S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 704–715 (2016) УДК 510.6

DOI 10.17377/semi.2016.13.055 MSC 03B45

ИСЧИСЛЕНИЯ НАД МИНИМАЛЬНОЙ ЛОГИКОЙ И НЕВЛОЖИМОСТЬ АЛГЕБР

Л.Л. МАКСИМОВА, В.Ф. ЮН

Abstract. Algebraic semantics of the minimal logic J is constructed by using Johansson algebras (J-algebras). In this paper the description of Heyting algebras in terms of nonembeddability of J-algebras was found. As a corollary the characterization of superintuitionistic, wellcomposed and some other calculi in the class of various calculi over J was found.

The central role is played by a special J-algebra $M_{0,\omega}$, constructed and described in this paper.

Keywords: Minimal logic, Johansson algebra, Heyting algebra, superintuitionistic logic, calculus.

Введение

Статья посвящена исследованию расширений минимальной логики J Йохансона [1]. В [2] мы ввели понятие сильной узнаваемости над минимальной логикой и доказали сильную узнаваемость над J для многих расширений минимальной логики. Логика L сильно узнаваема над J, если существует алгоритм, который по любой конечной системе Rul схем аксиом и правил вывода определяет, аксиоматизирует ли исчисление $J + Rul$ логику L. Доказана сильная узнаваемость над J известных логик Neg, Gl, KC, а также логик LC, NC и всех их расширений.

Кроме того, доказано, что семейства негативных и нетривиальных логик и ряд других семейств сильно разрешимы над J. Это означает, что по любому

Maksimova, L.L., Yun, V.F., Calculi over minimal logic and nonembeddability of algebras.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-6848.2016.1).

Поступила 12 мая 2016 г., опубликована 25 августа 2016 г.

конечному списку Rul схем аксиом и правил вывода можно эффективно проверить, принадлежит ли логика с аксиомами и правилами $J + Rul$ указанному семейству.

Доказательства использовали алгебраическую семантику и основывались на характеризации аксиом выбранных логик в терминах невложимости конечных алгебр. Например, J-алгебра $\mathbf{A}$ является негативной тогда и только тогда, когда двухэлементная булева алгебра не вложима в $\mathbf{A}$. Как следствие, исчисление $J + Rul$, где Rul — любое множество схем аксиом и правил вывода, аксиоматизирует негативную логику, если и только если Rul опровержимо в двухэлементной булевой алгебре.

В этой работе мы найдем характеризацию с помощью невложимости для интуиционистской логики Int и еще трех известных логик. Для всех четырех логик в этой характеризации присутствует бесконечная алгебра, и это не позволяет получить алгоритмы для сильной узнаваемости, поэтому сильная узнаваемость всех указанных логик над J остается пока под вопросом. Их узнаваемость над J доказана в [3]. Также открытым остается вопрос о сильной разрешимости семейств суперинтуиционистских, стройных, предгейтинговых и гибридных логик.

Центральную роль в статье играет алгебра $M_{0,\omega}$, построенная и описанная в параграфе 3. Результаты этого параграфа используются в параграфе 4 для характеризации гейтинговых, предгейтинговых, стройных и гибридных алгебр посредством невложимости. В параграфе 5 найдены критерии, описывающие с помощью алгебры $M_{0,\omega}$ суперинтуиционистские, стройные и некоторые другие исчисления над J. Также представлен ряд примеров применения этих критериев.

1. Предварительные сведения

Обозначаем через J минимальное исчисление. Язык исчисления содержит пропозициональные связки $\&, \vee, \to$ и пропозициональную константу $\bot$; используем сокращения: $\top = \bot \to \bot$, $\neg A = (A \to \bot)$, $(A \leftrightarrow B) = (A \to B)\&(B \to A)$.

Исчисление J задается теми же схемами аксиом, что и интуиционистское позитивное исчисление, и правилом modus ponens: $A, A \to B /\ B$.

Для любого исчисления L_0 и множества Ax схем аксиом обозначаем через $L_0 + Ax$ исчисление, полученное из L_0 добавлением Ax в качестве новых схем аксиом; такое исчисление называем *аксиоматическим расширением* L_0. Если Rul — некоторое множество схем аксиом и правил вывода, обозначаем через $L_0 + Rul$ исчисление, полученное из L_0 добавлением схем аксиом и правил из Rul. При этом предполагается, что все правила вывода инвариантны относительно подстановки, так что множество теорем исчисления замкнуто относительно подстановки. Обозначаем

$Int = J + (\bot \to A)$, $Neg = J + \bot$, $For = J + A$,
$JK = J + (\neg A \vee \neg\neg A)$, $KC = Int + JK$,
$Hyb = J + \bot \vee (\bot \to A)$, $Od = J + \neg\neg(\bot \to A)$,
$JX = J + (\bot \to A) \vee (A \to \bot)$,
$Gl = J + (A \vee \neg A)$, $Cl = Int + Gl$,
$LC = Int + ((A \to B) \vee (B \to A))$, $NC = Neg + ((A \to B) \vee (B \to A))$.

Для указанных исчислений обозначаем через J, Int, Neg, For, JK, KC, Gl, Cl, LC, NC множество теорем, т.е. доказуемых формул соответствующего исчисления.

Множество теорем исчисления $J+Rul$ является J-логикой. Множество формул называется J-*логикой*, если оно содержит J и замкнуто относительно правила modus ponens и подстановки. Множество теорем исчисления L часто обозначаем через L. Для данной логики L часто пишем $\mathrm{L} \vdash A$ вместо $A \in \mathrm{L}$.

Логика называется *нетривиальной*, если не совпадает с For, *суперинтуиционистской*, если содержит Int, и *негативной*, если содержит Neg. Логика называется *гибридной*, если содержит Hyb, *предгейтинговой*, если содержит Od, *стройной*, если содержит JX.

Для исчислений L_1, L_2 пишем $L_1 \le L_2$, если все формулы, доказуемые в L_1, доказуемы в L_2. Исчисления L_1, L_2 называем *эквивалентными* и пишем $L_1 \equiv L_2$, если $L_1 \le L_2$ и $L_2 \le L_1$.

Конечно аксиоматизируемая J-логика L называется *узнаваемой над* J [3], если существует алгоритм, который по любой конечной системе Ax схем аксиом устанавливает, справедлива ли эквивалентность $(J + Ax) \equiv \mathrm{L}$. Конечно аксиоматизируемая J-логика L называется *сильно узнаваемой над* J, если существует алгоритм, который по любой конечной системе Rul схем аксиом и правил вывода устанавливает, справедлива ли эквивалентность $(J + Rul) \equiv \mathrm{L}$.

Семейство логик S называется *разрешимым над* J, если существует алгоритм, который для любого конечного множества Ax схем аксиом определяет, принадлежит ли логика $J+Ax$ семейству S; S *сильно разрешимо над* J, если существует алгоритм, который для любого конечного множества Rul схем аксиом и правил вывода определяет, принадлежит ли множество теорем исчисления $J + Rul$ семейству S.

Через $A_1, \dots, A_n/B$ обозначаем правило, которое для каждой подстановки s выводит $s(B)$ из $\{s(A_1), \dots, s(A_n)\}$.

Следующее утверждение доказано в [2].

Теорема 1.1 ([2]). (1) *Логики* J, Neg, Gl, KC, LC *и все ее расширения,* NC *и все ее расширения сильно узнаваемы над* J.

(2) *Семейства расширений логики* JK*, а также каждой логики из пункта* (1) *сильно разрешимы над* J.

Сильная узнаваемость над J интуиционистской логики Int, а также логик Od, Hyb и JX остается пока под вопросом. Также открытым остается вопрос о сильной разрешимости семейств суперинтуиционистских, стройных, предгейтинговых и гибридных логик.

Узнаваемость над J всех четырех логик доказана в [3]. Заметим, что узнаваемость логик Int, Od и JX сформулирована в [3] в явном виде, а узнаваемость логики Hyb вытекает из доказанной в [3] узнаваемости всех стройных логик с интерполяционным свойством IPR (интерполяционное свойство для Hyb доказано в [4]).

2. Алгебраическая семантика

Алгебраическая семантика минимальной логики строится с помощью алгебр Йохансона (см., например, [5, 6]).

Алгебру $\mathbf{A} =< A; \&, \vee, \to, \bot, \top >$ называем *алгеброй Йохансона (J-алгеброй)*, если она удовлетворяет условиям:

$< A; \&, \vee, \to, \top >$ есть импликативная решетка, то есть решетка относительно $\&, \vee$ с наибольшим элементом $\top$,

$z \leq x \to y \iff z\&x \leq y$,

$\bot$ — произвольный элемент в A.

Ясно, что J-алгебра однозначно определяется своим частичным порядком и положением элемента $\bot$.
J-алгебра называется *гейтинговой*, или *псевдобулевой алгеброй*, если $\bot$ — наименьший элемент множества A, и *негативной алгеброй*, если $\bot$ — наибольший элемент множества A.

Если A — формула, $\mathbf{A}$ — J-алгебра, то говорим, что в $\mathbf{A}$ общезначима формула A, и пишем $\mathbf{A} \models A$, если тождество $A = \top$ выполняется в $\mathbf{A}$. Пишем $\mathbf{A} \models L$ вместо $(\forall A \in L)(\mathbf{A} \models A)$.

Для любой J-логики L класс $V(\mathrm{L}) = \{\mathbf{A} |\ \mathbf{A} \models \mathrm{L}\}$ является многообразием (см., например, [5, 6]).

С каждым правилом вывода A/B можно связать квазитождество [7]

$$\forall x_1 \dots \forall x_n (A = \top \Rightarrow B = \top),$$

где $x_1, \dots, x_n$ — все переменные правила A/B.

Говорим, что правило A/B *верно* (или *общезначимо*) в J-алгебре $\mathbf{A}$, если в $\mathbf{A}$ истинно квазитождество

$$\forall x_1 \dots x_n (A(x_1 \dots x_n) = \top \Rightarrow B(x_1 \dots x_n) = \top);$$

и *опровержимо* в противном случае. Говорим, что множество Rul *общезначимо*, если все правила и аксиомы из Rul общезначимы.

Напомним, что Rul может содержать не только правила, но и схемы аксиом, которые мы отождествляем с правилами, имеющими $\top$ в качестве посылки. Очевидно, что формула A общезначима в $\mathbf{A}$ тогда и только тогда, когда правило $\top/A$ общезначимо в $\mathbf{A}$.

Для данного исчисления $L = J + Rul$ обозначим через $Q(L)$ семейство всех J-алгебр, в которых верны все аксиомы и правила из Rul.

Может случиться, что исчисления L_1и L_2 эквивалентны, но $Q(L_1) \neq Q(L_2)$.

Имеет место следующая теорема о полноте.

Теорема 2.1 ([2]). *Пусть $L = J + Rul$ и A — произвольная формула. Тогда A является теоремой исчисления L тогда и только тогда, когда A общезначима во всех J-алгебрах из $Q(L)$.*

Отсюда сразу вытекает полезное

Следствие 2.2. *Формула A является теоремой исчисления $J + Rul$ тогда и только тогда, когда Rul опровержимо в каждой J-алгебре, опровергающей A.*

3. Алгебра $M_{0,\omega}$ и ее свойства

В этом параграфе мы построим специальную J-алгебру, которая будет использована для характеризации гейтинговых и некоторых других алгебр посредством невложимости.

Пусть $\mathbf{A}$ — J-алгебра, $a \in \mathbf{A}$. *Интервал* $\mathbf{A}_a$ определяется как J-алгебра с носителем $\{x \in \mathbf{A} |\ x \leq a\}$, где $\bot_{\mathbf{A}_a} = a\&\bot_{\mathbf{A}}$.

Лемма 3.1. *Отображение $g(x) = a\&x$ является гомоморфизмом алгебры* $\mathbf{A}$ *на ее интервал* $\mathbf{A}_a$.

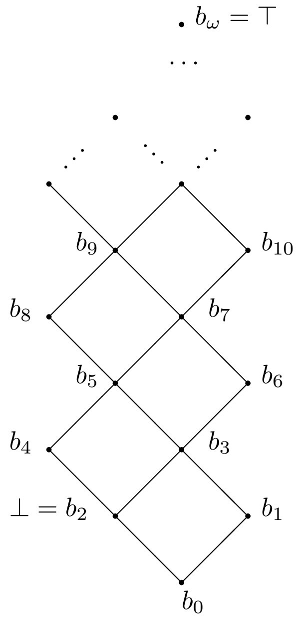
Доказательство. Сразу вытекает из аналогичного утверждения для импликативных решеток [8]. $\square$

Лемма 3.2. *Пусть f — гомоморфизм* J*-алгебры* $\mathbf{A}$ *на* $\mathbf{B}$*, a — наименьший элемент прообраза $f^{-1}(\top)$. Тогда ограничение f_1 гомоморфизма f на интервал* $\mathbf{A}_a = \{x| \ x \leq a\}$ *является изоморфизмом.*

Доказательство. В [8] показано, что гомоморфизм импликативной решетки определяется прообразом элемента $\top$, а интервал импликативной решетки является ее гомоморфным образом относительно гомоморфизма $g(x) = a\&x$. Поэтому утверждение следует из равенства $f^{-1}(\top) = g^{-1}(\top)$. $\square$

Обозначим через $M_{0,\omega}$ алгебру с носителем $\{b_n| \ 0 \leq n \leq \omega\}$, где b_0 — наименьший элемент, $b_\omega = \top$, $\bot = b_2 < b_4$, b_{2n+1} и b_{2n+2} несравнимы, $b_{2n+1} \vee b_{2n+2} = b_{2n+3}$, $b_{2n+6} = b_{2n+5} \to b_{2n+3}$.

Диаграмма алгебры $M_{0,\omega}$ изображена на рисунке.



Нетрудно видеть, что $M_{0,\omega}$ — алгебра Йохансона.

Для $n \geq 0$ обозначим через $M_{0,n}$ интервал алгебры $M_{0,\omega}$ с носителем $\{b_k| \, b_k \leq b_n\}$; при этом в $M_{0,0}$ и $M_{0,1}$ определяем $\bot = b_0$, в остальных алгебрах $\bot = b_2$.

Указанные интервалы составляют, с точностью до изоморфизма, множество всех гомоморфных образов алгебры $M_{0,\omega}$. Покажем это.

Пусть $\mathbf{A} =< A; \&, \vee, \to, \bot, \top >$ — J-алгебра. Множество $\nabla \subseteq A$ называется фильтром на $\mathbf{A}$, если оно удовлетворяет условиям:

a) $\top \in \nabla$;

b) $x, y \in \nabla \Rightarrow (x\&y) \in \nabla$;

c) $x \in \nabla, \ x \leq y \Rightarrow y \in \nabla$.

Предложение 3.3. *Любая алгебра $M_{0,n}$ является гомоморфным образом алгебры $M_{0,\omega}$, и любой гомоморфный образ алгебры $M_{0,\omega}$ изоморфен алгебре $M_{0,n}$ для подходящего n.*

Доказательство. Пусть f — произвольный гомоморфизм алгебры $M_{0,\omega}$ на некоторую $\mathbf{B}$. Он определяется множеством $f^{-1}(\top)$, которое является фильтром на $M_{0,\omega}$ [8]. Любой фильтр на $M_{0,\omega}$ имеет наименьший элемент. Поэтому утверждение следует из лемм 3.1 и 3.2.

$\square$

Обозначим через

$$N_\omega = \{b_k |\ k \geq 2\}.$$

Заметим, что множество N_ω образует подалгебру алгебры $M_{0,\omega}$, изоморфную известной алгебре Нишимуры [9], т.е. свободной однопорожденной гейтинговой алгебре; b_3 является свободным порождающим алгебры N_ω. Связь между алгеброй N_ω и формулами от одной переменной в интуиционистской логике приведена в следующей лемме.

Лемма 3.4 ([9]). *Для любой формулы $A(p)$ от одной переменной:*

$$\mathrm{Int} \vdash A(p) \iff v_0(A) = \top,$$

где $v_0(p) = b_3$.

Для дальнейших доказательств используем формулы Нишимуры. Приведем формулы Нишимуры в обозначениях книги [10]:

$\mathbf{nf}_0 = \bot$,
$\mathbf{nf}_1 = p$,
$\mathbf{nf}_2 = p \to \bot$,
$\mathbf{nf}_{2n+3} = \mathbf{nf}_{2n+1} \vee \mathbf{nf}_{2n+2}$,
$\mathbf{nf}_{2n+4} = \mathbf{nf}_{2n+3} \to \mathbf{nf}_{2n+1}$,
$\mathbf{nf}_\omega = \top$.

Определим

$\mu_0 = \bot \& (\bot \to q)$,
$\mu_1 = (\bot \to q)$,
$\mu_2 = \bot$,
$\mu_3 = \bot \vee (\bot \to q)$,
$\mu_4 = (\bot \to q) \to \bot$,
$\mu_{2n+5} = \mu_{2n+3} \vee \mu_{2n+4}$,
$\mu_{2n+6} = \mu_{2n+5} \to \mu_{2n+3}$,
$\mu_\omega = \top$.

Очевидна

Лемма 3.5. *Для $2 \leq n < \omega$ формула μ_n есть результат подстановки в $\mathbf{nf}_{n-2}$ формулы $\bot \vee (\bot \to q)$ вместо p.*

Определим означивания v_0 и v_1 в $M_{0,\omega}$, полагая
$v_0(p) = b_3$, $v_1(q) = b_1$.

Легко проверяется

Лемма 3.6. *Для любого $k < \omega$:*

(1) $v_1(\mu_k) = b_k$,
(2) $v_0(\mathbf{nf}_k) = v_1(\mu_{k+2}) = b_{k+2}$.

В [4] отмечено, что аксиома $\alpha(p) = (\bot \to p)$ логики Int является J-консервативной, т. е. справедлива

Лемма 3.7 ([4]). *Для любой формулы* $B(p_1, \dots, p_n)$

$$\mathrm{J} \vdash \alpha(p_1) \& \dots \& \alpha(p_n) \to \alpha(B(p_1, \dots, p_n)).$$

Отсюда следует

Лемма 3.8. *Для любой формулы $A(p)$ от одной переменной:*

(1) $\mathrm{J} \vdash (\bot \to p) \to (\bot \to A(p))$,

(2) $\mathrm{Int} \vdash A(p) \iff \mathrm{J} \vdash (\bot \to p) \to A(p)$,

(3) $\mathrm{Int} \vdash A(p) \iff \mathrm{J} \vdash A(\bot \vee (\bot \to q))$.

Доказательство. (1) Сразу из леммы 3.7.

(2) Следует из J-консервативности аксиомы $(\bot \to p)$ (см. [11]).

(3) $\Rightarrow$. Пусть $\mathrm{Int} \vdash A(p)$. Используем (2) и подставим $\bot \vee (\bot \to q)$ вместо p.

$\Leftarrow$. Пусть $\mathrm{Int} \nvdash A(p)$. Тогда по лемме 3.4 $v_0(A(p)) < \top$, $v_0(A(p)) = b_n$ для некоторого n, $2 \leq n < \omega$. Отсюда $v_0(A(p) \leftrightarrow \mathbf{nf}_{n-2}) = \top$, а значит,

$$\mathrm{Int} \vdash (A(p) \leftrightarrow \mathbf{nf}_{n-2}).$$

Из уже доказанной импликации $\Rightarrow$, поскольку μ_n есть результат подстановки $\bot \vee (\bot \to q)$ вместо p в $\mathbf{nf}_{n-2}$, по лемме 3.4 получаем

$$\mathrm{J} \vdash A(\bot \vee (\bot \to q)) \leftrightarrow \mu_n.$$

По лемме 3.6 получаем $v_1(A(\bot \vee (\bot \to q))) = v_1(\mu_n) = b_n < \top$, а значит, $\mathrm{J} \nvdash A(\bot \vee (\bot \to q))$.

□

Лемма 3.9. *Пусть $*$ — любая из связок $\&, \vee, \to$. Тогда для любых i, j существует k, такое что*

$\mathrm{J} \vdash (\mu_i * \mu_j) \leftrightarrow \mu_k$.

Доказательство. Случай 1. $i = 0$ или $j = 0$.

По лемме 3.8 имеем:

$\mathrm{J} \vdash (\bot \to q) \to (\bot \to A(q))$.

Отсюда $\mathrm{J} \vdash \mu_0 \to \mu_j$ для любого j , поэтому

$\mathrm{J} \vdash (\mu_0 \& \mu_j) \leftrightarrow \mu_0$, $\mathrm{J} \vdash (\mu_i \& \mu_0) \leftrightarrow \mu_0$,

$\mathrm{J} \vdash (\mu_0 \vee \mu_j) \leftrightarrow \mu_j$, $\mathrm{J} \vdash (\mu_i \vee \mu_0) \leftrightarrow \mu_i$,

$\mathrm{J} \vdash (\mu_0 \to \mu_j) \leftrightarrow \mu_\omega$.

Кроме того,

$\mathrm{J} \vdash (\mu_1 \to \mu_0) \leftrightarrow \mu_4$ и

$\mathrm{J} \vdash (\bot \to (\bot \to q)) \leftrightarrow (\bot \to q)$. Отсюда выводим

$\mathrm{J} \vdash (\mu_i \to \mu_0) \leftrightarrow \mu_1$ для $i = 2, 4$,

$\mathrm{J} \vdash (\mu_i \to \mu_0) \leftrightarrow \mu_0$ для $i = 3$ и $i \geq 5$.

Случай 2. $i, j > 0$, $i = 1$ или $j = 1$.

Из определения μ_i получаем:

$\mathrm{J} \vdash (\mu_2 \& \mu_1) \leftrightarrow \mu_0$, $\mathrm{J} \vdash (\mu_4 \& \mu_1) \leftrightarrow \mu_0$,

$\mathrm{J} \vdash (\mu_2 \vee \mu_1) \leftrightarrow \mu_3$, $\mathrm{J} \vdash (\mu_4 \vee \mu_1) \leftrightarrow \mu_5$,

$\mathrm{J} \vdash (\mu_1 \to \mu_2) \leftrightarrow \mu_4$, $\mathrm{J} \vdash (\mu_1 \to \mu_4) \leftrightarrow \mu_4$.

Далее,

$\mathrm{J} \vdash \mu_1 \to \mu_j$ для $j = 3$ и $j \geq 5$, поэтому для этих j:

$\mathrm{J} \vdash (\mu_1 \& \mu_j) \leftrightarrow \mu_1$,

$\mathrm{J} \vdash (\mu_1 \vee \mu_j) \leftrightarrow \mu_j$,
$\mathrm{J} \vdash (\mu_1 \to \mu_j) \leftrightarrow \mu_\omega$.
Кроме того,
$\mathrm{J} \vdash (\mu_2 \to \mu_1) \leftrightarrow \mu_1$.
Из $\mathrm{J} \vdash (\mu_2 \to \mu_j)$ при $j \geq 2$ получаем для этих j
$\mathrm{J} \vdash (\mu_j \to \mu_1) \leftrightarrow \mu_1$.

Случай 3. $i, j \geq 2$.
По лемме 3.6 существует k, такое, что
$v_0((\mathbf{nf}_{i-2} * \mathbf{nf}_{j-2}) \leftrightarrow \mathbf{nf}_k) = \top$. По лемме 3.4 получаем
$\mathrm{Int} \vdash ((\mathbf{nf}_{i-2} * \mathbf{nf}_{j-2}) \leftrightarrow \mathbf{nf}_k)$.
Отсюда по леммам 3.8 и 3.5 получаем
$\mathrm{J} \vdash ((\mu_i * \mu_j) \leftrightarrow \mu_{k+2})$.

□

Теорема 3.10. *Для любых i, j, k:*

(1) $\mathrm{J} \vdash (\mu_i \leftrightarrow \mu_j) \iff b_i = b_j$
(2) $\mathrm{J} \vdash (\mu_i * \mu_j) \leftrightarrow \mu_k \iff b_i * b_j = b_k$, *где $*$ — любая из связок $\&, \vee, \to$.*

Доказательство. $\Rightarrow$. Необходимость в обоих пунктах следует из теоремы о корректности логики J и леммы 3.6. Докажем достаточность.

1 $\Leftarrow$. Из $b_i = b_j$ следует $i = j$. Утверждение вытекает из $\mathrm{J} \vdash A \leftrightarrow A$.

2 $\Leftarrow$. Пусть $\mathrm{J} \nvdash (\mu_i * \mu_j) \leftrightarrow \mu_k$. По лемме 3.9 существует такое n, что $\mathrm{J} \vdash (\mu_i * \mu_j) \leftrightarrow \mu_n$. Отсюда и из (1) получаем $b_i * b_j = b_n \neq b_k$.

□

Лемма 3.11. *Пусть $\mathbf{A}$ — J-алгебра, $a \in \mathbf{A}$, $v(q) = \bot \to a$ — означивание в $\mathbf{A}$. Тогда отображение $f(b_n) = v(\mu_n)$, $0 \leq n \leq \omega$, является гомоморфизмом алгебры $M_{0,\omega}$ на подалгебру алгебры $\mathbf{A}$, порожденную элементом $(\bot \to a)$.*

Доказательство. Пусть $a \in \mathbf{A}$, $v(q) = c = \bot \to a$. Для $0 \leq n \leq \omega$ определим $f(b_n) = v(\mu_n)$.

Покажем, что f является гомоморфизмом алгебры $M_{0,\omega}$ в алгебру $\mathbf{A}$.

Имеем $f(\bot) = v(\mu_2) = \bot$. Далее, докажем $f(b_i * b_j) = f(b_i) * f(b_j)$ для любой операции $* \in \{\&, \vee, \to\}$.

Пусть $b_i * b_j = b_k$. Тогда $\mathrm{J} \vdash (\mu_i * \mu_j) \leftrightarrow \mu_k$ по теореме 3.10. Отсюда

$$f(b_i * b_j) = v(\mu_k) = v(\mu_i * \mu_j) = v(\mu_i) * v(\mu_j) = f(b_i) * f(b_j).$$

Таким образом, f сохраняет все операции.

Заметим, что $f(b_1) = v(\mu_1) = \bot \to v(q) = \bot \to (\bot \to a) = \bot \to a$, поэтому элемент $(\bot \to a)$ порождает алгебру $f(M_{0,\omega})$.

□

Из леммы 3.11 легко следует

Теорема 3.12. *Пусть $A(p)$ — формула от одной переменной. Тогда*

$$J \vdash A(\bot \to q) \iff M_{0,\omega} \models A(\bot \to q).$$

Доказательство. Если $J \nvdash A(\bot \to q)$, то $A(\bot \to q)$ опровержима в некоторой J-алгебре, порожденной элементом $(\bot \to a)$. По лемме 3.11 формула опровержима в $M_{0,\omega}$. Обратное очевидно по теореме о корректности. □

4. Гейтинговы алгебры и невложимость

В этом параграфе мы найдем характеризацию гейтинговых и некоторых других алгебр посредством невложимости.

Алгебра Йохансона $\mathbf{A}$ называется *гибридной*, если $\mathbf{A} \models \bot \vee (\bot \to p)$, *предгейтинговой*, если $\mathbf{A} \models \neg\neg(\bot \to p)$, и *стройной*, если $\mathbf{A} \models (\bot \to p) \vee (p \to \bot)$. Имеет место

Теорема 4.1. *Для любой* J*-алгебры* $\mathbf{A}$*:*

(1) $\mathbf{A}$ *— гейтингова алгебра, если и только если ни одна из алгебр* $M_{0,2}$ *–* $M_{0,\omega}$ *не вложима в* $\mathbf{A}$*.*
(2) $\mathbf{A}$ *— предгейтингова алгебра, если и только если ни одна из алгебр* $M_{0,4}, M_{0,5}$*,* $M_{0,7}$ *–* $M_{0,\omega}$ *не вложима в* $\mathbf{A}$*.*
(3) $\mathbf{A}$ *— стройная алгебра, если и только если ни одна из алгебр* $M_{0,6}$ *–* $M_{0,\omega}$ *не вложима в* $\mathbf{A}$*.*
(4) $\mathbf{A}$ *— гибридная алгебра, если и только если ни одна из алгебр* $M_{0,4}$ *–* $M_{0,\omega}$ *не вложима в* $\mathbf{A}$*.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$. Очевидно, $\bot$ не является наименьшим элементом во всех указанных алгебрах.

$\Leftarrow$. Пусть $\mathbf{A}$ не является гейтинговой алгеброй. Тогда $\bot \to a < \top$ для некоторого $a \in \mathbf{A}$. Определим означивание v в $\mathbf{A}$, полагая

$v(q) = c = \bot \to a$.

Для $0 \leq n \leq \omega$ определим

$f(b_n) = v(\mu_n)$.

По лемме 3.11 f является гомоморфизмом алгебры $M_{0,\omega}$ в алгебру $\mathbf{A}$.

Итак, множество $C = \{v(\mu_n) | \ 0 \leq n \leq \omega\}$ является гомоморфным образом алгебры $M_{0,\omega}$ и образует подалгебру алгебры $\mathbf{A}$.

Если все значения $f(b_i)$ различны, то f — изоморфное вложение алгебры $M_{0,\omega}$ в $\mathbf{A}$.

В противном случае множество $f^{-1}(\top)$ содержит элемент, отличный от $\top$. Это множество имеет наименьший элемент $a = b_n$ для некоторого $n < \omega$. По лемме 3.2 ограничение f_n гомоморфизма f на интервал $M_{0,n}$ является вложением алгебры $M_{0,n}$ в $\mathbf{A}$. Из условия $v(\bot \to q) \neq \top$ получаем $f(b_0) < \bot$, поэтому $n > 1$.

(2) Пусть $\mathbf{A} \not\models \neg\neg(\bot \to p)$. Тогда $\neg\neg(\bot \to a) < \top$ для некоторого $a \in \mathbf{A}$ и по доказательству пункта (1) одна из алгебр $M_{0,2}$–$M_{0,\omega}$ вложима в $\mathbf{A}$.

При этом $\neg\neg(\bot \to a) = f(b_6) < \top$, поэтому $n \in \{4, 5, 7, \dots, \omega\}$.

Обратное очевидно.

(3) Пусть $\mathbf{A} \not\models (\bot \to p) \vee (p \to \bot)$. Тогда $(\bot \to a) \vee (a \to \bot) < \top$ для некоторого $a \in \mathbf{A}$. Определим означивание v в $\mathbf{A}$, полагая

$v(q) = c = \bot \to a$.

По доказанному в пункте (1) отображение $f(b_k) = v(\mu_k)$ является гомоморфизмом из $M_{0,\omega}$ в алгебру $\mathbf{A}$, а его ограничение f_n на интервал $M_{0,n}$, где b_n — наименьший элемент в $f^{-1}(\top)$, есть изоморфизм.

Заметим, что

$\mathrm{J} \vdash (\mu_5 \to ((\bot \to q) \vee (q \to \bot)))$.

Отсюда $f(b_5) = v(\mu_5) \leq v((\bot \to q) \vee (q \to \bot)) < \top$, поэтому $b_n \not\leq b_5$, т.е. $n \geq 6$. Итак, одна из алгебр $M_{0,6}, M_{0,7}, \dots, M_{0,\omega}$, вложима в $\mathbf{A}$.

Обратно, если одна из указанных алгебр вложима в $\mathbf{A}$, то $\mathbf{A} \not\models (\bot \to p) \vee (p \to \bot)$, так как формула опровергается во всех этих алгебрах при $v(p) = b_1$.

(4) Доказывается аналогично пункту (2).

□

Добавим, что список $M_{0,2} - M_{0,\omega}$ нельзя сократить. Имеет место

Лемма 4.2. *Ни одна из алгебр списка $M_{0,2} - M_{0,\omega}$ не вложима в другую.*

Доказательство. Пусть $2 \le m, n \le \omega$ и φ — изоморфизм алгебры $M_{0,m}$ в $M_{0,n}$. Ясно, что $m \le n$ и $\varphi(\bot) = \bot$. Далее, $\varphi(b_1)$ несравним с $\bot$, поэтому $\varphi(b_1) = b_1$. Каждая из алгебр порождается элементом b_1, отсюда получаем $\varphi(b_i) = b_i$ для всех $i \le m$. Поскольку $b_m = \top$ в алгебре $M_{0,m}$, получаем $b_m = \top$ в $M_{0,n}$, т.е. $m = n$.

□

Очевидно, двухэлементная булева алгебра $M_{0,1}$ вложима в $M_{0,n}$ при $n \ge 3$.

5. Характеризация суперинтуиционистских логик

Из теоремы 4.1 вытекает

Теорема 5.1. *Пусть $L = J + Rul$, где Rul — множество схем аксиом и правил вывода,*

(1) *L аксиоматизирует суперинтуиционистскую логику, если и только если Rul опровержимо во всех алгебрах $M_{0,2} - M_{0,\omega}$.*

(2) *L аксиоматизирует предгейтинговую логику, если и только если Rul опровержимо во всех алгебрах $M_{0,4}, M_{0,5}$, $M_{0,7} - M_{0,\omega}$.*

(3) *L аксиоматизирует стройную логику, если и только если Rul опровержимо во всех алгебрах $M_{0,6} - M_{0,\omega}$.*

(4) *L аксиоматизирует гибридную логику, если и только если Rul опровержимо во всех алгебрах $M_{0,4} - M_{0,\omega}$.*

Доказательство. Используем теорему 4.1.

(1) Если L содержит Int, то Rul опровержимо во всех алгебрах $M_{0,2} - M_{0,\omega}$. Обратно, пусть $J + Rul \not\geq Int$. По следствию 2.2 существует J-алгебра $\mathbf{A}$, удовлетворяющая Rul и опровергающая $(\bot \to p)$. По теореме 4.1 одна из алгебр $M_{0,2} - M_{0,\omega}$ вложима в $\mathbf{A}$, а значит, удовлетворяет Rul.

(2)-(4) доказываются аналогично. □

Приведем ряд примеров. Очевидны соотношения:

$$JX \le Hyb = Int \cap Neg \le Int\ , Od \le Int.$$

По теореме 5.1 и лемме 4.2 все неравенства строгие, а пары JX и Od, Hyb и Od несравнимы.

Пример 1.

Правило $r_1 : \neg\neg p/\ p$ верно в $M_{0,1}$, $M_{0,4}$ и в $M_{0,5}$, но опровержимо в $M_{0,n}$, $6 \le n \le \omega$ при $p = b_1$ и в $M_{0,3}$; также в $M_{0,2}$ при $p = b_0$.

Таким образом, $J + (r_1) \ge JX$, $J + (r_1) \not\geq Int$, $J + (r_1) \not\geq Od$, $J + (r_1) \not\geq Hyb$.

Очевидно, $Od + (r_1)$ содержит Int, Hyb и JX.

Пример 2.

Рассмотрим правило $(r_2) : (p \to q \vee r)/\ (p \to q) \vee (p \to r)$. Это правило верно в $M_{0,4}$ и в $M_{0,5}$, но опровержимо в $M_{o,n}$, $6 \leq n \leq \omega$ при $p = b_5, q = b_1, r = b_4$. Таким образом, $J + (r_2) \geq JX$, $J + (r_2) \not\geq Od$, $J + (r_2) \not\geq Hyb$.

Пример 3.

$Hyb + \bot/\ p \not\geq Int$.

В самом деле, формула $(\bot \vee (\bot \to p))$ и правило $\bot/\ p$ верны в $M_{0,3}$.

Пример 4.

Правило $(r_4) : \neg p/\ \bot$.

Это правило верно в $M_{0,2}$ и опровержимо в $M_{0,n}$ при $n = 1$ и $3 \leq n \leq \omega$, $p = b_0$.

Поэтому $J + (r_4) \geq Hyb$, $J + (r_4) \geq JX$, $J + (r_4) \geq Od$, $Od + (r_4) \not\geq Int$.

Пример 5.

Правило $(r_5) : \neg(\bot \to p)/\ \bot$ опровергается лишь в $M_{0,4}$ при $p = b_0$, и верно во всех остальных алгебрах, так как посылка отличается от $\top$ при $n \neq 2, 4$, а в $M_{0,2}$ имеем $\bot = \top$.

Поэтому $J + (r_5) \not\geq Hyb$, $J + (r_5) \not\geq JX$, $J + (r_5) \not\geq Od$, $Od + (r_5) \not\geq Int$.

Добавим еще одно следствие теоремы 4.1. Для любого класса K алгебр Йохансона через $L(K)$ обозначается логика класса K, т.е. множество формул, общезначимых во всех алгебрах из K. Заметим, что из теоремы 4.1 сразу вытекает

Теорема 5.2. *Пусть K — универсально аксиоматизируемый класс алгебр Йохансона.*

(1) *$L(K)$ — суперинтуиционистская логика, если и только если ни одна из алгебр $M_{0,2} - M_{0,\omega}$ не входит в K.*
(2) *$L(K)$ содержит логику* Od*, если и только если ни одна из алгебр $M_{0,4}, M_{0,5}$, $M_{0,7} - M_{0,\omega}$ не входит в K.*
(3) *$L(K)$ — стройная логика, если и только если ни одна из алгебр $M_{0,6} - M_{0,\omega}$ не входит в K.*
(4) *$L(K)$ — гибридная логика, если и только если ни одна из алгебр $M_{0,4} - M_{0,\omega}$ не входит в K.*

References

[1] I.Johansson, *Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer F3ormalismus*, Compositio Mathematica, **4** (1937), 119–136.

[2] L.L.Maksimova, V.F.Yun, *Strong decidability and strong recognizability*, Algebra and Logic (to appear).

[3] L.L.Maksimova, V.F.Yun, *Recognizable logics*, Algebra and Logic, **54**:2 (2015), 252–274. Zbl 06498560

[4] L.L.Maksimova, *Implicit Definability and Positive Logics*, Algebra and Logic, **42**:1 (2003) 37–53. Zbl 1034.03008

[5] W.Rautenberg, *Klassische und nichtklassiche Aussagenlogik*, Wiesbaden: Vieweg Verlag, 1979. Zbl 0424.03007

[6] S.Odintsov, *Constructive negations and paraconsistency*, Series: Trends in Logic, **26**, Springer, Dordrecht, 2008. Zbl 1161.03014

[7] A.I. Mal'tsev,*Algebraic systems*, M.: Nauka, 1970. (In Russian). Zbl 0223.08001

[8] H. Rasiowa, R. Sikorski, *The Mathematics of Metamathematics*, Warsz., 1963 (In Russian: Moscow, Nauka, 1972). Zbl 0122.24311

[9] I.Nishimura, *On formulas of one variable in intuitionistic propositional calculus*, Journal of Symbolic Logic, **25** (1960), 327–331. Zbl 0108.00302

[10] A.Chagrov, M.Zakharyaschev, *Modal Logic*, Clarendon Press, Oxford, 1997. Zbl 0871.03007

[11] D.M.Gabbay, L.Maksimova, *Interpolation and Definability: Modal and Intuitionistic Logics*, Clarendon Press, Oxford, 2005. Zbl 1091.03001

Larisa L'vovna Maksimova
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
Novosibirsk State University,
Pirogova Str., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: lmaksi@math.nsc.ru

Veta Fedorovna Yun
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
Novosibirsk State University,
Pirogova Str., 2,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: yun@math.nsc.ru