S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 740–743 (2016) УДК 514.772
DOI 10.17377/semi.2016.13.059 MSC 53C

РЕШЕНИЯ ТРИВИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МОНЖА —АМПЕРА С ИЗОЛИРОВАННЫМИ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

И.Х. САБИТОВ

Abstract. We study the existence of global solutions of the trivial Monge-Ampèr equation over the plane with deleted isolated points.

Keywords: zero curvature surfaces, singular points, global existence and smoothness.

1. Введение и формулировка результата. Вопрос о поведении решения дифференциального уравнения в окрестности особой точки является одним из интересных вопросов этого раздела математики. Особенно подробно он изучен для эллиптических уравнений, для которых установлено много признаков существования/несуществования (т.е. устранимости) таких особых точек. В ряде работ автора [1], [2] (с. 94-118), [3], [4] ставилась задача исследования различных свойств простейшего уравнения Монжа —Ампера параболического типа

$$z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 0, \tag{1}$$

среди которых был вопрос о решениях, определенных над всей плоскостью, но имеющих некоторые особенности в изолированных точках или линиях. Примером решения с одной изолированной особой точкой является уравнение конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Этот пример естественным образом приводит к вопросу — а есть ли решения со многими особыми точками, в частности, существуют ли решения с заранее заданным множеством особых точек? Как ответ на этот вопрос мы доказываем следующую теорему

Теорема 1. *Пусть на плоскости (x, y) задано произвольное конечное множество точек M. Тогда уравнение* (1) *имеет бесконечно много решений $z =$*

Sabitov, I.Kh., Solutions of the trivial Monge-Ampèr equation with isolated singular points.

Поступила 7 сентября 2016 г., опубликована 26 сентября 2016 г.

$z(x,y)$, определенных на всей плоскости и C^∞-гладких во всех точках, кроме точек заданного множества M, в которых они непрерывны, но недифференцируемы. Более того, можно утверждать, что существуют решения, являющиеся кусочно аналитическими с нарушением аналитичности только на конечном числе прямолинейных лучей.

2. Первые простые примеры. Простой пример с конечным или даже с бесконечным множеством особых точек строится так. Возьмем на плоскости некоторую прямую L и примем ее за ось Ox, обозначив через O произвольную точку прямой. Выпустим из точки O луч OA под тупым углом к отрицательной полуоси x-ов и построим над этим углом конус с вершиной в O, однозначно проектируемый на плоскость угла и с C^∞-гладким примыканием к полуплоскостям вдоль крайних образующих конуса. Затем возьмем на положительной полуоси Ox произвольную точку O_1 и выпустив из нее луч O_1A_1, сонаправленный с лучом OA, и второй луч O_1B_1 между лучом O_1A_1 и положительным направлением оси Ox, тоже построим над углом $A_1O_1B_1$ коническую поверхность с нужными требованиями гладкости. Повторим аналогичные построения любое количество раз, беря на положительной полуоси возрастающую последовательность новых вершин $O_2, O_3, ...$ и новых лучей O_iA_i и O_iB_i с условием сонаправленности лучей O_iB_i и $O_{i+1}A_{i+1}$ (этот способ найден автором в 2009 г. для доклада, тезисы которого опубликованы в [1]).

3. Первый нетривиальный пример. Вопрос теперь стоит о решениях с особенностями на заданном множестве точек. Здесь первое продвижение было получено Ю.А.Аминовым, который в письме автору в январе 2014 г. предложил способ построения требуемого решения, когда заданное особое множество состоит из вершин выпуклого многоугольника. Пусть $M_1, M_2, ..., M_n$ — циклически пронумерованные вершины выпуклого многоугольника. Выпустим из каждой вершины M_i во внешнюю область многоугольника два луча M_iA_i и M_iB_i, ортогональные соответственно к сторонам $M_{i-1}M_i$ и M_iM_{i+1}, и построим над всеми углами $A_iM_iB_i$ конические поверхности с однозначной проекцией на плоскость и C^∞-гладким примыканием к ней, уравнения которых вместе с уравнением $z = 0$ на плоских кусках и даст требуемое решение уравнения (1).

4. Доказательство общей теоремы. Вопрос о построении требуемого решения при произвольной структуре заданного множества M особых точек в случае конечного их числа решается следующим образом. Пусть $M_1, ..., M_n$ — заданные точки из M, пронумерованные в произвольном порядке. Проведем через все пары точек прямые, число которых заведомо будет не больше чем $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. Затем возьмем произвольную точку M_0, не лежащую ни на одной из этих прямых, и проведем все лучи M_0M_i. На каждом таком луче лежит только одна точка из M — сама точка M_i. Построим окружность S с центром в M_0 и с достаточно большим радиусом, чтобы она охватывала все множество M. Продолжая лучи M_0M_i до пересечения с S в соответствующих точках $N_i \in S$, мы получим семейство не пересекающихся между собой лучей M_iN_i, и остается построить конусы с вершинами в точках M_i с достаточно малыми растворами, чтобы они не пересекались с другими конусами. Направляющие линии этих конусов можно взять в виде аналитических кривых, C^∞-гладко касающихся плоскости $(x.y)$, и тогда получатся утверждаемые в теореме кусочно-аналитические поверхности

5. Дальнейшие обобщения. Теперь мы можем объединить описанные в п.п. 2 и 4 два способа построения интересующих нас решений уравнения (1) и легко получить утверждение о существование решений с изолированными особыми точками, расположенными в счетном количестве на каждом из заранее заданного конечного множества непересекающихся лучей. Можно, конечно, усложнить и систему заданных лучей, взяв их тоже в счетном количестве. Нерешенный вопрос — можно ли построить решение с особенностями над *любым* дискретным множеством без предельных точек в конечной части плоскости? Может быть, удастся найти какие-либо простые достаточные для этого условия, например, предположить некоторую равномерность распределения особых точек, скажем, потребовав, чтобы все расстояния между ними были больше некоторого числа. Такие поверхности могут быть интересными с точки зрения их жесткости и изгибаемости.

Другое направление обобщений относится к существованию решений с особенностями на линиях. Примерами таких решений являются уравнения многогранников с однозначной проекцией на плоскость, в том числе многогранники с бесконечным числом вершин. Можно указать примеры также с более сложными особыми линиями.

Замечание. Мы можем использовать примененный метод для нумерации точек на плоскости. Именно, перенумеруем точки $N_i \in S$ в циклическом порядке, и перенеся эти номера на соответствующие точки из M, получаем некоторый разумно описываемый алгоритм нумерации точек на плоскости. Это можно сделать для конечного множества точек в пространстве любой размерности d, проектируя сначала взаимно-однозначным образом точки этого множества на сферу, а ее переводя стереографической проекцией на плоскость размерности $d-1$, далее по индукции. Такое проектирование можно делать и сразу на некоторую плоскость размерности $d-1$.

6. Остается отметить, что доказанная теорема анонсировалась автором в сборниках тезисов различных конференций [5], [6], и о ней автор докладывал на нескольких семинарах в МГУ, среди которых можно упомянуть доклад 16.02.2015 г. на семинаре кафедры дифференциальной геометрии и приложений. Независимо от нас такое же решение получено Х.Гальвесом [7].

References

[1] Sabitov I.Kh., *On solutions in whole of the trivial Monge-Ampèr equation*, International conference "Modern problems in Mathematics, Mechanics and their applications"dedicated to 70th anniversary of MSU rector academician V.A. Sadovnichy, Moscow, M.: «University book», (2009), 200.

[2] Sabitov I.Kh., *Isometric Immersions and Embeddings of Locally Euclidean Metrics*, Cambridge Scientific Publishers, Reviews in Mathematics and Mathematical Physics, **13**:1 (2009), 276.

[3] Sabitov I.Kh., *Manifolds and surfaces with locally Euclidean metric*, in the book "Geometry in whole, topology and their, applications, Kharkiv: Acta (2010), 124–140.

[4] Sabitov I.Kh., *Isolated singular points of solutions of the trivial Monge-Ampèr equation*, Theory of operators, complex analysis and mathematical modeling. Abstracts of the International scientific conference (village Divnomorsk), September 7-13, (2014), 61–62.

[5] Sabitov I.Kh., *Global solutions of the trivial Monge-Ampèr equation with isolated singularities*, Abstracts of the International conference "Geometry in Odessa-2015 May 25–31, (2015), 86.

[6] Sabitov I.Kh., *Manifolds and surfaces with locally Euclidean metrics*, Abstracts of the International conference "Days of Geometry in Novosibirsk-2015 August 26–29 (2015), 45–46.

[7] José Galvez, *Existence*, A personal communication, (2016).

Idzhad Kh. Sabitov
Lomonosov Moscow State University,
Leninskie Gory
119991, Moscow, Russia
E-mail address: isabitov@mail.ru