S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 754–761 (2016) УДК 519.17+512.54
DOI 10.17377/semi.2016.13.061 MSC 05C25

АВТОМОРФИЗМЫ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{176, 150, 1; 1, 25, 176\}$

И.Н. БЕЛОУСОВ, А.А. МАХНЕВ

Abstract. We study automorphisms of a hypothetical distance-regular graph with intersection array $\{176, 150, 1; 1, 25, 176\}$. It is proved that a distance-regular graph with intersection array $\{176, 150, 1; 1, 25, 176\}$ is not vertex-transitive.

Keywords: distance-regular graph, automorphism.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, $a, b \in \Gamma$, число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ. Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*).

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, ..., d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Γ, неподвижных относительно любого

Belousov, I.N., Makhnev, A.A. Automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{176, 150, 1; 1, 25, 176\}$.

Работа выполнена при поддержке РНФ, проект 14-11-00061 (теорема 1 и следствие), а также соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006 (теорема 2 и предложение).

Поступила 20 августа 2016 г., опубликована 28 сентября 2016 г.

автоморфизма из X. Далее, через $p^l_{ij}(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечения графа Γ.

В работе [1] доказано, что дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин – сильно регулярные графы без треугольников со вторым собственным значением 3 имеют массив пересечений $\{176, 150, 1; 1, 25, 176\}$.

В данной работе изучаются автоморфизмы гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{176, 150, 1; 1, 25, 176\}$. Этот граф является 7-накрытием 177-клики.

Антиподальный дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 имеет (см. [2]) массив пересечений $\{k, \mu(r-1), 1; 1, \mu, k\}$, $v = r(k+1)$ вершин и спектр $k^1, n^f, (-1)^k, (-m)^g$, где $n, -m$ — корни уравнения $x^2 - (\lambda - \mu)x - k = 0$ и $f = m(r-1)(k+1)/(n+m)$, $g = n(r-1)(k+1)/(n+m)$. Если $\mu \neq \lambda$, то собственные значения графа целые и параметры графа выражаются через r, n, m: $k = nm$, $\mu = (m-1)(n+1)/r$, $\lambda = \mu + n - m$.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{176, 150, 1; 1, 25, 176\}$. Тогда Γ имеет $v = 1 + 176 + 1056 + 6 = 7 \cdot 177 = 1239$ вершин и спектр $176^1, 4\sqrt{11}^{531}, -1^{176}, -4\sqrt{11}^{531}$. Порядок клики в Γ не превосходит 14.

Теорема 1. *Пусть* Γ — *дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{176, 150, 1; 1, 25, 176\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — *элемент простого порядка* p *из* G *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 23, 59\}$ *и выполняется одно из утверждений:*

(1) Ω — *пустой граф,* $\alpha_2(g) = 6\alpha_1(g)$ *и либо* $p = 59$, $\alpha_1(g) = 177$ *и* $\alpha_3(g) = 0$, *либо* $p = 7$, $\alpha_1(g) = 175 - 14n$ *и* $\alpha_3(g) = 98n + 14$, *либо* $p = 3$, $\alpha_1(g) = 177$ *и* $\alpha_3(g) = 0$;

(2) Ω *является* t-*кликой,* $\alpha_2(g) = 6\alpha_1(g)$, *либо* $p = 3$, $t = 3m$, $m \leq 4$, $\alpha_3(g) = 18m$ *и* $\alpha_1(g) = 177 - 3m$, *либо* $p = 2$, $t = 2m + 1$, $m = 3, 4, 5, 6$, $\alpha_3(g) = 12m + 6$ *и* $\alpha_1(g) = 176 - 2m$;

(3) Ω *является* s-*кокликой,* $p = 2$, $s = 7$, $\alpha_2(g) = 6\alpha_1(g)$ *и* $\alpha_1(g) = 176$;

(4) Ω *содержит по* s *вершин в* t *антиподальных классах и либо*

(i) $p = 23$, *подграф* Ω *является дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{15, 12, 1; 1, 2, 15\}$, *либо*

(ii) $p = 11$, Ω — *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{22, 18, 1; 1, 3, 22\}$, *либо*

(iii) $p = 5$, $s = 7$ *и* $t = 2, 7, 12, 17, 22$ *или* $s = 2$ *и* $t = 2, 7, ..., 47$, *либо*

(iv) $p = 3$, $s = 7$ *и* $t = 9, 12, ..., 24$, *причем в случае* $t = 9$ *подграф* Ω *дистанционно регулярен с массивом пересечений* $\{8, 6, 1; 1, 1, 8\}$ *или* $s = 4$ *и* $t = 3, 6, ..., 42$, *или* $s = 1$ *и* $t = 3, 6, 9, 12$, *либо*

(v) $p = 2$, $s = 7$ *и* $t = 9, 11, ..., 25$, *причем в случае* $t = 9$ *подграф* Ω *дистанционно регулярен с массивом пересечений* $\{8, 6, 1; 1, 1, 8\}$ *или* $s = 5$ *и* $t = 3, 5, ..., 35$, *или* $s = 3$ *и* $t = 3, 5, ..., 57$, *или* $s = 1$ *и* $t = 9, 11$.

Результаты теоремы 1 уточняются в случае, когда окрестности вершин в графе сильно регулярны с параметрами $(176, 25, 0, 4)$.

Теорема 2. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений* $\{176, 150, 1; 1, 25, 176\}$, *в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами* $(176, 25, 0, 4)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент простого порядка* p *из* G *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ *– непустой граф. Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 59\}$ *и выполняется одно из утверждений:*

(1) Ω *является* s*-кокликой,* $p = 2$, $s = 7$, $\alpha_2(g) = 6\alpha_1(g)$ *и* $\alpha_1(g) = 176$;

(2) Ω *содержит по* s *вершин в* t *антиподальных классах,* $t > 1$ *и либо*

(i) $p = 5$, $t = 2$ *и* $s = 2, 7$, *либо*

(ii) $p = 3$, $s = 4$ *и* $t = 27$, *либо*

(iii) $p = 2$, $s = 7$ *и* $t = 9, 11, ..., 25$, *причем в случае* $t = 9$ *подграф* Ω *дистанционно регулярен с массивом пересечений* $\{8, 6, 1; 1, 1, 8\}$ *или* $s = 3, 5$ *и* $t = 3, 5, ..., 33$.

Для доказательства теоремы 2 полезно также

Предложение 1. *Пусть* Δ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(176, 25, 0, 4)$, $G = \mathrm{Aut}(\Delta)$, g *— элемент простого порядка* p *из* G *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11\}$ *и выполняется одно из утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф,* $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) = 20l + 12$ *или* $p = 11$ *и* $\alpha_1(g) = 22, 132$;

(2) Ω *является* n*-кликой, либо* $n = 1$, $p = 5$, $\alpha_1(g) = 50l + 25$, $l \le 1$, *либо* $n = 2$, $p = 2$, $\alpha_1(g) = 20m - 2$;

(3) Ω *является объединением* l *изолированных ребер,* $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) = 20m + 6l + 12$, $l \le 4$;

(4) Ω *содержит геодезический 2-путь и либо* $p = 7$, $\Omega = K_{4,4}$ *и* $\alpha_1(g) = 70r - 14$, *либо* $p = 3$, $|\Omega| = 26$ *и* $\alpha_1(g) = 0$, *либо* $p = 2$, $|\Omega| = 2s$, $s \le 16$ *и* $\alpha_1(g) = 6s - 20l + 12$.

Следствие 1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{176, 150, 1; 1, 25, 176\}$. *Тогда группа* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует интранзитивно на множестве вершин графа* Γ.

Доказательство теоремы 1 и предложения опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [3]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X, \mathcal{R})$ с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i \le 1$ класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$, $v = |\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X, в котором вершины u, w смежны, если $(u, w) \in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_iA_j = \sum p^l_{ij}A_l$ для чисел пересечений p^l_{ij}.

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j, l) стоит p^l_{ij}. Тогда собственные значения $p_1(0), ..., p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, ..., m_d$. Матрицы P и Q, у которых на месте (i, j) стоят стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_jp_i(j)/k_i$ соответственно, называются первой и второй матрицей собственных значений схемы и связаны равенством $PQ = QP = vI$.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных подпространств $W_0, W_1, ..., W_d$ матрицы смежности A_1 графа Γ. Для любого $g \in G$

матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. § 3.7 [3]) для $g \in G$ получим $\chi_i(g) = v^{-1}\sum_{j=0}^{d} Q_{ij}\alpha_j(g)$, где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x,x^g) = j$.

Лемма 1 ([4], лемма 2)**.** *. Пусть* O_K *— кольцо целых алгебраических чисел поля* K*. Если* d *— целое число, не дялящееся на квадрат простого числа,* $K = \mathbf{Q}(d^{1/2})$ *— соответствующее квадратичное поле, то целочисленный базис кольца* O_K *равен* $(1,(1+d^{1/2})/2)$*, если* $d \equiv 1 \pmod 4$ *и равен* $(1,d^{1/2})$*, если* $d \equiv 2,3 \pmod 4$.

Если $d = 11$, то соответствующий базис равен $(1,\sqrt{11})$.

Докажем предложение. Пусть Δ — сильно регулярный граф с параметрами $(176,25,0,4)$. Тогда Δ имеет спектр $25^1, 3^{120}, -7^{55}$. Заметим, что для $p = 3$ имеем $\alpha_1(g) = 0$. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 120 & 72/5 & -16/5 \\ 55 & -77/5 & 11/5 \end{pmatrix}.$$

Для характера, полученного при проектировании на подпространство размерности 55 получим $\chi_2(g) = (5\alpha_0(g) - 7\alpha_1(g)/5 + \alpha_2(g)/5)/16$. Подставляя в эту формулу значение $\alpha_2(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\chi_2(g) = (3\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + 22)/10$. Положим $\alpha_i(g) = pw_i$.

Если Ω – пустой граф, то $p = 2,7$. В случае $p = 2$ по лемме 1 [5] число $\chi_2(g) - 55$ четно, поэтому $-\alpha_1(g) + 22 = 10(-2l+1)$ и $\alpha_1(g) = 20l + 12$. В случае $p = 11$ имеем $\chi_2(g) = 11(-w_1+2)/10$ и $\alpha_1(g) = 22,132$.

Если Ω является n-кликой, то либо $n = 1$, $p = 5$, либо $n = 2$, $p = 2,3$. В случае $p = 5$ число $\chi_2(g) - 55$ делится на 5, $\chi_2(g) = (-w_1+5)/2$, поэтому $\alpha_1(g) = 50l + 25$, $l \le 1$. В случае$p = 2$ число $\chi_2(g) - 55$ четно, $(-w_1+14)/5 = -2m+1$, поэтому $\alpha_1(g) = 20m - 2$. В случае $p = 3$ имеем $\chi_2(g) = (-3w_1+28)/10$ и $\alpha_1(g) = 20r + 12 \ne 0$, противоречие.

Если Ω является m-кокликой, $m \ge 2$, то p делит 4 и 21, противоречие.

Если Ω содержит ребро и является объединением изолированных клик, то $p = 2$ и Ω является объединением l изолированных ребер. В этом случае число $\chi_2(g) - 55$ четно, $\chi_2(g) = (3l - w_1 + 11)/5$, поэтому $3l - w_1 + 11 = -10m + 5$ и $\alpha_1(g) = 20m + 6l + 12$, $l \le 4$.

Пусть Ω содержит геодезический 2-путь b,a,c. Если $[a] \subset \Omega$ для некоторой вершины a, то $|\Omega| = 26$ и каждая вершина из $\Delta - \Omega$ смежна с 4 вершинами из Ω. Поэтому $\alpha_1(g) = 0$ и $\chi_2(g) = 10$. Так как $\chi_2(g) - 55$ делится на 5, то $p = 3$ (в случае $p = 5$ две подходящие вершины из $\Omega(a)$ смежны с 5 вершинами из $[a] - \Omega$, противоречие).

Если $p > 3$, то Ω является сильно регулярным графом с $\lambda_\Omega = 0, \mu_\Omega = 4$. В этом случае Ω – полный двудольный граф $K_{4,4}$ и $p = 7$. Далее, каждая вершина из $\Delta - \Omega$ смежна с единственной вершиной из Ω и $\chi_2(g) = (46 - \alpha_1(g))/10$, $\alpha_1(g) = 70r - 14$.

Если $p = 3$, то Ω является связным графом с $\lambda_\Omega = 0, \mu_\Omega = 1,4$. В этом случае степени вершин в Ω равны $1,4,...,22$ и $|\Omega| = 3s + 2$. Заметим, что $\alpha_1(g) = 0$, поэтому $\chi_2(g) = (3(3s+2)+22)/10$ и $s = 8$.

Если $p = 2$, то Ω является графом с $\lambda_\Omega = 0, \mu_\Omega = 2, 4$. В этом случае степени вершин в Ω равны $1, 3, ..., 23$ и $|\Omega| = 2s$. Число $\chi_2(g) = (6s - \alpha_1(g) + 22)/10$ нечетно, поэтому $6s - \alpha_1(g) + 22 = 10(2l+1)$ и $\alpha_1(g) = 6s - 20l + 12$. Предложение доказано.

В леммах 2–5 предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{176, 150, 1; 1, 25, 176\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ содержит по s вершин в t антиподальных классах.

Лемма 2. *Пусть $g \in G$, χ_1 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности* 531 *(отвечающее собственному значению $4\sqrt{11}$), χ_2 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности* 176*. Тогда $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/7 - 1$, $\chi_2(g) - 176$ делится на p и $\chi_1(g) = ((3\alpha_0(g) - \alpha_3(g)/2) + \sqrt{11}(3\alpha_1(g)/44 - \alpha_2(g)/88))/7$.*

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 531 & 531\sqrt{11}/44 & -177\sqrt{11}/88 & -177/2 \\ 176 & -1 & -1 & 176 \\ 531 & -531\sqrt{11}/44 & 177\sqrt{11}/88 & -177/2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_2(g) = (176\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) + 176\alpha_3(g))/1239$. Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 1239 - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/7 - 1$.

Далее, $\chi_1(g) = ((3\alpha_0(g) - \alpha_3(g)/2) + \sqrt{11}(3\alpha_1(g)/44 - \alpha_2(g)/88))/7$. Остальные утверждения леммы следуют из леммы 1 [5]. $\square$

Лемма 3. *Пусть g — элемент простого порядка p из G, $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если $p = 2$, то для любой вершины $u \in \Gamma - \Omega$ либо $d(u, u^g) = 3$, либо u смежна с нечетным числом вершин из Ω;*

(2) *если Ω — пустой граф, то $\alpha_2(g) = 6\alpha_1(g)$ и либо $p = 59$, $\alpha_1(g) = 177$ и $\alpha_3(g) = 0$, либо $p = 7$, $\alpha_1(g) = 175 - 14n$ и $\alpha_3(g) = 98n + 14$, либо $p = 3$, $\alpha_1(g) = 177$ и $\alpha_3(g) = 0$;*

(3) *если Ω является t-кликой, то $\alpha_2(g) = 6\alpha_1(g)$, либо $p = 3$, $t = 3m$, $m \le 4$, $\alpha_3(g) = 18m$ и $\alpha_1(g) = 177 - 3m$, либо $p = 2$, $t = 2m + 1$, $m = 3, 4, 5, 6$, $\alpha_3(g) = 12m + 6$ и $\alpha_1(g) = 176 - 2m$;*

(4) *если Ω является s-кокликой, то $p = 2$, $s = 7$, $\alpha_2(g) = 6\alpha_1(g)$ и $\alpha_1(g) =$ 176.*

Доказательство. Утверждение (1) следует из того, что числа λ, μ нечетны.

Пусть Ω — пустой граф. Так как $v = 59 \cdot 21$, то $p = 3, 7, 59$. Если $p = 59$, то $\alpha_3(g) = 0$, $\chi_1(g) = \sqrt{11}(3\alpha_1(g)/44 - \alpha_2(g)/88))/7$. Ввиду леммы 1 число $(3\alpha_1(g)/44 - \alpha_2(g)/88))/7$ целое, поэтому $6\alpha_1(g) - \alpha_2(g)$ делится на $59 \cdot 88 \cdot 7$, $6\alpha_1(g) - \alpha_2(g) = 0$ и $\alpha_1(g) = 177$. Если $p = 3$, то $\alpha_3(g) = 0$, число $\chi_1(g)$ кратно сумме корней третьей степени из 1. Поэтому ее, $\chi_1(g) = \sqrt{11}(3\alpha_1(g)/44 - \alpha_2(g)/88))/7 = 0$. Если $p = 7$, то число $\chi_1(g)$ кратно сумме корней третьей степени из 1, поэтому $6\alpha_1(g) - \alpha_2(g) = 0$ и $\chi_1(g) = -\alpha_3(g)/14$. По лемме 2 число $\chi_2(g) = \alpha_3(g)/7 - 1$ делится на 7, поэтому $\alpha_3(g)/7$ сравнимо с 2 по модулю 7. Отсюда $\alpha_3(g) = 98n + 14$ и $\alpha_1(g) = 175 - 14n$.

Пусть Ω является t-кликой. Тогда $t \leq 14$, $s = 1$, поэтому p делит 6. Отсюда $\alpha_2(g) = 6\alpha_1(g)$ и в случае $p = 3$ имеем $t = 3m$, $m \leq 4$, $\alpha_3(g) = 18m$ и $\alpha_1(g) = 177 - 3m$. В случае $p = 2$ имеем $t = 2m + 1$, $m = 3, 4, 5, 6$. Теперь $\alpha_3(g) = 12m + 6$ и $\alpha_1(g) = 177 - (2m + 1)$.

Пусть Ω является s-кокликой. Тогда $s \leq 7$, p делит 176 и $7 - s$, поэтому $p = 2$, $s = 7$ (сдвигаемая вершина либо сдвигается на расстояние, равное 3, либо смежна с вершиной из Ω). Отсюда $\alpha_2(g) = 6\alpha_1(g)$ и $\alpha_1(g) = 176$. □

Лемма 4. *Если $p \geq 7$, то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $p = 23$, *подграф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{15, 12, 1; 1, 2, 15\}$*;*

(2) $p = 11$, Ω — *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{22, 18, 1; 1, 3, 22\}$.

Доказательство. Заметим, что p делит $177 - t$ и $7 - s$, причем в случае $p > 5$ имеем $s = 7$ и каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна точно с t вершинами из Ω. Пусть $a \in \Omega$, F — антиподальный класс, содержащий a, $b \in \Omega(a)$ и $F \cap \Omega = \{a, a_2, ..., a_s\}$.

Пусть $p > 23$. Тогда $\lambda_\Omega = \mu_\Omega = 25$, поэтому Ω — дистанционно регулярный граф с $b_1 = 150$, противоречие.

Пусть $p = 23$. Тогда $t = 16$, $\Omega(b)$ содержит 3 вершины из $a^\perp$ и по 2 вершины из $[a_2], ..., [a_7]$, поэтому Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{15, 12, 1; 1, 2, 15\}$.

Пусть $p = 19$. Тогда $t = 6, 25$, $\Omega(b)$ содержит 7 вершин из $a^\perp$ и по 6 вершин из $[a_2], ..., [a_7]$, противоречие.

Пусть $p = 17$. Тогда $t = 7, 24$, $\Omega(b)$ содержит 9 вершин из $a^\perp$ и по 8 вершин из $[a_2], ..., [a_7]$, противоречие.

Пусть $p = 13$. Тогда $t = 8, 21$, $\Omega(b)$ содержит 13 вершин из $a^\perp$ и по 12 вершин из $[a_2], ..., [a_7]$, противоречие.

Пусть $p = 11$. Тогда $t = 12, 23$, $\Omega(b)$ содержит 4 вершины из $a^\perp$ и по 3 вершин из $[a_2], ..., [a_7]$, поэтому Ω — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{22, 18, 1; 1, 3, 22\}$.

Пусть $p = 7$. Тогда $t = 2, 9, 16, 23$, $\Omega(b)$ содержит 5 вершин из $a^\perp$ и по 4 вершин из $[a_2], ..., [a_7]$, противоречие. □

Лемма 5. *Если $p \leq 5$, то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $p = 5$, *либо* $s = 7$ *и* $t = 2, 7, 12, 17, 22$, *либо* $s = 2$ *и* $t = 2, 7, ..., 47$*;*

(2) $p = 3$, *либо* $s = 7$ *и* $t = 9, 12, ..., 24$, *причем в случае* $t = 9$ *подграф* Ω *дистанционно регулярен с массивом пересечений* $\{8, 6, 1; 1, 1, 8\}$, *либо* $s = 4$ *и* $t = 3, 6, ..., 42$, *либо* $s = 1$ *и* $t = 3, 6, 9, 12$*;*

(3) $p = 2$, *либо* $s = 7$ *и* $t = 9, 11, ..., 25$, *причем в случае* $t = 9$ *подграф* Ω *дистанционно регулярен с массивом пересечений* $\{8, 6, 1; 1, 1, 8\}$, *либо* $s = 5$ *и* $t = 3, 5, ..., 35$, *, либо* $s = 3$ *и* $t = 3, 5, ..., 57$, *либо* $s = 1$ *и* $t = 9, 11$.

Доказательство. Пусть $p = 5$. Если $s = 7$, то $t = 2, 7, 12, 17, 22$, $\Omega(b)$ содержит 1 или 6 вершин из $a^\perp$ и по 0 или 5 вершин из $[a_2], ..., [a_7]$.

Если $s = 2$, то $\Omega(b)$ содержит не более 26 вершин из $a^\perp$ и 25 вершин из $[a_2]$, поэтому $t \leq 52$, причем в случае $t = 52$ подграф Ω дистанционно регулярен с массивом пересечений $\{51, 25, 1; 1, 25, 51\}$. Противоречие с тем, что $\Omega(b)$ — сильно регулярный граф с параметрами $(51, 25, \lambda', 25/2)$.

Пусть $p = 3$. Если $s = 7$, то $t = 3, 6, ..., 24$, $\Omega(b)$ содержит 2 вершины из $a^\perp$ и по 1 вершине из $[a_2], ..., [a_7]$, поэтому $t \geq 9$, причем в случае $t = 9$ подграф Ω дистанционно регулярен с массивом пересечений $\{8, 6, 1; 1, 1, 8\}$.

Если $s = 4$, то число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $4t(177 - t)$, поэтому некоторая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна по крайней мере с $4t/7$ вершинами из Ω. Отсюда $t \leq 42$.

Если $s = 1$, то Ω является t-кликой, поэтому $t = 3, 6, 9, 12$.

Пусть $p = 2$. Напомним, что каждая вершина, не лежащая в антиподальном классе, пересекающем Ω, смежна с нечетным числом вершин из Ω.

Если $s = 7$, то $t = 3, 5, ..., 25$, $\Omega(b)$ содержит 2 вершины из $a^\perp$ и по 1 вершине из $[a_2], ..., [a_7]$, поэтому $t \geq 9$, причем в случае $t = 9$ подграф Ω дистанционно регулярен с массивом пересечений $\{8, 6, 1; 1, 1, 8\}$.

Если $s = 5$, то число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $5t(177 - t)$, поэтому некоторая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна по крайней мере с $5t/7$ вершинами из Ω. Отсюда $t \leq 35$.

Если $s = 3$, то число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $3t(177 - t)$, поэтому некоторая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна по крайней мере с $3t/7$ вершинами из Ω. Отсюда $t \leq 57$.

Если $s = 1$, то Ω является t-кликой, поэтому $t = 9, 11$. □

Из лемм 3–5 следует теорема 1. Из теоремы 1 и предложения следует теорема 2. Докажем следствие. До конца работы будем предполагать, что G действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. Из теоремы 1 следует, что $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 23, 59\}$ и $|G|$ не делится на 49 и на 59^2.

Лемма 6. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если f — элемент порядка 59 из G, g — элемент простого порядка $p < 59$ из $C_G(f)$, то $p = 3$ и Ω — пустой граф;*

(2) *$S(G)$ является 3-группой.*

Доказательство. Пусть f — элемент порядка 59 из G, g — элемент простого порядка $p < 59$ из $C_G(f)$. Из теоремы 1 следует, что Ω — пустой граф и $\alpha_1(f) = 117$. Поэтому $p = 3$.

Так как $v = 3 \cdot 7 \cdot 59$, то $S(G)$ является $\{3, 7, 59\}$-группой. Ввиду утверждения (1) $|S(G)|$ не делится на 7 и на 59. □

Завершим доказательство следствия. Пусть $\bar{T}$ – цоколь группы $\bar{G} = G/O_3(G)$. По [6, таблица 1] группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(59)$, A_{59} или A_{60}. Но в двух последних случаях $|\bar{T}|$ делится на 53, противоречие. В случае $L_2(59)$ число $|\bar{T}|$ делится на 29, противоречие. Следствие доказано.

References

[1] I.N. Belousov, A.A. Makhnev, *On extensions of strongly regular graphs without triangles with eigenvalue 3*, Doklady Mathematics, **1** (2014), 395–398. Zbl 1304.05154

[2] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York, 1989. Zbl 0747.05073

[3] P.J. Cameron, *Permutation Groups*, London Math. Soc. Student Texts **45**, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. Zbl 0922.20003

[4] A.A. Makhnev, D. V. Paduchikh, *An automorphism group of a distance-regular graph with intersection array* $\{24, 21, 3; 1, 3, 18\}$, Algebra and Logic, **4** (2012), 319–332. Zbl 1258.05050

[5] A.L. Gavrilyuk, A.A. Makhnev, *On automorphisms of distance-regular graphs with intersection array* $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$, Doklady Mathematics, **3** (2010), 439–442. Zbl 1250.05059
[6] A.V. Zavarnitsine, *Finite simple groups with narrow prime spectrum*, Sibirean electr. Math. Reports, **6** (2009), 1–12. Zbl 1289.20021

Ivan Nikolaevich Belousov
N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Meckhanics,
str. S. Kovalevskoy, 16,
620990, Ekaterinburg, Russia
E-mail address: i_belousov@mail.ru

Alexandr Alekseevich Makhnev
N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Meckhanics,
str. S. Kovalevskoy, 16,
620990, Ekaterinburg, Russia
E-mail address: makhnev@imm.uran.ru