносит в проекционные данные погрешность, характерную для реального физического процесса, что более естественно при тестировании метода решения обратной задачи, чем использование каких-либо модельных шумов добавленных к «точному» сигналу, вычисленному по формуле (1).

При проведении экспериментов моделировалось кольцо детекторов диаметром 842 мм, содержащее 642 детектора размером $4 \times 4 \times 20$ мм. Данные параметры соответствуют позитронно-эмиссионному томографу Biograph TM TruePoint PET · CT, производимому фирмой Сименс. Во всех расчетах при моделировании траектории фотона отслеживалось до 10 актов взаимодействия со средой. Данные о сечениях взаимодействия излучения с веществом брались из таблиц Хабла - Зельтцера [11]. Для генерации псевдослучайных чисел, равномерно распределенных в диапазоне $[0,1]$, использовался датчик, описанный в [12].

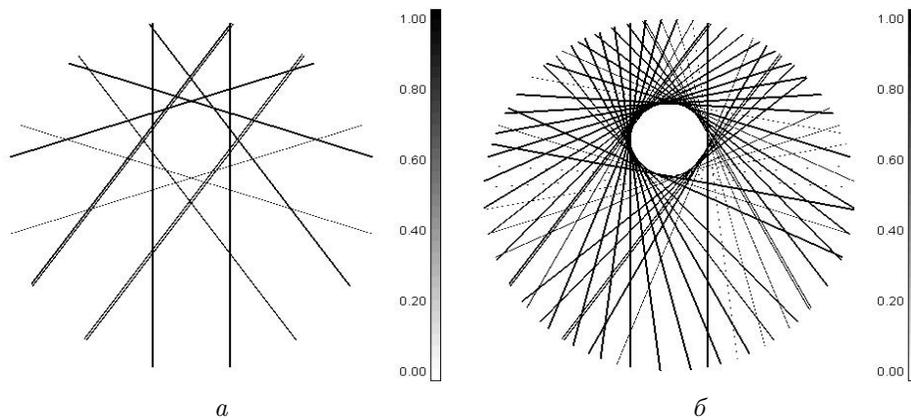


Рис. 2. Реконструкция среды содержащей одно включение: *a* – для восстановления используется 10 ракурсов. Несмотря на малое количество ракурсов местоположение и форма включения определяются достаточно хорошо; *б* – для восстановления используется 50 ракурсов. С увеличением числа ракурсов качество реконструкции растёт

На втором этапе численного эксперимента проводилась реконструкция среды в сечении $r_3 = 0$. Для заданного набора направлений $\omega_i, i = 1, \dots, N$ вычислялась величина $\nabla_r \tilde{g}(r, \omega_i)$ и выделялись прямые, на которых данная величина принимала аномально большие значения. Дифференцирование функции $\tilde{g}(r, \omega_i)$ выполнялось при помощи разностных отношений. Для преодоления хорошо известной неустойчивости численного дифференцирования применялась наиболее простая регуляризация [13], заключающаяся в согласовании точности вычислений дифференцируемой функции и шага сетки для точек r . Эти параметры определялись путем предварительных численных расчетов. Во всех экспериментах функция $\nabla \tilde{g}$ вычислялась на равномерной сетке 400×400 точек в квадрате $[-10, 10] \times [-10, 10]$ при разном количестве ракурсов сканирования $\omega_i, i = 1, \dots, N$.

Первая серия экспериментов отображает случай, когда моделируемый фантом содержит один выпуклый источник активности. В рассматриваемом нами примере – это шар радиуса 2 см с центром в точке $(0, 2, 0)$. На Рис. 2 в графическом виде представлены результаты реконструкции среды для 10 и 50 ракурсов. В условиях данного численного эксперимента выполнены условия теоремы 2. Хорошо видно, что местоположение включения отчетливо определяется даже при малом числе ракурсов. Естественно, что качество реконструкции улучшается одновременно с увеличением числа ракурсов.

Вторая серия экспериментов отображает случай, когда моделируемый фантом содержит два источника активности, представляющие собой шары радиуса 2 см с центрами в точках $(0, \pm 2, 0)$. На Рис. 3 в графическом виде представлены результаты реконструкции среды для 10 и 50 ракурсов. В условиях данного численного эксперимента условия теоремы 2 не выполняются. И при малом числе ракурсов определить местонахождение включений практически невозможно. Увеличение числа ракурсов несколько улучшает ситуацию. На данном

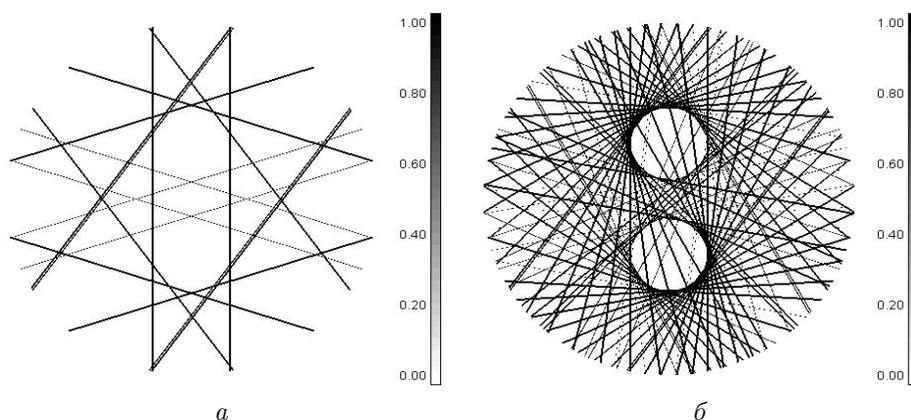


Рис. 3. Реконструкция среды содержащей два включения: *a* – для восстановления используется 10 ракурсов. При малом числе ракурсов затруднительно указать местоположение и форму включений. ; *б* – для восстановления используется 50 ракурсов. С увеличением числа ракурсов качество реконструкции растет, однако появляется большое число линий проходящих через оба включения .

рисунке хорошо видно, что осложняют ситуацию те линии, которые являются касательными к одному включению и пересекают другое включение. Очевидно, что при увеличении числа включений внутри среды данная ситуация будет усугубляться и вероятно даже увеличение числа ракурсов не улучшит ситуацию. Более того, даже в случае двух включений, увеличение числа ракурсов приведет к тому, что такие прямые «зачертят» внутренность второго включения.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

К числу недостатков предложенного метода следует отнести тот факт, что объектом поиска является поверхность разрывов коэффициентов уравнения (1), что представляет собой меньшую информацию, чем значения коэффициентов. В частности, по построенным томограммам затруднительно определить находится ли источник активности внутри восстановленной поверхности либо вне ее. Так же сильно ограничивает применение метода предположение в теореме единственности о наличии всего одного включения в среде и его строгая выпуклость. При нахождении поверхностей ∂G_i ограничения на количество включений G_i и условия выпуклости, по всей видимости, в некоторых случаях можно ослабить. Главное здесь — выделить такие и только такие касательные, которые определяют искомые поверхности. Если это проделано, то можно воспользоваться уже известными методами нахождения поверхностей по заданному семейству касательных [14]. Стоит так же отметить, то обстоятельство, что даже в случае нескольких включений применение метода позволяет визуально определить наличие включений и их форму. Таким образом ограничение на форму и количество включений является чисто техническим и связано с определением поверхностей по касательным. Возможно применение

метода определения, основанного не на выделении касательных, а на построении характеристических функций множеств ∂G_i используя информацию о количестве касательных к поверхностям в каждой точке, как это предлагалось в работе [15] позволит снять данные ограничения.

REFERENCES

- [1] Visvikis D., Cheze-Le Rest C., Jarritt P., *PET technology: current trends and future developments*, British Journal of Radiology, **77**:923 (2004), 906–910.
- [2] Yarovenko I.P., *A formula for the gradient of the output signal in positron emission tomography*, Far Eastern Mathematical Journal, **1** (2015), 121–128. Zbl 1338.35415
- [3] Yarovenko I.P., *Numerical experiments with the inhomogeneity indicator in positron emission tomography*, Journal of Applied and Industrial Mathematics **2** (2012), 261–268.
- [4] Anikonov D. S., *Construction of the inhomogeneity indicator for a medium under irradiation*, Doklady Mathematics, **3**, (1997), 949–952.
- [5] Anikonov D. S., *Integro-differential heterogeneity indicator in tomography problem*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **1** (1999), 17–59. Zbl 0918.65086
- [6] Anikonov D.S., Nazarov V.G., *Integro-differential indicator of inhomogeneity from incomplete data*, Doklady Mathematics, **1** (2001), 112–114. Zbl 1046.65503
- [7] Konovalova D. S. *Stepwise solution to an inverse problem for the radiative transfer equation as applied to tomography*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **1** (2009), 183–193. Zbl 1223.92030
- [8] Konovalova D. S., Prokhorov I.V., *The numerical implementation of the algorithm for the stepwise reconstruction in X-ray tomography problem*, Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki, **4**, (2008), 61–65. Zbl 1224.65303
- [9] Nazarov V.G., Yarovenko I.P., Solnishko N.V., *Numerical experiments in radiative transfer theory taking Compton scattering into account*, Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki. **2** (2005), 135–143.
- [10] Anikonov D.S., *A formula for the gradient of the transport equation solution*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **2** (1996), 85–100. Zbl 0924.35175
- [11] Hubbell J. H., Seltzer S. M., *Tables of X-Ray Mass Attenuation Coefficients and Mass Energy-Absorption Coefficients 1 Kev to 20 Mev for Elements Z=1 to 92 and 48 Additional Substances of Dosimetric Interest*, Preprint ISTIR-5632, Nat. Inst. of Standard and Technology, Gaithersburg, 1995.
- [12] L'Ecuyer P., Cote S., *Implementing a random number package with splitting facilities*, ACM Transactions on Mathematical Software, **1** (1991), 98–111. Zbl 0900.65008
- [13] Lavrentev M. M., Savelev L. Ia, *Linear operators and ill-posed problems*, New York : Consultants Bureau, 1995. Zbl 0849.35143
- [14] Katsevich A.I., Ramm A.G. *A method for finding discontinuities of functions from the tomographic data*, Lect. Appl. Math. 1993. **30** (1993), 115–123.
- [15] Prokhorov I.V., *Reconstruction of the interface between media on the ground of tomography data*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **10** (2002), 1542–1555. Zbl 1073.92026

IVAN PETROVICH YAROVENKO
INSTITUTE OF APPLIED MATHEMATICS FEB RAS,
ST. RADIO, 7,
690041, VLADIVOSTOK, RUSSIA
FAR EASTERN FEDERAL UNIVERSITY,
ST. SUKHANOVA, 8,
690950, VLADIVOSTOK, RUSSIA
E-mail address: yarovenko@iam.dvo.ru