S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 744–753 (2016) УДК 519.116
DOI 10.17377/semi.2016.13.060 MSC 05A17

О РЕШЕТКЕ РАЗБИЕНИЙ ВСЕХ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

В.А. БАРАНСКИЙ, Т.А. КОРОЛЕВА, Т.А. СЕНЬЧОНОК

Abstract. The partition lattice of all integers introduced. The aim is to give a detailed construction of this lattice across all partition lattices of concrete integers and to give algorithms for finding the intersection and the union of elements in this lattice.

Keywords: integer partition, lattice, Ferrer's diagram.

Разбиением [1] будем называть невозрастающую последовательность целых неотрицательных чисел

$$u = (u_1, u_2, \dots),$$

в которой содержится лишь конечное число ненулевых компонент, $n = \sum_{i=1}^{\infty} u_i$, где n — натуральное число, и $u_1 \geq u_2 \geq \dots$. Число n будем называть *весом* разбиения u и будем обозначать его через $\mathrm{sum}(u)$. *Длиной* разбиения u назовём число l ненулевых компонент в u, обозначим его через $l(u)$. Для удобства разбиение u будем записывать в одном из следующих видов:

$$u = (u_1, u_2, \dots) = (u_1, \dots, u_l) = (u_1, \dots, u_l, u_{l+1}) = (u_1, \dots, u_l, u_{l+1}, u_{l+2}) = \dots.$$

Как и в работе [2], разбиения будем изображать с помощью диаграмм Ферре. В дальнейшем мы будем использовать обозначения, введённые в [2].

Через NPL обозначим множество всех разбиений всех натуральных чисел. Ясно, что множество NPL равно дизъюнктному объединению множеств $NPL(n)$, где $n = 1, 2, \dots$. Здесь через $NPL(n)$ обозначено множество всех разбиений веса n.

Определим *элементарные преобразования* разбиений из NPL. В их число включим *перекидывания блоков*, введённые в [2], а так же добавим новые преобразования, которые будем называть *удалениями блоков*.

Baransky, V.A., Koroleva, T.A., Senchonok, T.A., On the partition lattice of all integers.

Поступила 20 июля 2016 г., опубликована 28 сентября 2016 г.

Пусть $u = (u_1, u_2, \dots) \in NPL$ и $u_i - 1 \geq u_{i+1}$. Преобразование, заменяющее u на $u' = (u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i - 1, u_{i+1}, \dots)$, будем называть удалением блока и будем писать $u \to u'$. Отметим, что здесь $\mathrm{sum}(u') = \mathrm{sum}(u) - 1$. С другой стороны, если $u \Rightarrow v$ — падение или сдвиг блока (см. [2]), то $\mathrm{sum}(v) = \mathrm{sum}(u)$.

Если $u = (u_1, u_2, \dots, u_{l-1}, 1, 0, 0, \dots)$ и $u' = (u_1, u_2, \dots, u_{l-1}, 0, 0, \dots)$, то такое удаление блока будем называть *отбрасыванием блока* и будем писать $u \Rightarrow u'$ (как и в случае падений и сдвигов блоков).

На множестве NPL определим отношение $\geq$, полагая $u \geq v$, если v можно получить из u с помощью последовательного применения конечного числа (возможно нулевого) элементарных преобразований всех введённых типов. Очевидно, $\geq$ является отношением частичного порядка и для любого натурального числа n это отношение совпадает на множестве $NPL(n)$ с отношением $\geq$, введённым в [2].

В [3] было анонсировано без доказательства, что относительно $\geq$ множество NPL образует решётку и отношение $\geq$ совпадает с известным отношением доминирования (см. [4]). Одна из главных целей данной работы — привести полное доказательство этих фактов. Кроме того, мы изучим строение решётки $(NPL, \geq)$ через решётки $(NPL(n), \geq)$, где $n = 1, 2, \dots$, а также приведём алгоритмы нахождения пересечения и объединения элементов в решётке $(NPL, \geq)$.

Перейдём теперь к изучению частичного порядка $\geq$ на NPL.

Лемма 1. *Разбиение u покрывает разбиение v в $(NPL, \geq)$ тогда и только тогда, когда $u \Rightarrow v$.*

Доказательство. Очевидно, если $u \Rightarrow v$ — отбрасывание блока, то u покрывает v в $(NPL, \geq)$.

С другой стороны, пусть $u = (u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1}, \dots, u_l) \to u' = (u_1, u_2, \dots, u_i - 1, u_{i+1}, \dots, u_l)$ — удаление блока, где $l = l(u)$, $i \leq l$ и при $i = l$ выполняется $u_l > 1$. Тогда u не покрывает u', так как

$$\begin{aligned} u = (u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_l) &\to (u_1, u_2, \dots, u_i - 1, u_{i+1}, \dots, u_l, 1, 0) \\ &\Rightarrow (u_1, u_2, \dots, u_i - 1, u_{i+1}, \dots, u_l, 0, 0) = u'. \end{aligned}$$

Теперь заключение Леммы вытекает из [2, Лемма 1] в силу того, что отбрасывание блока уменьшает вес разбиения, а падение и сдвиг блока сохраняют вес. □

Отношения $\trianglerighteq$, определённые на всех $NPL(n)$ [2], продолжим на NPL, полагая $u = (u_1, u_2, \dots) \trianglerighteq v = (v_1, v_2, \dots)$, если

$$u_1 + u_2 + \dots + u_i \geq v_1 + v_2 + \dots + v_i$$

для всех $i = 1, 2, \dots$. Отношение $\trianglerighteq$ является очевидно отношением частичного порядка на NPL и его ограничение на каждом $NPL(n)$ совпадает с $\geq$ [2]. Это отношение и называют *отношением доминирования*.

Лемма 2. *Если для $u, v \in NPL$ выполняется условие $u \triangleright v$, то существует $z \in NPL$, для которого $u > z \trianglerighteq v$.*

Доказательство. Пусть $u = (u_1, u_2, \dots, u_t)$ и $v = (v_1, v_2, \dots, v_t)$, где t — максимальная из длин разбиений u и v. В силу условия $u \trianglerighteq v$ выполняется

$$\begin{gathered} u_1 \geq v_1, \\ u_1 + u_2 \geq v_1 + v_2, \\ \dots \\ u_1 + u_2 + \dots + u_i \geq v_1 + v_2 + \dots + v_i, \\ \dots \\ n = u_1 + u_2 + \dots + u_t \geq v_1 + v_2 + \dots + v_t = n', \end{gathered}$$

где $n = \mathrm{sum}(u)$ и $n' = \mathrm{sum}(v)$.

Если $n = n'$, то $u, v \in NPL(n)$ и поэтому $u > v$. Пусть $n \neq n'$. Тогда $n > n'$. Обозначим через l длину разбиения u. Тогда имеем

$$\begin{gathered} u_1 \geq v_1, \\ u_1 + u_2 \geq v_1 + v_2, \\ \dots \\ u_1 + u_2 + \dots + u_{l-1} \geq v_1 + v_2 + \dots + v_{l-1}, \\ n = u_1 + u_2 + \dots + u_l > v_1 + v_2 + \dots + v_l, \\ n = u_1 + u_2 + \dots + u_{l+1} > v_1 + v_2 + \dots + v_{l+1} \\ \dots \end{gathered}$$

Положим $z = (u_1, u_2, \dots, u_{l-1}, u_l - 1)$. Тогда $u > z$, так как z получено из u удалением блока, и $z \trianglerighteq v$, так при замене в выше указанных неравенствах числа u_l на число $u_l - 1$ все неравенства сохраняются, но могут стать нестрогими. $\square$

Из Леммы 2 вытекает, что из условия $u \trianglerighteq v$ в NPL следует условие $u \geq v$. Верно и обратное утверждение, так как все элементарные преобразования перемещают блоки вправо или удаляют их. Поэтому справедлива

Лемма 3. *Отношения $\geq$ и $\trianglerighteq$ совпадают на NPL.* $\square$

Рассмотрим теперь два произвольных разбиения $u = (u_1, u_2, \dots) \in NPL$, $v = (v_1, v_2, \dots) \in NPL$, и применим к ним Алгоритм, указанный в [2]. Мы получим разбиение $w = w(u, v) = (w_1, w_2, \dots) \in NPL$. Нетрудно заметить, что справедлив аналог Леммы 3 из [2], причём Алгоритм завершит работу на первом же этапе j, на котором выполняется $w_j = 0$. Условие завершения работы алгоритма состоит в выполнении хотя бы одного из условий:

(1) $\Delta_{j-1}(u) = 0$ и $u_j = 0$,
(2) $\Delta_{j-1}(v) = 0$ и $v_j = 0$.

Положим $j - 1 = s$. Тогда $w = (w_1, \dots, w_s, 0, 0, \dots)$.

Пример. Пусть $u = (7, 4, 4, 2, 2, 1)$ и $v = (8, 5, 1, 1)$. Отметим, что $\mathrm{sum}(u) = 20$ и $\mathrm{sum}(v) = 15$. Вычислим разбиение w:

$$\begin{array}{rccccccc} \Delta(u) = & \mathit{0} & \mathit{0} & \mathit{0} & \mathit{1} & \mathit{2} & \mathit{4} & \mathit{5} \\ u = & & 7 & 4 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ v = & & 8 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \Delta(v) = & \mathit{0} & \mathit{1} & \mathit{2} & \mathit{0} & \mathit{0} & \mathit{0} & \mathit{0} \\ \hline w = & & 7 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Отметим, что здесь $\operatorname{sum}(v) \leq \operatorname{sum}(u)$ и $\Delta = \operatorname{sum}(u) - \operatorname{sum}(v) = 2 + 2 + 1 = \Delta_4(u) + u_5 + u_6$ — это число “неизрасходованных” блоков из u. Очевидно, что аналогичная ситуация имеет место и в случае произвольных разбиений u и v. $\square$

Отметим, что и в случае $(NPL, \leq)$ справедливо замечание об “обратной” прогонке Алгоритма, поскольку до начала работы алгоритма в обратном порядке (т. е. справа налево) известно число $\Delta = \operatorname{sum}(u) - \operatorname{sum}(v) \geq 0$ (без ограничения общности можно считать, что $\operatorname{sum}(v) \leq \operatorname{sum}(u)$) и число $t = \max\{l(u), l(v)\}$, необходимое для размещения начальных “дефицитов” для u и v ($\Delta_t(u) = \Delta$ и $\Delta_t(v) = 0$).

Лемма 4. *Разбиение $w = w(u, v)$ является пересечением $u \wedge v$ разбиений u и v в $(NPL, \leq)$.*

Доказательство. Для любого $i = 1, 2, \ldots, s$ (см. определение s перед Примером) выполняется

$$\Delta_i(u) = u_1 + u_2 + \cdots + u_i - w_1 - w_2 - \cdots - w_i \geq 0,$$

т. е. $u_1 + u_2 + \cdots + u_i \geq w_1 + w_2 + \cdots + w_i$. Кроме того, очевидно, что для любого $i = s+1, s+2, \ldots$ выполняется $u_1 + u_2 + \cdots + u_i \geq w_1 + w_2 + \cdots + w_i$.

Таким образом, $u \geq w$ и, аналогично, $v \geq w$.

Пусть теперь $z = (z_1, z_2, \ldots, z_k) \leq u, v$ в $(NPL, \leq)$. Возьмём $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Пусть $\Delta_i(u) = 0$ (случай, когда $\Delta_i(v) = 0$ рассматривается совершенно аналогично). Тогда в силу условия $u \geq z$ и Леммы 3 получаем

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_i = u_1 + u_2 + \cdots + u_i \geq z_1 + z_2 + \cdots + z_i.$$

Далее, пусть без ограничения общности выполнено условие (1) $\Delta_s(u) = 0$ и $u_{s+1} = 0$. Тогда имеем

$$w_{s+1} = w_{s+2} = \cdots = 0 = u_{s+1} = u_{s+2} = \ldots,$$

откуда для любого натурального числа i получаем

$$\begin{gathered} w_1 + w_2 + \cdots + w_s + w_{s+1} + \cdots + w_{s+i} \\ = w_1 + w_2 + \cdots + w_s = u_1 + u_2 + \cdots + u_s \\ = u_1 + u_2 + \cdots + u_s + u_{s+1} + \cdots + u_{s+i} \geq z_1 + z_2 + \cdots + z_{s+i} \end{gathered}$$

Следовательно, выполняется $w \geq z$. $\square$

Таким образом, нами установлено, что $(NPL, \leq)$ является нижней полурешёткой.

Для каждого натурального числа n определим теперь отображение $\varphi_{n,n+1}$ из $NPL(n)$ в $NPL(n+1)$, полагая

$$\varphi_{n,n+1}(u) = (u_1, u_2, \ldots, u_l, 1, 0, 0, \ldots),$$

для любого $u = (u_1, u_2, \ldots, u_l, 0, 0, \ldots)$ из $NPL(n)$, где $l = l(u)$ (т. е. $u_l > 0$). Отметим, что $\varphi_{n,n+1}(u) \Rightarrow u$ и, в частности, $u < \varphi_{n,n+1}(u)$.

Лемма 5 (анонсирована в [3], лемма 4)**.** *Для любого натурального числа n отображение $\varphi_{n,n+1}$ является изоморфным вложением решётки $(NPL(n), \leq)$ в решётку $(NPL(n+1), \leq)$, которое отображает наименьший элемент решётки $(NPL(n), \leq)$ в наименьший элемент решётки $(NPL(n+1), \leq)$.*

Доказательство. Пусть $u = (u_1, u_2, \dots, u_s), v = (v_1, v_2, \dots, v_t) \in NPL(n)$, где $s = l(u)$ и $t = l(v)$, т. е. $u_s > 0$ и $v_t > 0$. Тогда имеем $n = \mathrm{sum}(u) = \mathrm{sum}(v)$ и $\varphi_{n,n+1}(u) = (u_1, u_2, \dots, u_s, 1)$, $\varphi_{n,n+1}(v) = (v_1, v_2, \dots, v_t, 1)$.

1) Проверим сначала, что $\varphi_{n,n+1}$ сохраняет пересечение, т. е.

$$\varphi_{n,n+1}(u \wedge v) = \varphi_{n,n+1}(u) \wedge \varphi_{n,n+1}(v).$$

Без ограничения общности будем считать, что $s \le t$.

Рассмотрим случай, когда $s < t$. Тогда, применяя к u и v Алгоритм нахождения пересечения $u \wedge v$, мы получаем для некоторых $\Delta_s, \Delta_{s+1}, \dots, \Delta_{t-1} > 0$ следующую таблицу:

$$\begin{array}{rccccc}
\Delta(u) = & & \mathit{\Delta_s} & \mathit{\Delta_{s+1}} & \dots & \mathit{\Delta_{t-1}} \\
u = & u_1 \dots u_s & 0 & 0 & \dots & 0 \\
v = & v_1 \dots v_s & v_{s+1} & v_{s+2} & \dots & v_t \\
\Delta(v) = & & \mathit{0} & \mathit{0} & \dots & \mathit{0} \\
\hline
u \wedge v = & w_1 \dots w_s & v_{s+1} & v_{s+2} & \dots & v_t
\end{array}$$

Здесь, очевидно, $\Delta_s = v_{s+1} + v_{s+2} + \dots + v_t$.

Последнее равенство выполняется в силу того, что $\mathrm{sum}(u) = \mathrm{sum}(v)$. Кроме того, $\Delta_s > 0$ влечёт $\Delta_s(v) = 0$ и $w_{s+1} \le v_{s+1}$. Если $w_{s+1} < v_{s+1}$, то $\Delta_{s+1}(u) > 0$ и $\Delta_{s+1}(v) > 0$, что невозможно. Следовательно, $w_{s+1} = v_{s+1}$, откуда очевидно получаем $w_{s+2} = v_{s+2}, \dots, w_t = v_t$.

Применим теперь Алгоритм к разбиениям $\varphi_{n,n+1}(u)$ и $\varphi_{n,n+1}(v)$:

$$\begin{array}{rccccccc}
\Delta(\varphi_{n,n+1}(u)) = & & \mathit{\Delta_s} & \mathit{\Delta_{s+1}+1} & \dots & \mathit{\Delta_{t-1}+1} & \mathit{1} & \mathit{0} \\
\varphi_{n,n+1}(u) = & u_1 \dots u_s & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \\
\varphi_{n,n+1}(v) = & v_1 \dots v_s & v_{s+1} & v_{s+2} & \dots & v_t & 1 & \\
\Delta(\varphi_{n,n+1}(v)) = & & \mathit{0} & \mathit{0} & \dots & \mathit{0} & \mathit{0} & \mathit{0} \\
\hline
\varphi_{n,n+1}(u) \wedge \varphi_{n,n+1}(v) = & w_1 \dots w_s & v_{s+1} & v_{s+2} & \dots & v_t & 1 &
\end{array}$$

По определению $\varphi_{n,n+1}$ отсюда вытекает доказываемое нами равенство.

Случай $s = t$ тривиален — его можно рассмотреть аналогичным образом.

2) Покажем теперь, что $\varphi_{n,n+1}$ сохраняет объединение, т. е.

$$\varphi_{n,n+1}(u \vee v) = \varphi_{n,n+1}(u) \vee \varphi_{n,n+1}(v).$$

Рассмотрим коразбиения (см. [2]) $\tau(u)$ и $\tau(v)$ для разбиений u и v. Пусть $\tau(u) = (x_1, x_2, \dots)$ и $\tau(v) = (y_1, y_2, \dots)$. Без ограничения общности будем считать, что $y_1 \le x_1$. Представляя себе диаграммы Ферре, легко видеть, что

$$\tau(\varphi_{n,n+1}(u)) = (x_1 + 1, x_2, \dots),$$
$$\tau(\varphi_{n,n+1}(v)) = (y_1 + 1, y_2, \dots).$$

Вычислим пересечение разбиений $\tau(u)$ и $\tau(v)$:

$$\begin{array}{rcccc}
\Delta(\tau(u)) = & \mathit{0} & \mathit{\Delta_1} & \dots & \\
\tau(u) = & x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\
\tau(v) = & y_1 & y_2 & y_3 & \dots \\
\Delta(\tau(v)) = & \mathit{0} & \mathit{0} & \dots & \\
\hline
\tau(u) \wedge \tau(v) = & y_1 & z_2 & z_3 & \dots
\end{array}$$

Очевидно, здесь $\Delta_1 = x_1 - y_1$.

Вычислим теперь пересечение разбиений $\tau(\varphi_{n,n+1}(u))$ и $\tau(\varphi_{n,n+1}(v))$:

$$
\begin{array}{rllll}
\Delta(\tau(\varphi_{n,n+1}(u))) = & \mathit{0} & \mathit{\Delta_1} & \dots & \\
\tau(\varphi_{n,n+1}(u)) = & x_1+1 & x_2 & x_3 & \dots \\
\tau(\varphi_{n,n+1}(v)) = & y_1+1 & y_2 & y_3 & \dots \\
\Delta(\tau(\varphi_{n,n+1}(v))) = & \mathit{0} & \mathit{0} & \dots & \\
\hline
\tau(\varphi_{n,n+1}(u)) \wedge \tau(\varphi_{n,n+1}(v)) = & y_1+1 & z_2 & z_3 & \dots
\end{array}
$$

Сравнивая полученные два пересечения, мы заключаем, что

$$\varphi_{n,n+1}(\tau(\tau(u) \wedge \tau(v))) = \tau(\tau(\varphi_{n,n+1}(u)) \wedge \tau(\varphi_{n,n+1}(v))).$$

Отсюда в силу следствия 3 [2] вытекает доказываемое нами равенство. $\square$

Для любых натуральных чисел $n' \geq n$ определим изоморфное вложение $\varphi_{n,n'}$ решётки $(NPL(n), \leq)$ и решётку $(NPL(n'), \leq)$. Если $n' = n$, то в качестве $\varphi_{n,n'}$ берём тождественное вложение $NPL(n)$ в себя. Пусть $n < n'$. Тогда для любого разбиения $u \in NPL(n)$ полагаем

$$\varphi_{n,n'}(u) = \varphi_{n'-1,n'}(\dots(\varphi_{n+1,n+2}(\varphi_{n,n+1}(u)))\dots),$$

т. е. $\varphi_{n,n'}$ равно суперпозиции вложений

$$\varphi_{n,n+1}, \varphi_{n+1,n+2}, \dots, \varphi_{n'-1,n'}.$$

Ясно, что $\varphi_{n,n'}(u)$ отображает наименьший элемент решётки $(NPL(n), \leq)$ в наименьший элемент решётки $(NPL(n'), \leq)$ и для любых натуральных чисел $n'' \geq n' \geq n$ и разбиения $u \in NPL(n)$ справедливо равенство

$$\varphi_{n,n''}(u) = \varphi_{n',n''}(\varphi_{n,n'}(u)).$$

Лемма 6. *Пусть b, c — произвольные разбиения из NPL, $n = \mathrm{sum}(c)$ и $n' = \mathrm{sum}(b)$. Тогда в $(NPL, \leq)$ выполняется $b \geq c$ в том и только в том случае, когда $n' \geq n$ и в $(NPL(n'), \leq)$ выполняется $b \geq \varphi_{n,n'}(c)$.*

Доказательство. 1) Пусть $b \geq c$ в $(NPL, \leq)$. Тогда $n' \geq n$, так как любое элементарное преобразование не увеличивает вес разбиения.

Заметим, что

(1) если $b \Rightarrow c$ — отбрасывание блока, то $b = \varphi_{n,n+1}(c)$ и $n' = n + 1$;
(2) если $b \Rightarrow c$ — падение или сдвиг блока, то $b \geq \varphi_{n,n}(c) = c$ и $n' = n$.

Поскольку $b \geq c$, мы имеем $b = b_1 \Rightarrow b_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow b_k = c$ для некоторых разбиений $b_1, b_2, \dots, b_k \in NPL$. Положим $n_i = \mathrm{sum}(b_i)$ для $i = 1, \dots, k$. Очевидно, $n' = n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k = n$. Тогда в силу (1) или (2) условие $b_{k-1} \Rightarrow b_k = c$ влечёт

$$b_{k-1} \geq \varphi_{n_k,n_{k-1}}(c).$$

Затем из условия $b_{k-2} \Rightarrow b_{k-1}$ выводим

$$b_{k-2} \geq \varphi_{n_{k-1},n_{k-2}}(b_{k-1}) \geq \varphi_{n_{k-1},n_{k-2}}(\varphi_{n_k,n_{k-1}}(c)) = \varphi_{n_k,n_{k-2}}(c).$$

Продолжая этот процесс, мы получим $b = b_1 \geq \varphi_{n_k,n_1}(c) = \varphi_{n,n'}(c)$.

2) Обратно, пусть $n' \geq n$ и $b \geq \varphi_{n,n'}(c)$ в $(NPL(n'), \leq)$. Тогда в $(NPL, \leq)$ выполняется $b \geq \varphi_{n,n'}(c) \geq c$, т. е. $b \geq c$. $\square$

Пусть $\{(L_n, \leq) | n \in \mathbb{N}\}$ — семейство попарно непересекающихся конечных решёток и для любых $n, n' \in \mathbb{N}$ таких, что $n \leq n'$, определено отображение $\alpha_{n,n'}$ решётки $(L_n, \leq)$ в решётку $(L_{n'}, \leq)$. Семейство отображений

$$\{\alpha_{n,n'} | n \leq n'; n, n' \in \mathbb{N}\}$$

будем называть *транзитивной системой вложений*, если

(1) каждое отображение $\alpha_{n,n'}$ является изоморфным отображением решётки $(L_n, \leq)$ на некоторую подрешётку решётки $(L_{n'}, \leq)$;
(2) для каждого $n \in \mathbb{N}$ отображение $\alpha_{n,n}$ является тождественным отображением решётки $(L_n, \leq)$ на себя;
(3) каждое отображение $\alpha_{n,n'}$ отображает наименьший элемент решётки $(L_n, \leq)$ в наименьший элемент решётки $(L_{n'}, \leq)$;
(4) для любых n, n', n'' таких, что $n \leq n' \leq n''$, отображение $\alpha_{n,n''}$ является суперпозицией $\alpha_{n',n''} \circ \alpha_{n,n'}$ отображений $\alpha_{n,n'}$ и $\alpha_{n',n''}$.

Ясно, что построенная выше система отображений $\{\varphi_{n,n'} | n \leq n'; n, n' \in \mathbb{N}\}$ является транзитивной системой вложений для системы решёток $\{(NPL(n), \leq) | n \in \mathbb{N}\}$.

Далее для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого $x \in L_n$ определим число $s(x)$, полагая его равным числу n.

Определим теперь *дизъюнктное объединение* $(L, \leq)$ *решёток* $\{(L_n, \leq) | n \in \mathbb{N}\}$, отвечающее транзитивной системе вложений $\{\alpha_{n,n'} | n \leq n'; n, n' \in \mathbb{N}\}$, полагая

(1) $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n$;
(2) $b \geq c$ для любых $b, c \in L$ в том и только в том случае, когда $n' \geq n$, где $n' = s(b)$ и $n = s(c)$, и в решётке $(L_{n'}, \leq)$ выполняется условие $b \geq \alpha_{n,n'}(c)$.

Тривиально проверяется, что отношение $\leq$ на L является

- отношением частичного порядка,
- для каждого $n \in \mathbb{N}$ отношение $\leq$ на L_n является ограничением на L_n отношения $\leq$ на L,
- для любых $n, n' \in \mathbb{N}$ таких, что $n \leq n'$, и любого $c \in L_n$ выполняется $\alpha_{n,n'}(c) \geq c$ в L.

Лемма 7. $(L, \leq)$ *является решёткой.*

Доказательство. Пусть $u, v \in L$. Покажем, что u и v имеют объединение и пересечение в $(L, \leq)$. Без ограничения общности будем считать, что $n \leq n'$, где $n = s(u)$ и $n' = s(v)$.

1) Определим элемент $a \in L$, полагая

$$a = \alpha_{n,n'}(u) \vee v,$$

где объединение $\vee$ берётся в решётке $(L_{n'}, \leq)$.

Очевидно, $a \geq \alpha_{n,n'}(u) \geq u$ и $a \geq v$ в $(L, \leq)$.

Пусть теперь $b \geq u$ и $b \geq v$ в $(L, \leq)$. Положим $n'' = s(b)$. Тогда по определению дизъюнктивного объединения решёток $n \leq n' \leq n''$ и

$$b \geq \alpha_{n,n''}(u) = \alpha_{n',n''}(\alpha_{n,n'}(u)),$$
$$b \geq \alpha_{n',n''}(v).$$

Отсюда в $(L_{n''}, \leq)$ получаем

$$b \geq \alpha_{n',n''}(\alpha_{n,n'}(u)) \vee \alpha_{n',n''}(v) = \alpha_{n',n''}(\alpha_{n,n'}(u) \vee v) = \alpha_{n',n''}(a),$$

поэтому $b \geq a$.

Таким образом, a является объединением $u \vee v$ элементов u и v в $(L, \leq)$.

2) Пусть $u' = \alpha_{n,n'}(u)$ и H — семейство нижних границ для пары элементов u', v в решётке $(L_{n'}, \leq)$, лежащих в подрешётке $\alpha_{n,n'}(L_n)$ решётки $(L_{n'}, \leq)$. Множество H конечно и непусто, так как наименьший элемент решётки $(L_{n'}, \leq)$ лежит в $\alpha_{n,n'}(L_n)$. Рассмотрим объединение $\vee H$ элементов из H в решётке $(L_{n'}, \leq)$. Ясно, что $\vee H \in \alpha_{n,n'}(L_n)$, поскольку $\alpha_{n,n'}(L)$ — подрешётка в $(L_{n'}, \leq)$. По определению транзитивной системы вложений существует единственный элемент $w \in L_n$ такой, что $\alpha_{n,n'}(w) = \vee H$.

Покажем, что w является пересечением $u \wedge v$ элементов u и v в $(L, \leq)$.

Ясно, что $\alpha_{n,n'}(w) = \vee H \leq u' = \alpha_{n,n'}(u)$ и $\alpha_{n,n'}(w) = \vee H \leq v$.

Очевидно, отсюда мы получаем $w \leq u$ и, кроме того, $w \leq \alpha_{n,n'}(w) \leq v$, т. е. w является нижней границей для u и v.

Пусть теперь $x \in L$ и в $(L, \leq)$ выполняется $x \leq u$ и $x \leq v$. Положим $s(x) = n_1$. Тогда $n_1 \leq n \leq n'$ и выполняется

$$u \geq \alpha_{n_1,n}(x) \quad \text{и} \quad v \geq \alpha_{n_1,n'}(x).$$

Из первого неравенства следует

$$u' = \alpha_{n,n'}(u) \geq \alpha_{n,n'}(\alpha_{n_1,n}(x)) = \alpha_{n_1,n'}(x).$$

Поэтому мы имеем $\alpha_{n_1,n'}(x) \in H$, откуда получаем $\alpha_{n_1,n'}(x) \leq \vee H = \alpha_{n,n'}(w)$, т. е. $\alpha_{n,n'}(\alpha_{n_1,n}(x)) \leq \alpha_{n,n'}(w)$, что, в свою очередь, влечёт $\alpha_{n_1,n}(x) \leq w$. Следовательно, $x \leq w$ в $(L, \leq)$.

Таким образом, w является пересечением $u \wedge v$ элементов u и v в $(L, \leq)$. □

В силу лемм 6 и 7 справедлива

Теорема 1. *(1)* $(NPL, \leq)$ *— решётка.*

(2) Решётка $(NPL, \leq)$ *является дизъюнктным объединением семейства решёток* $\{NPL(n), \leq\}$, *отвечающим транзитивной системе вложений* $\{\varphi_{n,n'} | n \leq n'; n, n' \in \mathbb{N}\}$.

Устройство нижней части этой решётки указано на Рис. 1. На этом рисунке через $1 \times k$, где $k \in \mathbb{N}$, мы обозначаем последовательность, составленную из k экземпляров числа 1.

Отметим, что в Лемме 7 мы фактически указали алгоритм вычисления объединения $u \vee v$. Действительно, сначала надо вычислить элемент $\varphi_{n,n'}(u)$, а затем — элемент $a = \varphi_{n,n'}(u) \vee v$ в решётке $(NPL(n'), \leq)$, используя алгоритм, указанный в [2] .

Пусть $u = (u_1, u_2, \dots)$ и $v = (v_1, v_2, \dots)$ — два разбиения из NPL. *Порядок Юнга* $u \succeq v$ на NPL определяется условиями

$$u_1 \geq v_1, u_2 \geq v_2, \dots$$

в $\mathbb{N}$. Очевидно, $(NPL, \preceq)$ является решёткой, которую называют *решёткой Юнга* [5]. Из определения порядка Юнга следует, что $u \succeq v$ влечёт $u \geq v$, т. е. порядок $\geq$ на NPL продолжает порядок Юнга $\preceq$.

Легко видеть также, что порядок $\geq$ на NPL продолжается до обычного лексикографического порядка.

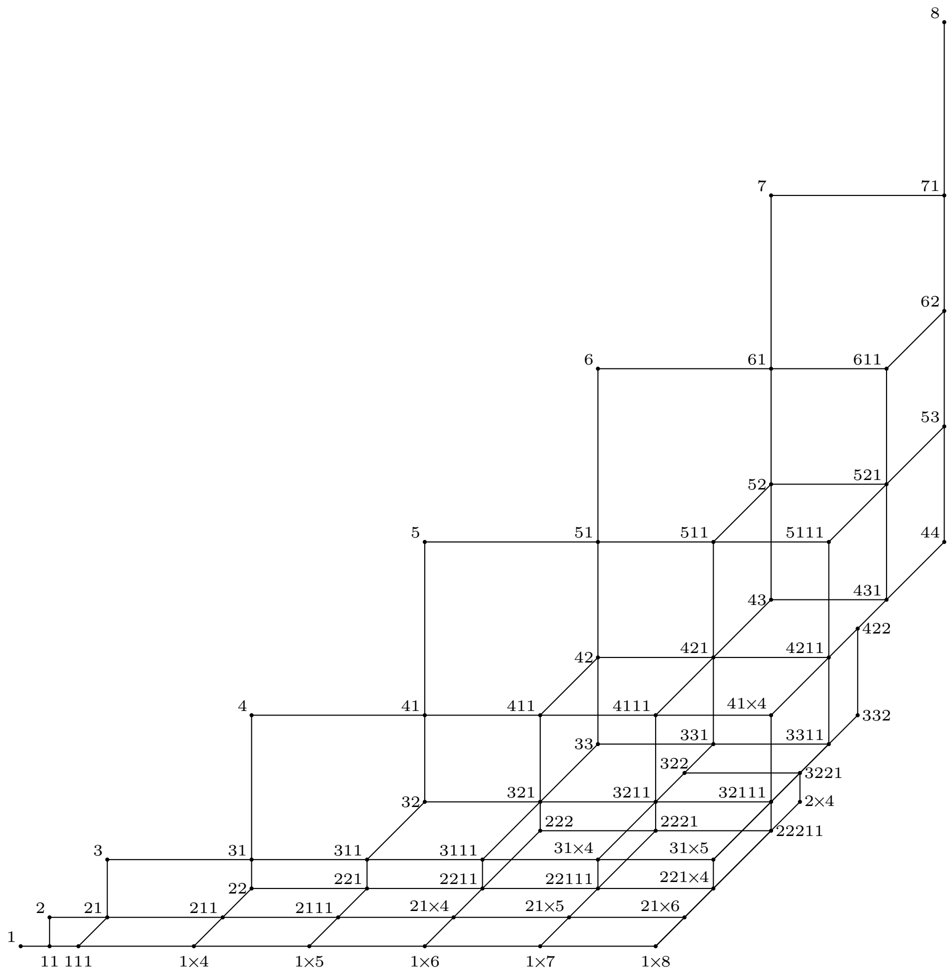

Рис. 1

References

[1] George E. Andrews, *The Theory of Partitions*, Cambridge University Press, 1984. Zbl 0655.10001

[2] Baransky V.A., Koroleva T.A., Senchonok T.A., *O reshetke razbieniy naturalnogo chisla*, Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, **21**:3 (2015), 30–36.

[3] Baransky V.A., Koroleva T.A., *Reshetka razbieniy naturalnogo chisla*, Doklady RAN, **418**:4 (2008), 439–442. Zbl 1170.11035

[4] Brylawski T., *The lattice of integer partitions*, Discrete Mathematics, **6** (1973), 210–219. Zbl 0283.06003

[5] Aigner M., *Combinatorial Theory*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1997. Zbl 0858.05001

Vitaly A. Baransky
Ural Federal University,
pr. Lenina, 51,
620083, Ekaterinburg, Russia
E-mail address: `vitaly.baransky@urfu.ru`

Tatyana A. Koroleva
Yugorskiy State University,
pr. Lenina, 51,
620083, Ekaterinburg, Russia
E-mail address: tatyana-borodina@mail.ru

Tatiana A. Senchonok
Ural Federal University,
pr. Lenina, 51,
620083, Ekaterinburg, Russia
E-mail address: tatiana.senchonok@urfu.ru